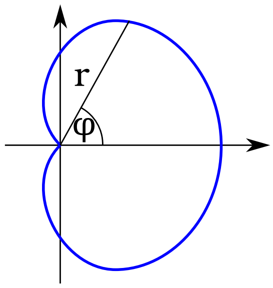
1. kis-ZH feladatok

1. Egy tömegpont ún. „kardioid" (szív alakú) pályán mozog a síkon, melynek polárkoordinátás egyenlete a következő:

$$r(\varphi) = R(1 + \cos\varphi)\ ,$$

ahol R egy konstans. A tömegpont $\dot{\varphi} = \omega_0$ állandó szögsebességgel halad a pályán úgy, hogy a $t = 0$ időpillanatban a $\varphi = 0$-val jellemzett pontból indul.



   (a) A pályaegyenlet figyelembevételével írja fel a részecske mozgását leíró $r(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeket.

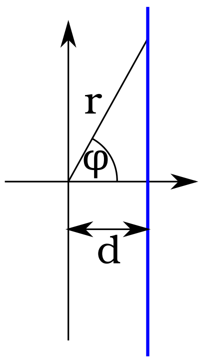
   (b) Adja meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

   (c) Adja meg a tömegpont sebességének $|\dot{\vec{r}}(t)|$ nagyságát!

   (d) Adja meg a tömegpont $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

---

2. Egy tömegpont egyenletes v_0 sebességű, egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az origótól d távolságra elhaladó egyenes mentén. A mozgást síkbeli polárkoordinátarendszerrel írjuk le, melynek $\varphi = 0$ irányát úgy választottuk meg, hogy az egyenes pálya origóhoz legközelebbi pontja ebbe az irányba essen. A tömegpont a $t = 0$ időpontban éppen ezen legközelebbi pontban tartózkodik.



   (a) Írja fel az egyenes pálya $r(\varphi)$ polárkoordinátás egyenletét!

   (b) Feltéve, hogy ismeri a $\varphi(t)$ függvényt, írja fel a segítségével (a pályaegyenletet is kihasználva) a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

   (c) Annak ismeretében, hogy a sebesség állandó v_0 nagyságú, adja meg a tényleges $\varphi(t)$ függvényt!

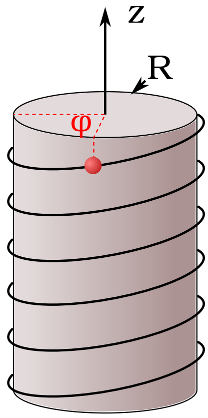
   (d) Az előző alfeladatban meghatározott $\varphi(t)$ függvény segítségével adja meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

---

3. Egy tömegpont egy R sugarú hengerre felcsévélt egyenletes C menetemelkedésű spirális pályán mozog, melyet hengerkoordinátarendszerben az alábbi két egyenlet definiál:

$$\rho \equiv R\,, \quad z(\varphi) = C\,\varphi\,.$$

Egy tömegpont ezen a pályán mozog $\dot{\varphi} = \omega_0$ szögsebességgel úgy, hogy a $t = 0$ időpontban a $\varphi = 0$-val jellemzett pontból indul.



(a) Írja fel a tömegpont mozgását leíró $\rho(t)$, $\varphi(t)$ és $z(t)$ függvényeket!

(b) Adja meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ bázisban kifejtve!

(c) Adja meg a tömegpont $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ bázisban kifejtve!

(d) Egy adott t időpillanatban meghatározott sebesség- és gyorsulásvektor segítségével fejezze ki a pálya görbületi sugarát!

---

4. Egy lepke az alábbi helicális pályán halad egy petróleum lámpa felé:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{e}_x b\sin(\omega t) + \mathbf{e}_y b\cos(\omega t) + \mathbf{e}_z c t^2$$

Henger-koordinátarendszert használva mutassuk meg, hogy a lepke gyorsulásának nagysága időben állandó, ha tudjuk, hogy a b, c, ω paraméterek sem függenek az időtől!

---

5. Dolgozzunk kétdimenziós parabolikus koordinátarendszerben:

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$
$$y = uv$$

Határozzuk meg az $\mathbf{e}_u$ és $\mathbf{e}_v$ egységvektorokat, illetve ezek időderiváltjait!

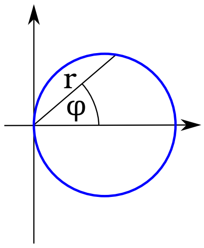
---

6. Egy molylepke állandó sebességgel síkban repül, miközben állandóan α szöget tart a fénysugár és a sebességvektora között. A fényforrás a lepke pályája egy síkban vannak. írja le a lepke pályáját polár koordináta rendszerben.

---

2. Gyakorló feladatok

Gy1. Egy tömegpont v_0 sebességű egyenletes körmozgást végez egy R sugarú körpályán. A mozgást $\{r, \varphi\}$ síkbeli polárkoordinátarendszerben írjuk le, azonban az origó nem a körpálya középpontja, hanem az egyik kerületi pont(lásd ábra). A tömegpont az origótól legtávolabbi ($\varphi = 0$) pontból indul a $t = 0$ időpontban.



(a) Adja meg a körpálya $r(\varphi)$ polárkoordinátás pályaegyenletét!

(b) Feltéve hogy ismeri a $\varphi(t)$ időfüggvényt, írja fel ennek segítségével (a pályaegyenletet is kihasználva) a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!

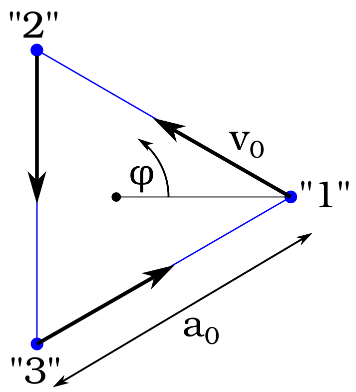
(c) Annak ismeretében, hogy a sebesség állandó v_0 nagyságú, adja meg a tényleges $\varphi(t)$ függvényt!

(d) Adja meg az előző feladatban meghatározott $\varphi(t)$ függvényt velhasználva a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát! az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!

(e) Adja meg a tömegpont $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!

(f) Mutassa meg, hogy a gyorsulásvektor minden időpontban merőleges a sebességvektorra!

Gy2. Három hangya van egy asztalon, éppen egy szabályos háromszög csúcsaiban állnak. A háromszög oldalhossza kezdetben a_0. A hangyák a következőképp kezdenek mozogni: az „1”-es hangya mindig pontosan a „2”-es hangya irányába mozog v_0 sebességgel. Hasonlóan a „2”-es mindig a „3”-as irányába v_0 sebességgel, és a „3”-as pedig az „1”-es irányába, szintén v_0 sebességgel. Az origó legyen a háromszög szimmetria-középpontja, az „1”-es hangya kezdeti ($t = 0$) helyzete jelöli ki a $\varphi = 0$ irányt. Kövessük az „1”-es hangya mozgását! A feladat szimmetriájából könnyen meggyőzhetjük magunkat, hogy a három hangya minden pillanatban egy szabályos háromszög csúcsaiban fog elhelyezkedni.



(a) Adja meg az „1”-es hangya $\dot{\vec{r}}$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

(b) A sebességvektor komponenseinek ismeretében adja meg a $\dot{r}(t)$ és $\dot{\varphi}(t)$ deriváltakat, amikor a hangya épp r távolságra van az origótól!

(c) A kezdeti feltétel (a_0 oldalhossz) ismeretében adja meg a hangy $r(t)$ függvényét!

(d) A $\dot{\varphi}(t)$ függvény integrálásával adja meg a $\varphi(t)$ függvényt!

(e) Mennyi idő alatt érnek a hangyák az origóba?

(f) Mekkora utat tesznek meg eddig?

(g) Hányszor kerülik meg az origót?