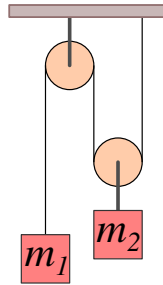
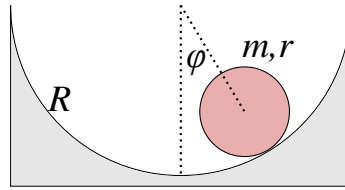


1. Tekintse az ábrán látható két-csigás elrendezést!



- (a) Jellemezzük a rendszert az m_1 tömegű test (függőleges) y helyzetével. Írjuk fel a Lagrange-függvényt!
- (b) Adjuk meg az y -hoz tartozó általánosított impulzust!
- (c) Írjuk fel a rendszer Lagrange-féle mozgásegyenletét!
- (d) Oldjuk meg a mozgásegyenletet az $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ kezdeti feltételek esetén!
- (e) A Lagrange-függvényből kiindulva adjuk meg a rendszer teljes energiáját, és mutassuk meg, hogy ez megmaradó mennyiség!
-
2. Egy m tömegű bolygó a $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ centrális gravitációs potenciálban mozog. Korábban megmutattuk, hogy centrális erőterben a mozgás egy síkon történik, ezért elegendő két dimenzióban tekintenünk a problémát.
- (a) Írjuk fel a bolygó Lagrange-függvényét síkbeli polárkoordinátákat használva!
- (b) Adjuk meg a φ -hez tartozó általánosított impulzust!
- (c) Mutassuk meg, hogy a φ -hez tartozó általánosított impulzus megmaradó mennyiség. Milyen jól ismert megmaradási törvény ez?
- (d) Írjuk fel a rendszer Lagrange-féle mozgásegyenleteit!
- (e) Keressünk körpályát ($r(t) \equiv R$) megoldásokat! Hogy függ a keringési idő R -tól?
-
3. Az előző feladatban vizsgált bolygó keringése valójában kéttest probléma. Legyen adott egy M tömegű bolygó és az ő m tömegű holdja. A köztük lévő kölcsönhatási potenciál $V(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$. Az előző feladathoz hasonlóan, az általánosság megszorítása nélkül, elegendő két dimenzióban dolgoznunk.
- (a) Írjuk fel a két testből álló rendszer Lagrange-függvényét. Általános koordinátáknak válasszuk a tömegközéppont X és Y koordinátáját, ill. a bolygó centrumából a hold centrumába mutató \vec{r} vektor r hosszát, és az x -tengellyel bezárt φ szögét!
- (b) Mutassuk meg, hogy a tömegközéppont helyzetéhez tartozó általánosított impulzus megmaradó mennyiség!
- (c) Írjuk fel r és φ mozgásegyenletét! Mutassuk meg, hogy ez ugyanolyan alakú, mint egyetlen tömegpont mozgásegyenlete centrális potenciálban, csupán más „tömeget” kell használni!
- (d) Keressünk olyan megoldásokat, amikor a mind a bolygó, mind a hold körpályán mozog. Tegyük fel, hogy a bolygó-hold távolság $r(t) \equiv R$. Mennyi a keringési idő?

4. Egy R sugarú henger alakú vályúban egy r sugarú m tömegű homogén henger gördülhet tisztán. Az így kialakult egy szabadsági fokú rendszer helyzetét az ábrán jelölt φ szöggel jellemezzük.



- Adjuk meg a rendszer potenciális energiáját φ -függvényében!
 - Adjuk meg a rendszer mozgási energiáját $\dot{\varphi}$ függvényében. Vigyázzunk, a kis hengernek transzlációs és forgási mozgása is van.
 - Írjuk fel a rendszer Lagrange-függvényét!
 - Tekintsük azt a határesetet, amikor csak kicsit térítettük ki az alsó egyensúlyi helyzetéből a korongot. A potenciális energiában megjelenő $\cos(\varphi)$ függvényt közelítsük másodrendig!
 - Írjuk fel a kis kitérésekre vonatkozó mozgásegyenletet! Mekkora a rezgésidő?
-