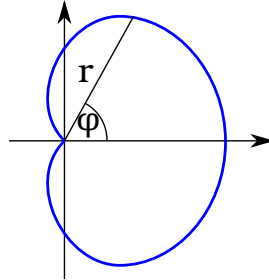


1. kis-ZH feladatok

1. Egy tömegpont ún. „kardioid” (szív alakú) pályán mozog a síkon, melynek polárkoordinátás egyenlete a következő:

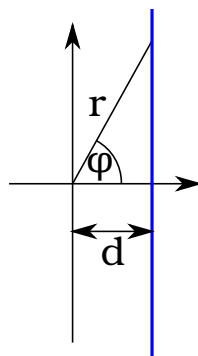
$$r(\varphi) = R(1 + \cos \varphi) ,$$

ahol R egy konstans. A tömegpont $\dot{\varphi} = \omega_0$ állandó szögsebességgel halad a pályán úgy, hogy a $t = 0$ időpillanatban a $\varphi = 0$ -val jellemzett pontból indul.



- A pályaequation figyelembevételével írja fel a részecske mozgását leíró $r(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeket.
- Adja meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!
- Adja meg a tömegpont sebességének $|\dot{\vec{r}}(t)|$ nagyságát!
- Adja meg a tömegpont $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

2. Egy tömegpont egyenletes v_0 sebességű, egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az origótól d távolságra elhaladó egyenes mentén. A mozgást síkbeli polárkoordinátarendszerrel írjuk le, melynek $\varphi = 0$ irányát úgy választottuk meg, hogy az egyenes pálya origóhoz legközelebbi pontja ebbe az irányba essen. A tömegpont a $t = 0$ időpontban éppen ezen legközelebbi pontban tartózkodik.



- Írja fel az egyenes pálya $r(\varphi)$ polárkoordinátás egyenletét!
- Feltéve, hogy ismeri a $\varphi(t)$ függvényt, írja fel a segítségével (a pályaequationt is kihasználva) a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!
- Annak ismeretében, hogy a sebesség állandó v_0 nagyságú, adja meg a tényleges $\varphi(t)$ függvényt!
- Az előző alfeladatban meghatározott $\varphi(t)$ függvény segítségével adja meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

3. Egy lepke az alábbi helicális pályán halad egy petróleum lámpa felé:

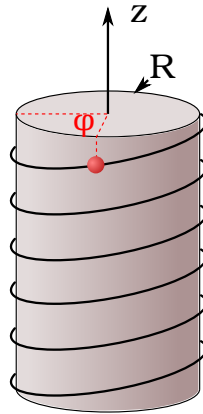
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{e}_x b \sin(\omega t) + \mathbf{e}_y b \cos(\omega t) + \mathbf{e}_z ct^2$$

Henger-koordinátarendszert használva mutassuk meg, hogy a lepke gyorsulásának nagysága időben állandó, ha tudjuk, hogy a b , c , ω paraméterek sem függenek az időtől!

4. Egy tömegpont egy R sugarú hengerre felcsévelt egyenletes C menetemelkedésű spirális pályán mozog, melyet hengerkoordinátarendszerben az alábbi két egyenlet definiál:

$$\rho \equiv R, \quad z(\varphi) = C \varphi.$$

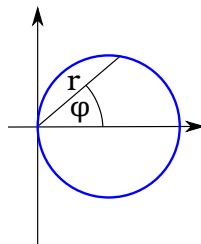
Egy tömegpont ezen a pályán mozog $\dot{\varphi} = \omega_0$ szögsebességgel úgy, hogy a $t = 0$ időpontban a $\varphi = 0$ -val jellemzett pontból indul.



- Írja fel a tömegpont mozgását leíró $\rho(t)$, $\varphi(t)$ és $z(t)$ függvényeket!
- Adja meg a tömegpont $\dot{\mathbf{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ bázisban kifejtve!
- Adja meg a tömegpont $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ bázisban kifejtve!
- Egy adott t időpillanatban meghatározott sebesség- és gyorsulásvektor segítségével fejezze ki a pálya görbületi sugarát!

2. Gyakorló feladatok

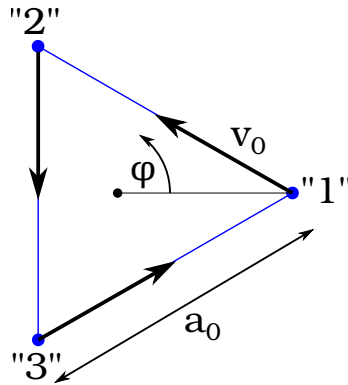
- Gy1. Egy tömegpont v_0 sebességű egyenletes körmozgást végez egy R sugarú körpályán. A mozgást $\{r, \varphi\}$ síkbeli polárkoordinátarendszerben írjuk le, azonban az origó nem a körpálya középpontja, hanem az egyik kerületi pont (lásd ábra). A tömegpont az origótól legtávolabbi ($\varphi = 0$) pontból indul a $t = 0$ időpontban.



- Adja meg a körpálya $r(\varphi)$ polárkoordinátás pályaequációját!

- (b) Feltéve hogy ismeri a $\varphi(t)$ időfüggvényt, írja fel ennek segítségével (a pályaegyenletet is kihasználva) a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!
- (c) Annak ismeretében, hogy a sebesség állandó v_0 nagyságú, adja meg a tényleges $\varphi(t)$ függvényt!
- (d) Adja meg az előző feladatban meghatározott $\varphi(t)$ függvényt felhasználva a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát! az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!
- (e) Adja meg a tömegpont $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!
- (f) Mutassa meg, hogy a gyorsulásvektor minden időpontban merőleges a sebességvektorra!

Gy2. **Beadható.** Három hangya van egy asztalon, éppen egy szabályos háromszög csúcsaiban állnak. A háromszög oldalhossza kezdetben a_0 . A hangyák a következőképp kezdenek mozogni: az „1”-es hangya mindig pontosan a „2”-es hangya irányába mozog v_0 sebességgel. Hasonlóan a „2”-es mindig a „3”-as irányába v_0 sebességgel, és a „3”-as pedig az „1”-es irányába, szintén v_0 sebességgel. Az origó legyen a háromszög szimmetria-középpontja, az „1”-es hangya kezdeti ($t = 0$) helyzete jelöli ki a $\varphi = 0$ irányt. Kövessük az „1”-es hangya mozgását! A feladat szimmetriájából könnyen meggyőzhetjük magunkat, hogy a három hangya minden pillanatban egy szabályos háromszög csúcsaiban fog elhelyezkedni.



- (a) Adja meg az „1”-es hangya $\dot{\vec{r}}$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!
- (b) A sebességvektor komponenseinek ismeretében adja meg a $\dot{r}(t)$ és $\dot{\varphi}(t)$ deriváltakat, amikor a hangya épp r távolságra van az origótól!
- (c) A kezdeti feltétel (a_0 oldalhossz) ismeretében adja meg a hangy $r(t)$ függvényét!
- (d) A $\dot{\varphi}(t)$ függvény integrálásával adja meg a $\varphi(t)$ függvényt!
- (e) Mennyi idő alatt érnek a hangyák az origóba?
- (f) Mekkora utat tesznek meg eddig?
- (g) Hányszor kerülnek meg az origót?