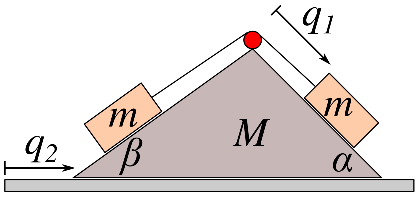
1. kis-ZH feladatok

1. Egy M tömegű kétoldalú, egyik oldalán α másik oldalán β dőlésszögű súrlódásmentes lejtő a vízszintes talajon súrlódásmentesen mozoghat. A lejtő tetején elhelyezett könnyű csigán átvetettünk egy nyújthatatlan fonalat, aminek két végét egy-egy m tömegű téglához kötöttük. Legyenek az általános koordinátáink a jobboldali tégla csigától mért q_1 távolsága, és a lejtő vízszintes q_2 helyzete.



   (a) Írja fel a rendszer helyzeti energiáját a q_1 és q_2 függvényében!

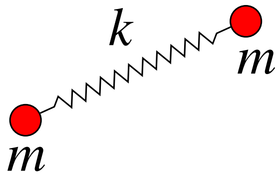
   (b) Írja fel a rendszer mozgási energiáját $\dot{q}_1$ és $\dot{q}_2$ függvényében!

   (c) Az előző két feladat alapján adja meg a rendszer $L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ Lagrange-függvényét, és vezesse le belőle a rendszer mozgásegyenleteit!

   (d) Határozza meg a q_1-hez és q_2-höz tartozó általánosított impulzusok definícióját a Lagrange-függvényből.

   (e) A kezdeti pillanatban a rendszert a $q_1 = 0$ és $q_2 = 0$ helyzetből indítottuk, $\dot{q}_1 = 0$ és $\dot{q}_2 = v_0$ kezdősebességekkel. Adja meg a $q_1(t)$ és $q_2(t)$ függvényeket!

2. Két m tömegű tömegpontot elhanyagolható nyugalmi hosszúságú, k rugóállandójú gumiszállal kötöttünk össze. A két tömegpont a vízszintes $x - y$ síkon mozoghat súrlódásmentesen. A rendszer helyzetét leíró általános koordináták legyenek a tömegközéppont X és Y koordinátái, valamint az egyik tömegpontból a másikba mutató $\vec{r}$ vektor x és y koordinátái.



   (a) Írja fel a rugalmas (helyzeti) energia kifejezését x és y segítségével!

   (b) Írja fel a rendszer mozgási energiáját $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{X}$ és $\dot{Y}$ segítségével.

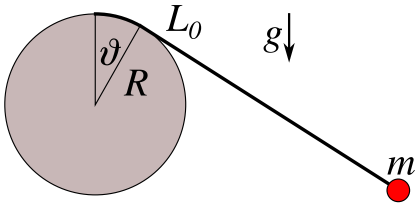
   (c) Az előző feladatok eredményeit felhasználva írja fel a rendszer Lagrange-függvényét, és vezesse le belőle a mozgásegyenleteket!

   (d) Mutassa meg, hogy az X-hez és Y-hoz tartozó általánosított impulzusok megmaradó mennyiségek!

   (e) Adja meg az x-re és y-ra vonatkozó egyenletek általános megoldását! „Hogyan mozog” a rendszer?

2. Gyakorló feladatok

Gy1. **Beadható.** Egy R sugarú henger felső pontjához egy összesen L_0 hosszúságú könnyű kötelet rögzítettünk. A kötél másik végére egy m tömegű kicsiny testet kötöttünk. A testre a kötélen kívül hat a külső gravitációs erőtér is. A rendszer mozgását vizsgáljuk abban az esetben, amíg a kötél feszes marad, és mindig van a hengerre rásimuló szakasza. A rendszer helyzetét a hengerre simuló kötél által letakart ϑ szöggel jellemezzük.



(a) Adja meg a rendszer helyzeti energiáját ϑ függvényében!

(b) Adja meg a rendszer mozgási energiáját ϑ és $\dot{\vartheta}$ függvényében!

(c) Adja meg a rendszer Lagrange-függvényét, és vezesse le a mozgásegyenletet!

(d) Fejezze ki a ϑ-hoz tartozó általánosított impulzust!

(e) (EXTRA, gyakorlásra!) A rendszer egyensúlyi helyzete az, amikor a kötél függőlegesen lóg lefelé ($\vartheta = \pi/2$). Fejtse sorba a Lagrange-függvényt ezen helyzet körül a ϑ és $\dot{\vartheta}$ szerint másodrendig, és adja meg a kis rezgések frekvenciáit.

Gy2. **(Nehéz feladat)** Tekintsük a szimmetrikus pörgettyű problémáját. (Lásd 7. gyak 3. feladat) A pörgettyű helyzetét a következőképpen írjuk le: a tengely helyzetét a szokásos gömbi ϑ-φ koordinátákkal írjuk le, míg a tengely körüli elfordulását az α szöggel. Mivel a pörgettyű szimmetrikus, ezért a tengelye főtengely, erre a tengelyre a tehetetlenségi nyomatéka $\theta_{\parallel}$, ahogy a rá merőleges tengelyek is főtengelyek $\theta_{\perp}$ tehetetlenségi nyomatékkal. (Tegyük fel, hogy ezek az adatok a pörgettyű felfüggesztési pontjára, mint origóra vannak megadva.)

(a) Írjuk fel a pörgettyű helyzeti energiáját a ϑ, φ és α függvényében!

(b) Írjuk fel a pörgettyű forgási energiáját!

(c) Írjuk fel a Lagrange-függvényt és a Lagrange egyenleteket!

(d) Vizsgáljuk azt a határesetet, amikor $\dot{\alpha}$ nagyon nagy, azaz nagyon megpörgettük a pörgettyűt. Mutassuk meg, hogy ekkor precesszál a rendszer!