

1. kis-ZH feladatok

1. Feladat

- a) Határozzuk meg az alábbi homogén differenciálegyenlet általános megoldásait!

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

- b) Határozzuk meg a fenti differenciálegyenlet megoldását a következő határfeltételek mellett:
 $y(0) = 1, y'(0) = 2.$
- c) Határozzuk meg az

$$y'' + \omega^2 y = e^{-\alpha t}$$

inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását!

- d) Határozzuk meg a fenti differenciálegyenlet megoldását a $y(0) = 1, y'(0) = 1$ kezdőfeltételek mellett!

2. Feladat

- a) Határozzuk meg az alábbi homogén differenciálegyenlet általános megoldását!

$$\ddot{x}(t) + 10a\dot{x}(t) + 9a^2x(t) = 0 \quad (1)$$

- b) Határozzuk meg a fenti egyenlet speciális megoldását az $x(0)=1, \dot{x}(0)=0.$
- c) Keressünk egy partikuláris megoldást az alábbi inhomogén differenciálegyenletre!

$$\ddot{x}(t) + 10a\dot{x}(t) + 9a^2x(t) = At \quad (2)$$

2. Gyakorló feladatok

1. Micimackó mézesüvegébe egy méhecske szorult, aki belesüllyedt a mézbe. Amikor Micimackó a kredencből előveszi az üveget, úgy találja, hogy a méhecske a mézbe teljesen elsüllyedve lebeg. Micimackó kísérletezni kezd a méhecskével, amiből kiderül számára, hogy a méhecske elektromosan töltött, töltése q . A méhecske tömege m , sűrűsége a mézével egyező (hiszen lebeg benne). Micimackó ezután a következő kísérletet végzi: egy igen nagy síkkondenzátor lemezei közé helyezi



az üveget. A kondenzátor lapjait egy nagy ellenálláson keresztül összeköti. A $t = 0$ időpillanatban a kondenzátort hirtelen feltölti, majd hagyja kisülni az ellenálláson keresztül, ezért a mézesüvegben időben exponenciálisan csökkenő, homogén elektromos tér alakul ki, aminek iránya jelöli ki az x tengelyt,

$$E(t) = \Theta(t) E_0 e^{-t/\tau},$$

ahol a $\Theta(t)$ egységugrás függvényvel jeleztük, hogy $t < 0$ esetén a térerősség zérus. A mézben a $qE(t)$ elektromos erőn kívül a méhecskére hat egy $F_{cs} = -k\dot{x}$ fékezőerő is. A méhecske a $t = 0$ időpillanatban állt. Írja le a méhecske mozgását!

- (a) Írja fel a méhecske sebességére (\dot{x} -ra) vonatkozó mozgásegyenletet! Láthatóan ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet.
- (b) Először tegye fel, hogy nincs külső elektromos tér, azaz tekintse a homogén egyenletet. Adja meg az egyenlet Green-függvényét!
- (c) Most tekintse a korábban felírt exponenciálisan lecsengő külső elektromos teret. A Green-függvény segítségével adja meg a méhecske $\dot{x}(t)$ sebesség-idő függvényét ebben az esetben!
- (d) Mekkora mértékben mért Micimackó a méhecske teljes Δx elmozdulását a kísérlet végén?

2. Egy részecskét olyan közegbe lövünk, ahol rá a sebességének négyzetével arányos $F_{cs} = -k\dot{x}^2$ fékezőerő hat. A részecske tömege m , és a $t = 0$ időpillanatban v_0 sebességgel indul az $x = 0$ pontból. Írja le a részecske mozgását!

- (a) Írja fel a részecske Newton-féle mozgásegyenletét!
- (b) A kezdeti feltételeket figyelembe véve adja meg a részecske $\dot{x}(t)$ sebesség-idő függvényét! Rajzolja fel a függvényt!
- (c) A sebesség-idő függvény integrálásával, a kezdeti feltételek ismeretében adja meg a részecske $x(t)$ hely-idő függvényét! Rajzolja fel!
- (d) Mekkora utat tesz meg a részecske, ameddig megáll?

3. A Csillagok háborúja világában az űrben az űrhajóknak folyamatosan gyorsítaniuk kell, különben valami láthatatlan sűrűdés miatt megállnak. A lassulás láthatóan a sebességgel arányos. Vizsgáljuk meg ezt a dinamikát leíró Newton-egyenletet!

- a) Határozzuk meg először az alábbi homogén differenciálegyenletet általános megoldását!

$$y''(t) + \lambda y'(t) = 0 \quad (3)$$

Adjuk meg a speciális megoldást a $y(0)=1/2$ és $y'(0)=\lambda/2$ peremfeltételekkel!

- b) A kezdeti alapteljesítményről Csubi fokozatosan növeli az éppen működő hajtómű teljesítményét. Miként módosul az Ezeréves Súlyom dinamikája?

Keressünk egy partikuláris megoldást az alábbi inhomogén differenciálegyenletre!

$$y''(t) + \lambda y'(t) = at + 1 \quad (4)$$

Adjuk meg a speciális megoldását a $y(0)=0$ és $y'(0)=\lambda$ peremfeltételekkel!

- c) Han bekapcsolja a hiperhajtóművet, ami parsze, elég gyorsan leáll. Mennyit haladtak, ha a hajtóművet $t = 0$ -ban kacsolta be és $\exp(-bt)$ függvény szerint tűnt el a teljesítmény?

Határozzuk meg a partikuláris $y(t)$ válaszfüggvényt az alábbi gerjesztésre:

$$y''(t) + \lambda y'(t) = A\theta(t)e^{-bt} \quad (5)$$

- d) R2D2-nek sikerül megszerelni a hiperhajtóművet, ami a bekapcsolás után 4 másodperccel indul be (miután Han jól odacsap a mennyezetre) és két másodpercig működik. Mi lesz az Ezeréves Súlyom pályája?

Határozzuk meg Green-függvény segítségével a válaszfüggvényt, ha a (3) egyenlet által leírt rendszert az alábbi egyenlet $f_2(t)$ függvénye gerjeszti!

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 4 < t < 6 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (6)$$