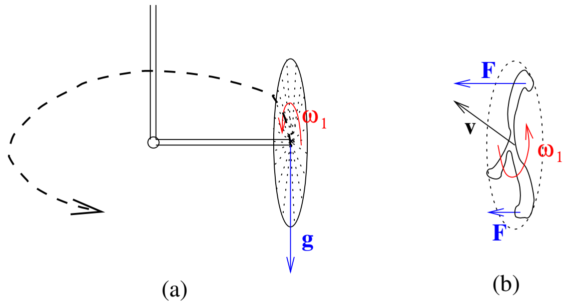
1. Ebben a részben két problémát vizsgálunk. Megmutatjuk, hogy ugyanarra a jelenségre vezethetők vissza. Az első probléma a 1(a) ábrán látható. Itt egy tengelyen lévő kerék gömbcsuklóval kapcsolódik a függőleges tartórúdhoz. Ha a kerék nem forog, akkor elengedés után a tengely függőlegesen lefelé fog mozogni a gravitáció hatására. Ha azonban tengely vízszintes helyzete mellett a tengelyen lévő kereket (nagy szögsebességgel) megpörgetjük, majd elengedjük, akkor nem ez történik, hanem a tengely megőrzi vízszintes helyzetét és elkezd a csukló körül körbe forogni.

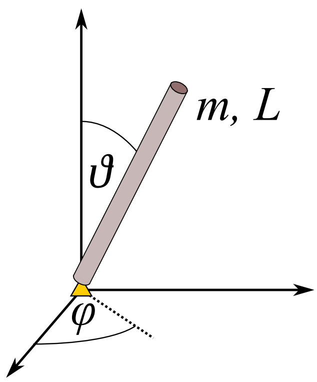
   A másik probléma a 1(b) ábrán, amikor egy bumerángot megforgatva elhajítunk. Az ábrán látható módon a bumeráng felső és alsó szára különböző sebességgel halad a levegőhöz képest, ezért a (megfelelően kialakított szárnyprofil miatt) felső szárra nagyobb merőleges aerodinamikai erő hat, mint az alsóra. Hogyan mozog a bumeráng?



1. ábra.

2. Vizsgáljuk meg egy szabadon forgó test stabilitását! Biztosan mindenki észrevette már, hogy egy gyufaskatulyát pörögve feldobva annak mozgása néha szép pörgő marad, néha pedig bukdácsoló. Tudjuk, hogy elméletileg a szabad tengelyek mentén megpörgetve a szögsebesség állandó marad, tehát mindenképpen szép pörgő mozgást kellene látnunk. Ha a legkisebb és legnagyobb lapon megy át a tengelyünk, ez így is van, azonban ha a középsőn, akkor mindig bukdácsol.

3. Egy m tömegű L hosszúságú pálca egyik végpontját egy könnyen forgó gömbcsuklóhoz rögzítettük. A célunk a pálca mozgásának leírása. A pálca helyzetét a 2. ábrán látható módon a (ϑ, φ) szokásos gömbi koordinátákkal adjuk meg, a vektormennyiségeket pedig az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban érdemes kifejteni.



2. ábra.

(a) Adjuk meg a pálca tehetetlenségi nyomaték tenzorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

(b) Adjuk meg a pálca szögsebességvektorát mint $(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ függvényét az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

(c) Adjuk meg a pálca perdületvektorát!

(d) Írjuk fel a pálca mozgásegyenletét! Vigyázat, az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ koordinátarendszer nem inerciarendszer, hiszen forog.

(e) Tekintsünk olyan mozgásokat, amikor $\varphi = \text{const.}$. Mutassuk meg, hogy ekkor visszakapjuk a szokásos fizikai inga mozgásegyenletét!

(f) Tekintsünk olyan mozgásokat, amikor $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.}$, azaz a pálca egy kúp-paláston halad körbe-körbe. Mekkora a mozgás szögsebessége?

(g) Vizsgáljuk az előző pontban talált kúpmozgás stabilitását!

4. **Ha marad rá idő.**
A 3. feladat útját járva, adjuk meg a 1(a) ábrán látható rendszer korrekt (tehát nem csak gyorsan megforgatott esetben érvényes) mozgásegyenletét! Itt a $(\vartheta, \varphi, \psi)$ koordinátákat érdemes használni, ahol ϑ és φ a kerék tengelyének állását, ψ pedig a tengely körüli elfordulását méri. A vektorokat érdemes az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban felírni, ahol $\vec{e}_r$ a kerék tengelyének irányába mutat. (Azaz a koordinátarendszerünk együtt forog a kerék tengelyével, de nem forog együtt magával a kerékkel, így a nehézségi erő nem fog körbe-körbe forogni.)