

1. Tekintsünk egy pontszerű testet, ami egy R sugarú körpálya mentén mozoghat. Szeretnénk a feladathoz leginkább illeszkedő koordinátarendszerben számolni, ezért síkbeli polárkoordinátákat használunk úgy, hogy az origót a körpálya középpontjába helyezzük. A test helyzetét ezután az $r(t)$ és $\varphi(t)$ függvények segítségével írjuk le.

- Lássuk be, hogy a választott koordinátarendszerben $r(t) = \text{const.}$!
- Írjuk fel a tömegpont $\vec{r}(t)$ helyvektorát az $r(t)$, $\varphi(t)$ függvények segítségével, a (polár)koordináta-vonalak irányába mutató \vec{e}_r és \vec{e}_φ egységvektorok bázisában felírva.
- Határozzuk meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve! Vigyázzunk, a bázisvektorok helyről helyre változnak, ezért meg kell határoznunk az $\dot{\vec{e}}_r$ és $\dot{\vec{e}}_\varphi$ vektorokat is!
- Határozzuk meg a tömegpont $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát is az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!

2. Egy pontszerű test a síkon a következő síkbeli polárkoordinátákkal megadott pályán mozog,

$$r(\varphi) = k \varphi ,$$

ahol k egy konstans. Először tekintsünk egy olyan mozgást, amikor a tömegpont szögsebessége időben állandó, $\dot{\varphi}(t) = \omega_0$. A test a $t = 0$ időpillanatban az origóból indul.

- Rajzoljuk fel a tömegpont pályáját!
- Feltéve, hogy ismerjük az $r(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeket, segítségével írjuk fel a tömegpont $\vec{r}(t)$ helyvektorának és $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorának általános alakját az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!
- A pályaegyenletet kihasználva, valamint ω_0 ismeretében fejezzük ki a tömegpont sebességének $|\dot{\vec{r}}(t)|$ nagyságát!
- Adjuk meg a tömegpont sebesség- és gyorsulásvektorát az idő függvényében!
- Adjuk meg a tömegpont gyorsulásvektorának sebességre merőleges komponensét az idő függvényében! Határozzuk meg a pálya görbületi sugarát abban a pontjában, ahol a test a t -vel jelölt időpillanatban van.
- Az előző részfeladatot általánosítva, fejezzük ki általánosan egy tömegpont pályájának görbületi sugarát a $\dot{\vec{r}}$ sebesség- és $\ddot{\vec{r}}$ gyorsulásvektor függvényében!
- Láthatóan az előbb vizsgált mozgás során a tömegpont sebessége időben növekszik. Most tekintszen egy tömegpontot, ami ugyanezen a pályán mozog, de sebességének nagysága $v_0 = \text{const.}$. Adjuk meg ekkor a mozgást leíró $r(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeket!

3. Háromdimenziós mozgások leírásakor a Descartes koordinátarendszer mellett a harmadik gyakran használt koordinátarendszer az ún. hengerkoordinátarendszer, $\{\rho, \varphi, z\}$. Vizsgáljuk egy tömegpont mozgását ebben a koordinátarendszerben! Mozogjon a tömegpont egy kúppalástra feltekert spirális pályán,

$$\rho(t) = A t , \quad \varphi(t) = B t , \quad z(t) = C t$$

- Vázoljuk a részecske pályáját!
- A korábbi feladatokhoz hasonlóan adjuk meg a tömegpont sebesség- és gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ bázisban!
- Határozzuk meg a pálya görbületi sugarát azon pontjában, ahol a t időpillanatban halad át!