

## 1. kis-ZH feladatok

1. Egy tömegpont egydimenziós mozgást végez az alábbi potenciálban:

$$V(x) = -Ax + Bx^3,$$

ahol  $A > 0$  és  $B > 0$  pozitív konstansok. Vizsgálja a tömegpont mozgását!

- Vázolja a  $V(x)$  potenciált!
- Keresse meg a potenciálfüggvény lokális minimumait.
- Adja meg a potenciálfüggvény minimumai körüli kicsiny rezgések rezgési frekvenciáit.
- Rajzolja fel a hely és impulzus által meghatározott  $\{x, p_x\}$  síkra az adott  $E$  energiájú mozgások által meghatározott trajektóriákat!
- Színessel, vagy vastag vonallal emeljen ki a trajektóriák közül egy kötött rezgést leíró trajektóriát!

2. Egy tömegpont egydimenziós mozgást végez az alábbi potenciálban:

$$V(x) = A \sin(\lambda x) + cx,$$

ahol  $A > 0$ ,  $\lambda > 0$  és  $c > 0$  pozitív konstansok. Vizsgálja a tömegpont mozgását!

- Vázolja a  $V(x)$  potenciált!
- Keresse meg a potenciálfüggvény lokális minimumait! Milyen paraméterek mellett vannak lokális minimumok?
- Adja meg a potenciálfüggvény minimumai körüli kicsiny rezgések rezgési frekvenciáit!

## 2. Gyakorló feladatok

Gy1. Tekintsen egy matematikai ingát, melynek kitérése akár nagy is lehet. Az ingatest tömege  $m$ , hossza  $L$ , a gravitációs gyorsulás nagysága  $g$ . Az inga helyzetét a stabilis egyensúlyi helyzetétől mért  $\varphi$  szögkitéréssel mérjük, a gravitációs helyzeti energia 0-szintjét pedig úgy vettük fel, hogy az egyensúlyi helyzetben éppen zérus legyen. Az ingát kötél helyett egy könnyű, de merev rúd segítségével készítettük el, így mozgása során nem kell attól tartanunk, hogy a kötél meglazul.

- Írja fel az inga  $V(\varphi)$  helyzeti energiáját a kitérés függvényében!
- Írja fel az inga  $\varphi(t)$ -re vonatkozó mozgásegyenletét!
- Adja meg az inga teljes (mozgási + helyzeti) energiájának kifejezését, mint  $\varphi$  és  $\dot{\varphi}$  függvényét!
- Mekkora  $E_0$  minimális energia szükséges ahhoz, hogy az inga átforduljon a felső holtpontján?
- Vázolja a  $\{\varphi, \dot{\varphi}\}$  síkon az inga különböző  $E$  energiákhoz tartozó mozgásai által meghatározott trajektóriákat. Hogyan néznek ki ezek  $E < E_0$  és  $E > E_0$  esetén?
- Most tekintse az  $E < E_0$  esetet, azaz amikor nem fordul át az inga. Írja fel a kialakuló rezgés (lengés) periódusidejét meghatározó integrált!
- Az alábbi ún. elsőfajú elliptikus integrál kifejezését számítógéppel meghatároztuk tetszőleges  $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$  esetén:

$$I(\varphi_0) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)}}$$

Alakítsa át úgy a periódusidőt meghatározó integrált úgy, hogy ez az integrál jelenjen meg benne, ahol esetünkben  $\varphi_0$  az inga maximális kitérését jelöli.