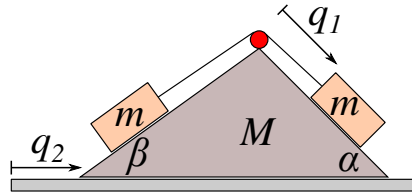
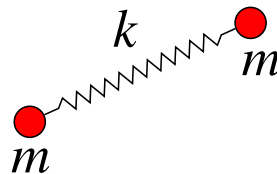


## 1. kis-ZH feladatok

1. Egy  $M$  tömegű kétoldalú, egyik oldalán  $\alpha$  másik oldalán  $\beta$  dőlésszögű súrlódásmentes lejtő a vízszintes talajon súrlódásmentesen mozoghat. A lejtő tetején elhelyezett könnyű csigán átvettünk egy nyújthatatlan fonalat, aminek két végét egy-egy  $m$  tömegű téglához kötöttük. Legyenek az általános koordinátáink a jobboldali téglacsigától mért  $q_1$  távolsága, és a lejtő vízszintes  $q_2$  helyzete.



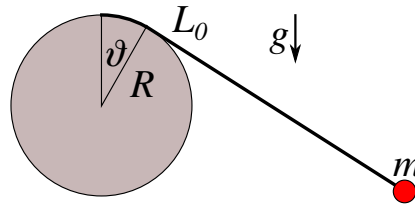
- Írja fel a rendszer helyzeti energiáját a  $q_1$  és  $q_2$  függvényében!
  - Írja fel a rendszer mozgási energiáját  $\dot{q}_1$  és  $\dot{q}_2$  függvényében!
  - Az előző két feladat alapján adja meg a rendszer  $L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$  Lagrange-függvényét, és vezesse le belőle a rendszer mozgásegyenleteit!
  - Határozza meg a  $q_1$ -hez és  $q_2$ -hez tartozó általánosított impulzusok definícióját a Lagrange-függvényből.
  - A kezdeti pillanatban a rendszert a  $q_1 = 0$  és  $q_2 = 0$  helyzetből indítottuk,  $\dot{q}_1 = 0$  és  $\dot{q}_2 = v_0$  kezdősebességekkel. Adja meg a  $q_1(t)$  és  $q_2(t)$  függvényeket!
2. Két  $m$  tömegű tömegpontot elhanyagolható nyugalmi hosszúságú,  $k$  rugóállandójú gumiszállal kötöttünk össze. A két tömegpont a vízszintes  $x-y$  síkon mozoghat súrlódásmentesen. A rendszer helyzetét leíró általános koordináták legyenek a tömegközéppont  $X$  és  $Y$  koordinátái, valamint az egyik tömegpontból a másikba mutató  $\vec{r}$  vektor  $x$  és  $y$  koordinátái.



- Írja fel a rugalmas (helyzeti) energia kifejezését  $x$  és  $y$  segítségével!
- Írja fel a rendszer mozgási energiáját  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{X}$  és  $\dot{Y}$  segítségével.
- Az előző feladatok eredményeit felhasználva írja fel a rendszer Lagrange-függvényét, és vezesse le belőle a mozgásegyenleteket!
- Mutassa meg, hogy az  $X$ -hez és  $Y$ -hoz tartozó általánosított impulzusok megmaradó mennyiségek!
- Adja meg az  $x$ -re és  $y$ -ra vonatkozó egyenletek általános megoldását! „Hogyan mozog” a rendszer?

## 2. Gyakorló feladatok

- Gy1. Egy  $R$  sugarú henger felső pontjához egy összesen  $L_0$  hosszúságú könnyű kötelet rögzítettünk. A kötel másik végére egy  $m$  tömegű kicsiny testet kötöttünk. A testre a kötélen kívül hat a külső gravitációs erőter is. A rendszer mozgását vizsgáljuk abban az esetben, amíg a kötel feszes marad, és mindig van a hengerre rásimuló szakasza. A rendszer helyzetét a hengerre simuló kötel által letakart  $\vartheta$  szöggel jellemezzük.



- Adja meg a rendszer helyzeti energiáját  $\vartheta$  függvényében!
- Adja meg a rendszer mozgási energiáját  $\vartheta$  és  $\dot{\vartheta}$  függvényében!
- Adja meg a rendszer Lagrange-függvényét, és vezesse le a mozgásegyenletet!
- Fejezze ki a  $\vartheta$ -hoz tartozó általánosított impulzust!
- (EXTRA, gyakorlásra!) A rendszer egyensúlyi helyzete az, amikor a kötélfüggőlegesen lóg lefelé ( $\vartheta = \pi/2$ ). Fejtse sorba a Lagrange-függvényt ezen helyzet körül a  $\vartheta$  és  $\dot{\vartheta}$  szerint másodrendig, és adja meg a kis rezgések frekvenciáit.

Gy2. (**Nehéz feladat**) Tekintsük a szimmetrikus pörgettyű problémáját. (Lásd 7. gyak 3. feladat) A pörgettyű helyzetét a következőképpen írjuk le: a tengely helyzetét a szokásos gömbi  $\vartheta$ - $\varphi$  koordinátákkal írjuk le, míg a tengely körüli elfordulását az  $\alpha$  szöggel. Mivel a pörgettyű szimmetrikus, ezért a tengelye fő tengely, erre a tengelyre a tehetetlenségi nyomatéka  $\theta_{\parallel}$ , ahogy a rá merőleges tengelyek is fő tengelyek  $\theta_{\perp}$  tehetetlenségi nyomatékkal. (Tegyük fel, hogy ezek az adatok a pörgettyű felfüggesztési pontjára, mint origóra vannak megadva.)

- Írjuk fel a pörgettyű helyzeti energiáját a  $\vartheta$ ,  $\varphi$  és  $\alpha$  függvényében!
- Írjuk fel a pörgettyű forgási energiáját!
- Írjuk fel a Lagrange-függvényt és a Lagrange egyenleteket!
- Vizsgáljuk azt a határesetet, amikor  $\dot{\alpha}$  nagyon nagy, azaz nagyon megpörgettük a pörgettyűt. Mutassuk meg, hogy ekkor precesszál a rendszer!