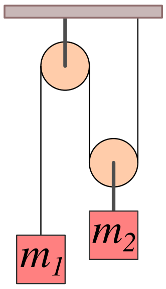
1. Tekintsük az ábrán látható két csigás elrendezést!



   (a) Jellemezzük a rendszert az m_1 tömegű test (függőleges) y helyzetével. Írjuk fel a Lagrange-függvényt!

   (b) Adjuk meg az y-hoz tartozó általánosított impulzust!

   (c) Írjuk fel a rendszer Lagrange-féle mozgásegyenletét!

   (d) Oldjuk meg a mozgásegyenletet az $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ kezdeti feltételek esetén!

   (e) A Lagrange-függvényből kiindulva adjuk meg a rendszer teljes energiáját, és mutassuk meg, hogy ez megmaradó mennyiség!

---

2. Egy m tömegű bolygó a $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ centrális gravitációs potenciálban mozog. Korábban megmutattuk, hogy centrális erőtérben a mozgás egy síkon történik, ezért elegendő két dimenzióban tekintenünk a problémát.

   (a) Írjuk fel a bolygó Lagrange-függvényét síkbeli polárkoordinátákat használva!

   (b) Adjuk meg a φ-hez tartozó általánosított impulzust!

   (c) Mutassuk meg, hogy a φ-hez tartozó általánosított impulzus megmaradó mennyiség. Milyen jól ismert megmaradási törvény ez?

   (d) Írjuk fel a rendszer Lagrange-féle mozgásegyenleteit!

   (e) Keressünk körpálya ($r(t) \equiv R$) megoldásokat! Hogy függ a keringési idő R-től?

---

3. Az előző feladatban vizsgált bolygó keringése valójában kéttest probléma. Legyen adott egy M tömegű bolygó és az ő m tömegű holdja. A köztük lévő kölcsönhatási potenciál $V(r) = -\gamma\frac{mM}{r}$. Az előző feladathoz hasonlóan, az általánosság megszorítása nélkül, elegendő két dimenzióban dolgoznunk.

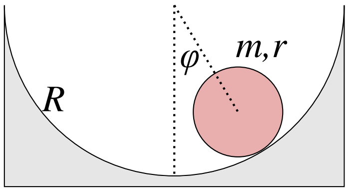
   (a) Írjuk fel a két testből álló rendszer Lagrange-függvényét. Általános koordinátának válasszuk a tömegközéppont X és Y koordinátáját, ill. a bolygó centrumából a hold centrumába mutató $\vec{r}$ vektor r hosszát, és az x-tengellyel bezárt φ szögét!

   (b) Mutassuk meg, hogy a tömegközéppont helyzetéhez tartozó általánosított impulzus megmaradó mennyiség!

   (c) Írjuk fel r és φ mozgásegyenletét! Mutassuk meg, hogy ez ugyanolyan alakú, mint egyetlen tömegpont mozgásegyenlete centrális potenciálban, csupán más „tömeget” kell használni!

   (d) Keressünk olyan megoldásokat, amikor a mind a bolygó, mind a hold körpályán mozog. Tegyük fel, hogy a bolygó-hold távolság $r(t) \equiv R$. Mennyi a keringési idő?

4. Egy R sugarú henger alakú vályúban egy r sugarú m tömegű homogén henger gördülhet tisztán. Az így kialakult egy szabadsági fokú rendszer helyzetét az ábrán jelölt φ szöggel jellemezzük.



   (a) Adjuk meg a rendszer potenciális energiáját φ-függvényében!

   (b) Adjuk meg a rendszer mozgási energiáját $\dot{\varphi}$ függvényében. Vigyázzunk, a kis hengernek transzlációs és forgási mozgása is van.

   (c) Írjuk fel a rendszer Lagrange-függvényét!

   (d) Tekintsük azt a határesetet, amikor csak kicsit térítettük ki az alsó egyensúlyi helyzetéből a korongot. A potenciális energiában megjelenő $\cos(\varphi)$ függvényt közelítsük másodrendig!

   (e) Írjuk fel a kis kitérésekre vonatkozó mozgásegyenletet! Mekkora a rezgésidő?