1. Egy rugalmas test a külső terhelések hatására eldeformálódott. Egyes pontjainak elmozdulását az elmozdulás-mező segítségével adhatjuk meg:

$$x_i' = x_i + s_i(\mathbf{x})$$

   (a) Tekintsünk a test két infinitezimálisan közeli pontját és adjuk meg ezek távolságát a deformáció után!

   (b) Tekintsük a test egy kicsiny térfogatát az x pont körül, adjuk meg ezen térfogat megváltozását!

---

2. Egy homogén, izotrop, a oldalú négyzet alapú hasábot egyik végét „lágyan” egy függőleges falhoz ragasztottuk, a másik végét vízszintesen húzzuk F erővel. *(Lágy ragasztás alatt azt értjük, hogy a ragasztási felületen a nyírófeszültség elhanyagolható.)* A hasáb anyagának Lamé-állandói μ és λ, sűrűsége elhanyagolhatóan kicsiny.

   (a) Adjuk meg a hasábban ébredő feszültségtenzor elemeit!

   (b) A Hooke-törvény segítségével fejezzük ki a hasáb deformációtenzorát!

   (c) Adjuk meg a hasáb relatív megnyúlását!

   (d) Adjuk meg a hasáb oldalhosszának változását!

   (e) Ezek alapján fejezzük ki a hasáb Young-modulusát és a Poisson-számot a Lamé-állandók segítségével!

---

3. A beton az egyik legelterjedtebb építőanyag, hiszen önthető, de miután megszilárdul igen nagy nyomófeszültségeket is kibír. A húzó- és nyírófeszültségek azonban könnyen eltörhetik a betont, ezért szoktak vasalt betonból építkezni. Elsőre meglepő módon még pillérek építéséhez is vasbetont használunk, pedig ekkor azt gondolhatnánk, hogy a nyomóterhelés miatt felesleges a vasalás. Tekintsünk egy A keresztmetszetű nem túl magas betonoszlopot, aminek a tetejét függőlegesen lefelé nyomjuk F erővel. A beton nyomószilárdsága igen nagy, számunkra most végtelennek vehető, a nyírószilárdsága azonban $\sigma_{\mathrm{ny}}^{\max}$. (Amennyiben ennél nagyobb nyírófeszültség ébred, a beton elreped.)

   (a) Adjuk meg a feszültségtenzor elemeit az oszlopban! Az oszlop függőleges tengelye legyen a z tengely erre merőleges az x és y tengely!

   (b) Mekkorának látszik a maximális nyírófeszültség?

   (c) Forgassuk el a koordinátarendszerünket az x tengely körül φ szöggel! Adjuk meg a feszültségtenzort ebben a koordinátarendszerben is!

   (d) Azt látjuk, hogy φ függvényében mégiscsak megjelenik nyírófeszültség. Mekkora a maximális nyírófeszültség az oszlopban?

   (e) Mekkora F terhelőerő esetén törik el az oszlop?

   (f) Kvalitatíve hogyan fog eltörni a betonoszlop?

---

4. Tekintsük egy ideális, összenyomhatatlan folyadék mozgásegyenletét! Ideális folyadékokban nincs súrlódás, ezért a feszültségtenzor $\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\delta_{ij}$ alakú, ahol $p(\mathbf{x})$ a (helyfüggő) nyomás. A folyadék összenyomhatatlansága miatt a ρ konstansként kezelhető.

   (a) Írjuk fel az ideális folyadékok mozgásegyenletét! *(Ezt szokás az ideális folyadékok Euler-féle mozgásegyenletének nevezni)*

   (b) Írjuk fel a kontinuitási egyenlet alakját ideális összenyomhatatlan folyadékra!

   (c) Tekintsük a sebességmező rotációját, és határozzuk meg ennek időderiváltját! Mutassuk meg, hogy egy kezdetben örvénymentes folyadék az is marad! *(Thomson-tétel, vagy örvénytétel speciális esete)*

   (d) Az előző feladat értelmében, ha egy folyadék eredetileg örvénymentes volt, úgy az is maradt. Ekkor kereshetjük a sebességmezőt $\vec{v} = \mathrm{grad}\Psi$ alakban.(*„potenciálos áramlás”*) Adjuk meg a Ψ-re vonatkozó mozgásegyenletet!

   (e) Határozzuk meg a kontinuitási egyenlet Ψ-vel felírt alakját!

   (f) Tekintsünk egy nagyon mély óceánt, aminek a felszíne kis amplitudóval hullámzik. Feltételezhetjük, hogy az áramlás potenciálos. Adjuk meg az óceán felszínének (mély-víz határesetre vonatkozó) linearizált mozgásegyenletét.

   (g) A kontinuitási egyenletet is kihasználva oldjuk meg a mozgásegyenletet! Adjuk meg a $\Psi(\mathbf{x}, t)$ potenciálfüggvényt is! Milyen az áramlás a felszín alatt?

   (h) Hogyan függ a vízhullám terjedési sebessége a hullámhossztól? Hogyan kaphattuk volna meg ezt az eredményt dimenzióanalízis segítségével?