1. Tekintsünk egy pontszerű testet, ami egy R sugarú körpálya mentén mozoghat. Szeretnénk a feladathoz leginkább illeszkedő koordinátarendszerben számolni, ezért síkbeli polárkoordinátákat használunk úgy, hogy az origót a körpálya középpontjába helyezzük. A test helyzetét ezután az $r(t)$ és $\varphi(t)$ függvények segítségével írjuk le.

   (a) Lássuk be, hogy a választott koordinátarendszerben $r(t) = const.$!

   (b) Írjuk fel a tömegpont $\vec{r}(t)$ helyvektorát az $r(t)$, $\varphi(t)$ függvények segítségével, a (polár)koordináta-vonalak irányába mutató $\vec{e}_r$ és $\vec{e}_\varphi$ egységvektorok bázisában felírva.

   (c) Határozzuk meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve! Vigyázzunk, a bázisvektorok helyről helyre változnak, ezért meg kell határoznunk az $\dot{\vec{e}}_r$ és $\dot{\vec{e}}_\varphi$ vektorokat is!

   (d) Határozzuk meg a tömegpont $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát is az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!

---

2. Egy pontszerű test a síkon a következő síkbeli polárkoordinátákkal megadott pályán mozog,

$$r(\varphi) = k\,\varphi\ ,$$

   ahol k egy konstans. Először tekintsünk egy olyan mozgást, amikor a tömegpont szögsebessége időben állandó, $\dot{\varphi}(t) = \omega_0$. A test a $t = 0$ időpillanatban az origóból indul.

   (a) Rajzoljuk fel a tömegpont pályáját!

   (b) Feltéve, hogy ismerjük az $r(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeket, segítségükkel írjuk fel a tömegpont $\vec{r}(t)$ helyvektorának és $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorának általános alakját az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!

   (c) A pályaegyenletet kihasználva, valamint ω_0 ismeretében fejezzük ki a tömegpont sebességének $|\dot{\vec{r}}(t)|$ nagyságát!

   (d) Adjuk meg a tömegpont sebesség- és gyorsulásvektorát az idő függvényében!

   (e) Adjuk meg a tömegpont gyorsulásvektorának sebességre merőleges komponensét az idő függvényében! Határozzuk meg a pálya görbületi sugarát abban a pontjában, ahol a test a t-vel jelölt időpillanatban van.

   (f) Az előző részfeladatot általánosítva, fejezzük ki általánosan egy tömegpont pályájának görbületi sugarát a $\dot{\vec{r}}$ sebesség- és $\ddot{\vec{r}}$ gyorsulásvektor függvényében!

   (g) Láthatóan az előbb vizsgált mozgás során a tömegpont sebessége időben növekszik. Most tekintsen egy tömegpontot, ami ugyanezen a pályán mozog, de sebességének nagysága $v_0 = const.$. Adjuk meg ekkor a mozgást leíró $r(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeket!

---

3. Háromdimenziós mozgások vizsgálata során gyakran hasznos az $\{r, \vartheta, \varphi\}$ ún. gömbi koordinátarendszer használata. A vektormennyiségeket ekkor a síkbeli polárkoordinátarendszerhez hasonlóan a koordinátavonalakat (lokálisan) érintő $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ egységvektorok bázisán érdemes kifejteni.

   (a) Adjuk meg az (r, ϑ, φ) koordinátájú ponthoz tartozó $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ lokális bázisvektorokat a derékszögű Déscartes koordinátarendszer $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ bázisvektorain kifejtve!

(b) Tegyük fel, hogy egy tömegpont mozgása során éppen áthalad az (r, ϑ, φ) koordinátájú ponton. Ebben a pillanatban ismertek a $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$ és $\dot{\varphi}$ időderiváltak. Ezek ismeretében adjuk meg a lokális bázisvektorok $\{\dot{\vec{e}}_r, \dot{\vec{e}}_\vartheta, \dot{\vec{e}}_\varphi\}$ időderiváltjait, az $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ Déscartes-bázisban kifejtve.

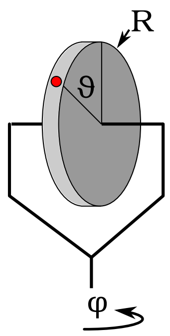
(c) Adjuk meg az előző alfeladatban kapott $\{\dot{\vec{e}}_r, \dot{\vec{e}}_\vartheta, \dot{\vec{e}}_\varphi\}$ időderiváltakat a lokális $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve is!

(d) Az előző alfeladatok eredményeinek segítségével adjuk meg egy tömegpont $\{r(t), \vartheta(t), \varphi(t)\}$ gömbi koordinátákkal megadott mozgása esetén tömegpont $\vec{r}(t)$ hely-, $\dot{\vec{r}}(t)$ sebesség- és $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!

---

4. Egy R sugarú lendkerék az ábrán látható módon ún. kardán-felfüggesztéssel van ellátva. A lendkerék elfordulását a ϑ szöggel, a kardántengely elfordulását pedig a φ szöggel mérjük. A lendkerék kerületén egy kicsiny pontszerű testet (pl. csavart) rögzítettünk, ennek mozgását vizsgáljuk. A rendszert úgy mozgatjuk, hogy a kardántengely $\dot{\varphi}$ és a lendkerék $\dot{\vartheta}$ forgási sebessége egyaránt konstans, azaz a tömegpont mozgása:

$$r(t) = R \,, \quad \varphi(t) = \Omega\, t \,, \quad \vartheta(t) = \omega\, t$$



(a) Adjuk meg a tömegpont sebességvektorát az idő függvényében, az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

(b) Adjuk meg a tömegpont sebességének nagyságát az idő függvényében!

(c) Mekkora a tömegpont maximális sebessége? Hol helyezkedik-el a pályáján, amikor a sebesség maximális?

(d) Adjuk meg a tömegpont gyorsulásvektorát az idő függvényében, az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

---

5. Háromdimenziós mozgások leírásakor a Déscartes és gömbi koordinátarendszerek mellett a harmadik gyakran használt koordinátarendszer az ún. hengerkoordinátarendszer, $\{\rho, \varphi, z\}$. Vizsgáljuk egy tömegpont mozgását ebben a koordinátarendszerben! Mozogjon a tömegpont egy kúppalástra feltekert spirális pályán,

$$\rho(t) = A\, t \,, \quad \varphi(t) = B\, t \,, \quad z(t) = C\, t$$

(a) Vázoljuk a részecske pályáját!

(b) A korábbi feladatokhoz hasonlóan adjuk meg a tömegpont sebesség- és gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ bázisban!

(c) Határozzuk meg a pálya görbületi sugarát azon pontjában, ahol a t időpillanatban halad át!