Elméleti Fizika 1.

Török János, Orosz László, Unger Tamás

2014. február 12.

Tartalomjegyzék

I. Elméleti Mechanika **5**

1. Matematikai bevezető **6**
1.1. Jelölések . . . 6
1.2. Vektor műveletek . . . 6
1.3. Dirac-delta . . . 8
1.4. Fourier-transzformáció . . . 11
1.4.1. Periodikus függvények Fourier-analízise . . . 11
1.4.2. Nem-periodikus függvények Fourier-analízise . . . 12
1.5. Komplex Fourier-analízis . . . 13
1.6. Fontos azonosságok Fourier-transzformációhoz . . . 15

2. Egyetlen tömegpont kinematikája **17**
2.1. Pálya . . . 17
2.2. Általános mozgás . . . 19

3. Egyetlen tömegpont általános dinamikája **22**
3.1. Történeti bevezető . . . 22
3.2. A tömegpont mozgásegyenlete . . . 23
3.3. Munkatétel . . . 24
3.4. Mechanikai energia megmaradás . . . 25
3.5. Disszipatív erők. A munkatétel általánosítása . . . 27
3.6. Egyetlen tömegpont perdülete . . . 29
3.7. Megmaradási tételek egyetlen tömegpont mozgása során . . . 29
3.8. Tömegpont speciális térbeli mozgása: a centrális erőtér . . . 30

4. Tömegpont-rendszerek **36**
4.1. Tömegközéppont-tétel . . . 38
4.2. Pontrendszer impulzustétele . . . 38
4.3. Pontrendszer munkatétele . . . 39
4.4. Pontrendszer perdülettétele . . . 41

5. A mechanika elvei **43**
5.1. Általános koordináták . . . 43
5.2. A legkisebb hatás elve – Variációszámítás . . . 44
5.3. Hamilton-formalizmus . . . 47

6. Lineáris rendszerek analízise - lineáris mechanikai oszcillátor **49**
6.1. Lineáris rendszer definíciója . . . 49
6.2. Harmonikus oszcillátor . . . 49
6.2.1. Túlcsillapítás . . . 51
6.2.2. Határcsillapítás . . . 52
6.2.3. Alulcsillapítás . . . 52
6.2.4. Összefoglalás . . . 54
6.2.5. Mechanikai energia . . . 55
6.3. Gerjesztett csillapított oszcillátor . . . 55
6.4. Green-függvény . . . 56
6.4.1. Csillapított oszcillátor Green-függvénye . . . 59
6.4.2. Fourier-transzformáció lineáris rendszerekre . . . 60

7. Merev testek dinamikája **63**
7.1. Merev test fogalma . . . 63
7.2. Rögzített tengely körüli forgás . . . 64
7.2.1. Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete . . . 65
7.2.2. Rögzített tengely körül forgó merev test kinetikus energiája . . . 67
7.2.3. Rögzített tengelyre ható erők . . . 68
7.3. Szabad tengely körül forgó merev test . . . 69
7.3.1. Főtengely rendszer . . . 69
7.4. Rögzített pont körül forgó merev test dinamikája (a pörgettyű mozgás) . . . 71

8. Deformálható testek mechanikája **76**
8.1. Általános mérlegegyenletek . . . 76
8.1.1. Konvektív, konduktív áram . . . 79
8.2. Deformálható testek kinematikája . . . 80
8.2.1. Elforgatás . . . 82
8.2.2. Deformáció . . . 83
8.2.3. Térfogatváltozás . . . 84
8.3. Erőhatások deformálható testekben . . . 85
8.4. Rugalmas közegek dinamikája . . . 87
8.5. A kontinuummechanika mozgásegyenlete . . . 89
8.5.1. Lagrange-féle mozgásegyenlet . . . 90
8.5.2. Euler-féle mozgásegyenlet . . . 92
8.6. Közegmozgás . . . 93

8.6.1. Rugalmas közeg mozgása . . . 94
8.6.2. Ideális folyadék áramlása . . . 95
8.6.3. Newtoni-folyadék áramlása . . . 96

II. Elektrodinamika 99

9. Bevezetés 100

10. Elektrosztatika 103
10.1. A Laplace-egyenlet megoldása Descartes-féle koordinátarendszerben . . . 104
10.2. A Laplace-egyenlet megoldása gömbi koordinátarendszerben . . . 111
10.2.1. Tengelyszimmetrikus eset . . . 117
10.3. Elektromos dipólus tere . . . 118
10.4. Green-függvények az elektrosztatikában . . . 121
10.5. Az elektrosztatika egyértelműsége . . . 125
10.6. Multipólus sorfejtés . . . 127
10.6.1. Potenciál . . . 127
10.6.2. Erőhatás . . . 129

11. Magnetosztatika 131
11.1. Vektorpotenciál . . . 131
11.1.1. Mértékinvariancia . . . 131
11.1.2. Poisson-egyenlet . . . 132
11.2. Biot-Savart-törvény . . . 133
11.2.1. Coulomb-mérték . . . 133
11.2.2. Mágneses indukció . . . 134
11.3. Lokalizált árameloszlás mágneses momentuma . . . 134
11.3.1. Síkbeli áramhurok . . . 137

12. Elektormágneses tér anyagi közeg esetén 138
12.1. Dielektromos polarizáció . . . 138
12.2. Mágneses tér anyagi közeg esetén . . . 140

13. Elektromágneses tér 143
13.1. Töltésrendszer energiája . . . 143
13.2. Elektromágneses tér energiája . . . 144
13.3. Az elektromágneses tér impulzusmérleg-egyenlete . . . 146
13.4. Töltések és potenciálok vezetőkön . . . 147

14. Elektromágneses hullámok **151**
14.1. Elektromágneses hullámok vákuumban . . . 151
14.1.1. Forrásmentes hullámegyenlet . . . 151
14.1.2. Síkhullámok . . . 152
14.1.3. Inhomogén hullámegyenlet, Lorentz-mérték . . . 155
14.1.4. Az inhomogén hullámegyenlet megoldása . . . 157
14.1.5. Hertz-dipólus . . . 160
14.1.6. Antenna teljesítménye . . . 163
14.2. Elektromágneses hullámok anyagokban . . . 165
14.2.1. Elektromágneses hullám szigetelőben . . . 166
14.2.2. Síkhullámok anyagban . . . 166
14.2.3. Komplex hullámszám . . . 168
14.2.4. Behatolási mélység . . . 169
14.3. Szórás . . . 170
14.3.1. Szabad elektron szórás: Thomson-hatáskeresztmetszet . . . 171
14.3.2. Kötött elektron szórás: Rayleigh-hatáskeresztmetszet . . . 173

I. rész

Elméleti Mechanika

1. fejezet

Matematikai bevezető

E fejezet célja, hogy összegyűjtse azokat a matematikai fogalmakat, amikre szükségünk lesz. Nem célunk bármiféle teljesség, bizonyítás pusztán egy segédlet, hogy általa elkerüljük a fizikai gondolatmenet megszakítását.

1.1. Jelölések

Objektum	jelölés	példák
skalár	dőlt betű	s, t
vektor	vastag betű	$\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$
vektor komponens	dőlt betű, alsó index	v_i, F_i
4-es vektor	nagy betű	X, P
4-es vektor kontravariáns komponensek	dőlt betű, felső index	x^0, x^1
4-es vektor kovariáns komponensek	dőlt betű, alsó index	x_0, x_1
tenzor	vastag nagy-, görög betű	$\mathbf{D}$ $\boldsymbol{\sigma}$
tenzor komponens	dőlt nagy-, görög betű, alsó index	D_{ij} σ_{ij}

1.2. Vektor műveletek

Legyenek adottak a következő mennyiségek:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{d} &= (d_1, d_2) \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Skalár szorzat, két vektorból egy skalárt kapunk:

$$c = \mathbf{ab} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \sum_i a_i b_i \tag{1.2}$$

Vektor szorzat, két hármas vektorból egy azokra merőleges hármas vektort kapunk:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ v_i &= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \end{aligned} \tag{1.3}$$

ahol ε_{ijk} a Levi-Civita-szimbólum :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ha } (i,j,k) = (1,2,3), (3,1,2), (2,3,1) \\ -1 & \text{ha } (i,j,k) = (3,2,1), (1,3,2), (2,1,3) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{1.4}$$

Itt megemlítjük a Kronecker-deltát is, amelynek definíciója:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \tag{1.5}$$

Fontos azonosság a Levi-Civita-szimbólum és a Kronecker-delta között:

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \tag{1.6}$$

A diadikus szorzat két vektorból csinál egy tenzort:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{d} \otimes \mathbf{a} \\ D_{ij} &= d_i a_j \end{aligned} \tag{1.7}$$

Tenzor szorzat, két tetszőleges vektor közötti lineáris kapcsolat:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{Da} \\ d_i &= \sum_{j=1}^{3} D_{ij} a_j \end{aligned} \tag{1.8}$$

A deriválásból Descartes coordinátarendszerben is kialakítható egy hármas vektor, amely fontos szerepet játszik a fizikában. Ez a nabla szimbólum:

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \tag{1.9}$$

A nabla operátor mindig valamilyen helyfüggő mennyiségre hat. Először legyen ez a mennyiség skalár $V(\mathbf{r})$ ekkor egy vektort kapunk, amelynek i-edik komponense a következő:

$$(\nabla V)_i = (\mathrm{grad} V)_i = \nabla_i V = \frac{\partial V}{\partial x_i} = \partial_i V \tag{1.10}$$

A fenti jelölés módok mind ekvivalensek és bármelyik előfordulhat a jegyzetben. A fenti mennyiség más néven egy skalármező gradiense , ami egy vektor, amely az adott pontban a legnagyobb meredekség irányába mutat és nagysága megegyezik a meredekséggel.

Ha a nabla operátor egy $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektormezőre hat akkor egy skalárt kapunk:

$$\nabla \mathbf{F} = \mathrm{div}\mathbf{F} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \sum_i \partial_i F_i \tag{1.11}$$

A kapott művelet a divergencia , ami egy skalár és egy vektormező forráserősségét méri az adott pontban. Pozitív értékek forrást, negatív értékek nyelőt (semlyék) jelent.

A nabla keresztszorzata is értelmezhető. A kapott vektor i-edik komponensére a következő adódik:

$$(\nabla \times \mathbf{F})_i = (\mathrm{rot}\mathbf{F})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \tag{1.12}$$

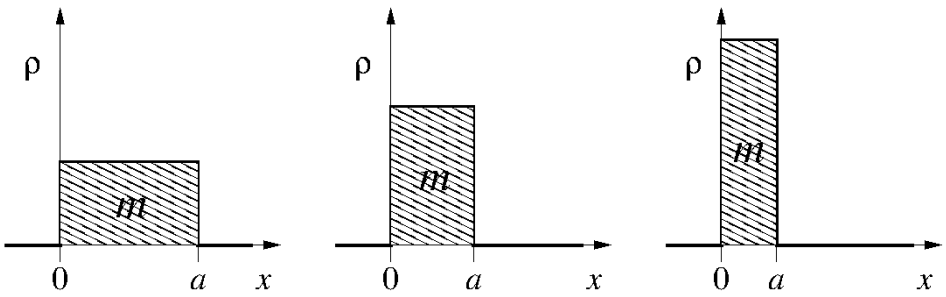
A fenti mennyiség a vektormező rotációját , azaz örvényerősségét méri. A pozitív irányt a jobbsodrás jelöli ki.

1.3. Dirac-delta

Az ideális határesetek, mint például tömegpont, tökéletesen merev testek pillanatszerű ütközése, nagyon fontos szerepet játszanak a fizikában. Közös jellemzőjük a fenti példáknak, hogy valamilyen jellemző térbeli, vagy időbeli kiterjedésétől eltekintünk. Igen jó okunk van erre, hiszen a tömegközépponti tétel 4.1 kimondja, hogy kiterjedt testek transzlációs mozgása olyan, mintha az össztömeg össze lenne sűrítve a tömegközéppontba és a külső erők erre hatnának. Tehát ha nem érdekel mindkét a test tömegközéppontjához viszonyított helyzete, a tömegponti leírás megfelelő. Ugyanígy az ütközések során minket legtöbbször csak a szóródás végeredménye érdekel, és a kölcsönhatás pontos módja lényegtelen.

Vizsgáljuk meg tehát először, hogy miképp lehet minél jobban közelíteni egy tömegpontot egy kiterjedt testtel! Dolgozzunk 1 dimenzióban és legyen a test homogén, kiterjedése $[0, a]$ (ld. 1.1 ábra). A test tömege a sűrűség integráljával számítható:

$$m = \int_0^a \rho(x) dx = a\rho \tag{1.13}$$



1.1. ábra. Tömegpont készítése: A test kiterjedése egyre csökken, a sűrűsége nő, miközben tömege állandó marad.

Ha tehát most a tömeget rögzítjük, miközben a test a kiterjedését csökkentjük, annak sűrűsége megnő: $\rho = m/a$. Jelöljük $D_a(x)$-szel azt a függvényt, ami egy adott a-ra teljesíti, hogy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} D_a(x)dx \tag{1.14}$$

és emellett $D_a(x) = 0$, ha $x<0$, illetve $x>a$. Minket a $a \to 0$ határeset érdekel, ilyen függvény azonban nincs, mivel egy pontban lenne véges a területe. Igazából a $\delta(x) = \lim_{a\to 0} D_a(x)$ „függvényből" minket csak a következő tulajdonság érdekel:

$$\int_x^y \delta(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ha az } [x,y] \text{ tartományban nincs benn a 0} \\ 1, \text{ha x<0<y} \end{cases} \tag{1.15}$$

Ekkor az $m\delta(x)$ sűrűséget integrálva megkapnánk a tömeget.

Tehát, ha integrál jel mögött szerepel $\delta(x)$ akkor van értelme és akkor úgy lehet rá tekinteni, mint egy integrál–utasításra. Dimenziója:

$$[\delta(x)] = \frac{1}{\mathrm{m}} \tag{1.16}$$

Vizsgáljuk meg most a másik említett problémát, a tökéletesen merev testek ütközését! Ütközzön egy dimenzióban tökéletesen rugalmasan két m tömegű test! Az 1-es test kezdeti sebessége v és az ütközés után 0ra csökken. A 2-es testnél pont fordítva, 0-ról v-re nő a sebesség az ütközés során. Írjuk fel a 2-es test impulzus változását:

$$\Delta p = m\Delta v_2 = mv = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \tag{1.17}$$

Ahogy egyre keményebb anyagú testeket választunk úgy lesz a kölcsönhatás ideje egyre rövidebb, miközben az erőhatás egyre erősebb. A pillanatszerű ütközés határesetben a

tömegponthoz hasonlóan itt sem létezik erőfüggvény, de az előbbi integrál-utasításnak itt is van értelme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta p\delta(t)dt \tag{1.18}$$

Az itt definiált $\delta(t)$ dimenziója:

$$[\delta(t)] = \frac{1}{\mathrm{s}} \tag{1.19}$$

Az előbbiekben definiált $\delta(x)$ *disztribuciót Dirac-deltá*nak nevezzük.

Megjegyzés: A disztribúció-elmélet megalkotója L. Schwartz volt. Aki elolvasván P.A.M. Dirac The Principles of Quantum Mechanics (1930) könyvét elégedetlen volt annak matematikai korrektségével. Ebben a könyvben használta Dirac a fenti $\delta(t)$ függvényt először. Ezért ragadt rá a későbbiekben Dirac-delta név. Maga Dirac is óvatosan fogalmazott:

„Thus $\delta(x)$ is not a quantity which can be generally used in mathematical analysis like an ordinary function, but its use must be confined to certain simple types of expression for which it is obvious that no inconsistency can arise."

Jóllehet a kvantummechanikai számításokban minden jól kijött, a függvényként való kezelése zavarta a matematikai képességeiről méltán híres Neumannt. Az ő ez irányú matematikai vizsgálódásai indították el a disztribúció elméletnek nevezett matematikai területet.

Foglaljuk össze a Dirac-delta tulajdonságait:

1. A Dirac-deltát tehát a következőképpen hat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t-t_0)dt = y(t_0) \tag{1.20}$$

2. A Dirac-deltát bármely véges tartójú függvényből elő lehet állítani határesetként, ha a tartót úgy nyomjuk 0 méretűvé, hogy közben az integrált 1-nek tartjuk.

3. Mértékegysége: $[\delta(t)] = 1/s$, illetve $[\delta(x)] = 1/m$

4. Szimmetrikus: $\delta(t) = \delta(-t)$

5. Átskálázás: $\delta(\lambda t) = \frac{1}{\lambda}\delta(t)$, ha $\lambda > 0$

6. A lépcsőfüggvény deriváltja: $\delta(t) = d\theta/dt$

1.4. Fourier-transzformáció

1.4.1. Periodikus függvények Fourier-analízise

Bevezetésül ismételjük át azt, amit az eddigi tanulmányaink során a rezgések spektrális felbontásáról hallottunk. A legismertebb gyakorlati példa erre a különböző hangszerek által keltett hangok analízise. Azaz annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy mi a fizikai oka annak, hogy pl. ugyanaz a normál á hang minden hangszeren másképpen hallatszik, azaz különbséget tudunk tenni mondjuk a hegedű és az oboa hangja között.

Legyen $x(t)$ egy periodikus függvény T periódusidővel ($x(t+kT) = x(t)$, minden $k \in \mathbb{Z}$-re), amely abszolút integrálható, azaz

$$\int_0^T |x(t)|dt < \infty. \tag{1.21}$$

Ekkor mivel a szinusz és koszinusz függvények ortogonális bázist alkotnak L_2 felett, felírható x Fourier-sora:

$$x(t,T) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)\right] + \frac{b_0}{2}, \tag{1.22}$$

ahol $\omega = 2\pi/T$. Az a_k, b_k Fourier-együtthatók meghatározzák $x(t)$-t. Visszafelé a szinusz és koszinusz függvények ortogonáltságát kihasználva tudjuk meghatározni a Fourier-együtthatókat az $x(t)$ függvényből. Emlékeztetőül az ortogonáltság következménye:

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(n\omega t)dt = \frac{T}{2}\delta_{kn} \tag{1.23}$$

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(n\omega t)dt = \frac{T}{2}\delta_{kn} \tag{1.24}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(n\omega t)dt = 0, \tag{1.25}$$

ahol δ_{kn} a (1.5)-ben definiált Kronecker-delta. Mindezek felhasználásával a Fourier-együtthatók a következőképpen számolhatók ki:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T x\left(t\right)\sin\left(k\omega t\right)dt \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T x\left(t\right)\cos\left(k\omega t\right)dt, \end{aligned} \tag{1.26}$$

ahol $k \in \mathbb{N}$. Láthatóan $a_0 = 0$, illetve

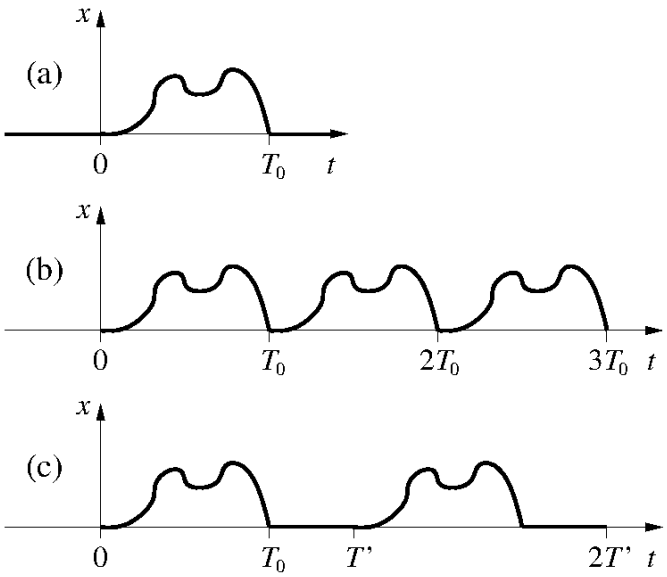
$$b_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{1.27}$$

Ezért, ahogy már láttuk:

$$x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t) \right] \tag{1.28}$$

1.4.2. Nem-periodikus függvények Fourier-analízise

Természetes módon felmerül a kérdés, hogy vajon egy nem periodikus $x\,(t)$ függvény szintén felbontható-e valamiféle összetevőkre. Azaz létezik-e nem periodikus függvények spektrális felbontása. A válasz igen!



1.2. ábra. (a) Véges tartójú $x(t)$ függvény. (b) T_0 periódusú periodikus függvény $x(t)$-ből. (c) T' periódusú periodikus függvény $x(t)$-ből.

Legyen $x(t)$ egy véges tartójú ($t \in [0, T_0]$) függvény (1.2 (a) ábra). Ha a függvény tartóját megismételjük egymás mellett (1.2 (b) ábra), akkor T_0 periódus idejű periodikus függvényt kapunk. Ennek Fourier-sora:

$$x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t) \right], \tag{1.29}$$

ahol $\omega = 2\pi/T_0$.

Megtehetjük, hogy a véges tartókat nem pontosan egymás mellé illesztjük, mint a 1.2 (c) ábrán, ekkor az $x_{T'}(t)$ periodikus függvényt kapjuk T' periódusidővel. Minél

nagyobbra választjuk T'-t, annál inkább hasonlít a periodikus függvényünk az eredetire. Természetesen $x_{T'}(t)$ Fourier-sora is felírható, de most az alapharmonikus $\omega' = 2\pi/T'$:

$$x_{T'}(t) = \frac{b_{0,T'}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k,T'} \sin(k\omega' t) + b_{k,T'} \cos(k\omega' t) \right]. \tag{1.30}$$

Az eredeti $x(t)$ függvény az alábbi határátmenettel áll elő:

$$x(t) = \lim_{T' \to \infty} x_{T'}(t) \tag{1.31}$$

Ennek két következménye lesz: Egyrészt folytonos lesz a spektrum, hiszen az alapharmonikus $\Delta\omega' = \omega' = 2\pi/T' \to 0$, másrészt az $a_{k,T'}, b_{k,T'}$ együtthatók is tartanak nullához:

$$x(t) = \lim_{T' \to \infty} x_{T'}(t) = \lim_{T' \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{k,T'} \sin(k\omega' t) + B_{k,T'} \cos(k\omega' t) \right] \Delta\omega'. \tag{1.32}$$

Itt elhagytuk a nullához tartó konstans $b_{0,T'}$ tagot. Ez lényegében az integrál diszkrét definíciója, azaz:

$$x(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin(\omega t) + B(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \tag{1.33}$$

Ezt nevezzük Fourier-integrálnak. Az együtthatók meghatározása:

$$A(\omega) = \frac{T'}{2\pi} a_{k,T'} = \frac{T'}{2\pi} \frac{2}{T'} \int_0^{T'} x_{T'}(t) \sin(k\omega' t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{T_0} x(t) \sin(\omega t) dt, \tag{1.34}$$

ahol $\omega = k\omega'$. Összegezve:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \tag{1.35}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt \tag{1.36}$$

Az integrálási tartomány kiterjesztésénél kihasználtuk $x(t)$ véges tartósságát.

1.5. Komplex Fourier-analízis

A folytonos Fourier-analízist érdemes továbbvinni komplex számok esetére is. Ismert, hogy

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad \text{és} \quad \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}. \tag{1.37}$$

Ekkor az $x(t)$ Fourier-transzormáltja a következőképpen írható:

$$x(t) = \int_0^\infty e^{i\omega t}\left[\frac{A(\omega)}{2i} + \frac{B(\omega)}{2}\right] + e^{-i\omega t}\left[-\frac{A(\omega)}{2i} + \frac{B(\omega)}{2}\right] d\omega =$$
$$= \int_0^\infty e^{i\omega t}\underbrace{\frac{1}{2}\left[B(\omega) - iA(\omega)\right]}_{\tilde{X}(\omega)} + e^{-i\omega t}\underbrace{\frac{1}{2}\left[B(\omega) + iA(\omega)\right]}_{\tilde{X}^*(\omega)} d\omega \tag{1.38}$$

Bevezettük a $\tilde{X}(\omega) = [B(\omega) - iA(\omega)]/2$ komplex együtthatót. A $\tilde{X}^*(\omega)$ ennek komplex konjugáltja. $x(t)$ Fourier-transzformáltja most így néz ki:

$$x(t) = \int_0^\infty \left[\tilde{X}(\omega)e^{i\omega t}\right] d\omega + \int_0^\infty \left[\tilde{X}^*(\omega)e^{-i\omega t}\right] d\omega =$$
$$= \int_0^\infty \left[\tilde{X}(\omega)e^{i\omega t}\right] d\omega + \int_{-\infty}^0 \left[\tilde{X}^*(-\omega')e^{+i\omega' t}\right] d\omega' \tag{1.39}$$

A második lépésben végrehajtottunk egy változó cserét. A szinusz és koszinusz függvények páratlan illetve párossága miatt igazak a következő összefüggések:

$$A(-\omega) = -A(\omega), \quad \text{és} \quad B(-\omega) = +B(\omega) \tag{1.40}$$

Ebből következik hogy

$$\tilde{X}^*(-\omega) = \frac{B(-\omega) + iA(-\omega)}{2} = \frac{B(\omega) - iA(\omega)}{2} = \tilde{X}(\omega) \tag{1.41}$$

Azaz a komplex Fourier-transzformáció az alábbi egyszerű alakot veszi fel:

$$x(t) = \int_{-\infty}^\infty \tilde{X}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{1.42}$$

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty x(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.43}$$

Az $x(t)$ valós időfüggvény Fourier-transzformáltja a $\tilde{X}(\omega)$ komplex frekvenciafüggvény. Gyakran mondjuk azt is, hogy: Az $x(t)$ függvény Fourier spektruma az $\tilde{X}(\omega)$. A Fourier-transzformációra a következőı szimbólumot használjuk:

$$\mathcal{F}[x(t)] = \tilde{X}(\omega) \tag{1.44}$$

Amint már régebben utaltunk rá, a Fourier-transzformáció mindig létezik, ha a transzformálandó függvény abszolút, vagy négyzetesen integrálható:

$$\int_{-\infty}^\infty |x(t)|dt < \infty, \quad \text{vagy} \int_{-\infty}^\infty x(t)^2 dt < \infty \tag{1.45}$$

1.6. Fontos azonosságok Fourier-transzformációhoz

Írjuk fel egy függvény Fourier-transzformáltjának inverz Fourier-transzformáltját:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} x(t') e^{i\omega(t-t')} dt' d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \right) dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t-t') dt' \end{aligned} \tag{1.46}$$

A fenti azonosság alapján felírható a Dirac-delta egy kicsit szokatlan előállítása:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\mathcal{F}[\delta(t)]} e^{i\omega t} d\omega, \tag{1.47}$$

ahonnan leolvasható a Dirac-delta Fourier-transzformáltja:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi} \tag{1.48}$$

Hajtsuk végre a $t \to -\omega$ és $\omega \to t$ változó cseréket az (1.47) egyenletben! Ekkor a konstans Fourier-transzformáltját kapjuk:

$$\begin{aligned} \delta(\omega) = \delta(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} dt \\ \mathcal{F}[1] &= \delta(\omega) \end{aligned} \tag{1.49}$$

További néhány fontos tételt is felírhatunk, amelyekben bonyolult műveletek egyszerű szorzássá válnak Fourier térben.

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = i\omega \mathcal{F}[f(t)] \tag{1.50}$$

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)] \tag{1.51}$$

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') dt' \right] = 2\pi \mathcal{F}[f(t)] \mathcal{F}[g(t)] \tag{1.52}$$

Az első kettő állítás triviálisan bizonyítható a definícióból, az utolsó a *konvolúció* Fourier-transzformáltja a lineáris rendszerek analízisénél (6.4.2 fejezet) kap fontos szerepet. Bi-

zonyításához induljunk ki az $f(t')$ és a $g(t-t')$ Fourier-transzformáltjából:

$$f(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t'} d\omega \tag{1.53}$$

$$g(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega') e^{i\omega'(t-t')} d\omega' \tag{1.54}$$

Most írjuk fel a konvolúciót:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt' &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t'} d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega') e^{i\omega'(t-t')} d\omega' \right) dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega)\tilde{G}(\omega') e^{i\omega t'} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t'} dt' \right)}_{2\pi\delta(\omega-\omega')} d\omega d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \tilde{F}(\omega)\tilde{G}(\omega') e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{1.55}$$

A fenti kifejezésből leolvasható, hogy a konvolúció Fourier-transzformáltja valóban az (1.52) egyenletnek megfelelő.

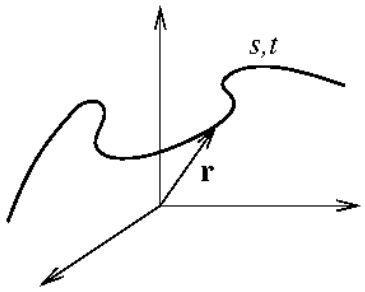
2. fejezet

Egyetlen tömegpont kinematikája

2.1. Pálya

A kinematika mechanikai rendszerek mozgásának leírásával foglalkozik. Kizárólag a *hogyan* kérdésre keresi a választ a *miért*ek megválaszolása a dinamika feladata. Első lépésként ebben a fejezetben egyetlen tömegpont mozgását vizsgáljuk.

Egy tömegpont helyét egy adott pillanatban egy vonatkoztatási rendszerben a helyvektor $\mathbf{r}$ adja meg. A tömegpont mozgása során egy térgörbét követ, melyet az $\mathbf{r}(\lambda)$ függvénnyel írjuk le. Matematikailag igen sokféle módon lehet a λ paramétert definiálni, a fizikai szemléletessége miatt a kinematikában mi kétféle paraméterezést használunk: az eltelt időt $\lambda \equiv t$, illetve a megtett utat $\lambda \equiv s$. Természetesen a pálya mentén befutott távolság és a idő egymással szoros kapcsolatban van. Az $s(t)$ függvény a pont mozgásának egyik fontos kinematikai jellemzője.



2.1. ábra. Egy tömegpont pályája.

Időn itt azt a mennyiséget kell érteni, amelyet az inerciarendszerben elhelyezett stopperóra mér. Ez a praktikus definíció (*az idő az, amit az óra mér*) most számunkra egy jó darabig elegendő lesz. Az idő fogalmának precíz kifejtésére csak a speciális relativitás-

elmélet és a kvantummechanika során kerülhet sor. Filozófiai kérdésekkel ezen tantárgyon belül a szükségesnél többet nem foglalkozunk. A kinematika feladata, hogy meghatározzuk a helyvektor idő szerinti deriváltjainak értékét, mivel ezekre van szükségünk a dinamikához. A Newton -féle mozgástörvény (Newton II) miatt azonban tudjuk, hogy csak az első és második deriváltra van szükségünk. Az idő szerinti deriváltat ponttal jelöljük:

$$\mathbf{r}(t) \leftrightarrow \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}(t) \leftrightarrow \ddot{\mathbf{r}}(t) \tag{2.1}$$

A magasabb rendű deriváltakra csak speciális esetekben lehet szükség.

A legegyszerűbb módszer az, ha felveszünk egy koordináta-rendszert és abban megadjuk az $\mathbf{r}(t)$ függvény skalár komponenseit, majd meghatározzuk az idő szerinti deriváltakat. Descartes koordináta-rendszer esetén ez csak az x, y, z skalár komponensek időderiváltjait jelenti. Görbevonalú koordináták esetén a helyzet bonyolultabb. Itt ugyanis az egységvektorok iránya függhet attól, hogy a tér melyik pontjában vagyunk. Ezért aztán a tömegpont mozgása során az egységvektorok idő szerinti deriváltja már nem lesz zérus, így a formulák bonyolultabb alakot öltenek. Az 2.1 táblázatban összefoglaljuk ezeket.

Koordináta-rendszer	**Descartes**	**Henger**
Descartes-koordináták	$x = x$ $y = y$ $z = z$	$x = R\cos\phi$ $y = R\sin\phi$ $z = z$
Egységvektorok	$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$	$(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$
Helyvektor $\mathbf{r} =$	$x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$	$R\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_z$
Első derivált $\dot{\mathbf{r}} =$	$\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z$	$\dot{R}\mathbf{e}_r + R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z$
Második derivált $\ddot{\mathbf{r}} =$	$\ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z$	$(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_R +$ $(R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z$
Koordináta-rendszer	**Gömbi**	
Descartes-koordináták	$x = r\sin\vartheta\cos\phi$ $y = r\sin\vartheta\sin\phi$ $z = r\cos\phi$	
Egységvektorok	$(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\phi)$	
Helyvektor $\mathbf{r} =$	$r\mathbf{e}_r$	
Első derivált $\dot{\mathbf{r}} =$	$\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + + r\dot{\phi}\sin\vartheta\mathbf{e}_\phi$	
Második derivált $\ddot{\mathbf{r}} =$	$(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\vartheta)\mathbf{e}_r +$ $(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r\dot{\phi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta +$ $r\ddot{\phi}\sin\vartheta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\phi}\cos\vartheta)\mathbf{e}_\phi$	

2.1. táblázat. A helyvektor időderiváltjai Descartes, henger és gömbi koordináta-rendszerben.

Az 2.1 táblázatból kiolvashatók pl. a körmozgás kinematikai adatai. Célszerű henger koordináta-rendszert használni. Történjék a mozgás az xy-síkban lévő O origó centrumú R_0 sugarú körpályán. Azaz most $z \equiv 0$ és $R = R_0$ állandó. Ezért azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r} = R_0 \mathbf{e}_R \tag{2.2}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = R_0 \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi = R_0 \omega \mathbf{e}_\phi = v \mathbf{e}_\phi \tag{2.3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -R_0 \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_R + R_0 \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi = -R_0 \omega^2 \mathbf{e}_R + R_0 \dot{\omega} \mathbf{e}_\phi, \tag{2.4}$$

ahol bevezettük az $\omega = \dot{\phi}$ szögsebesség fogalmát és a pont $v = R_0\omega$ (pályamenti) sebességét. A formulánkban automatikusan megjelent a centripetális gyorsulás is:

$$a_{\mathrm{cp}} = -R_0\omega^2 = \frac{-v^2}{R_0}, \tag{2.5}$$

amely természetesen $-\mathbf{e}_R$ irányú, azaz mindig a kör középpontja felé mutat.

A későbbiek során (főleg a kiterjedt testek forgó mozgásának a tanulmányozásakor) igen hasznos lesz egy új fogalomnak, az *szögsebesség-vektornak* a bevezetése. Ez az imént használt ω szögsebesség fogalmának az általánosítása, amely során a körmozgást jellemző két fontos információt, nevezetesen a szögsebességet és a mozgás síkjának a térbeli helyzetét egyetlen fogalomban egyesítjük. Egy sík térbeli orientációját az $\mathbf{e}_n$ normálvektorral határozunk meg. Ha az $\mathbf{e}_n$ vektor a körmozgás síkját jelöli, akkor a szögsebesség-vektort az $\boldsymbol{\omega} \equiv \omega \mathbf{e}_n$ kifejezés definiálja.

A szögsebesség-vektor igen hasznos fogalom a sebesség meghatározására. Könnyen belátható, hogy az

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{2.6}$$

kifejezés meghatározza a körmozgást végző tömegpont sebességét.

2.2. Általános mozgás

Egy adott koordináta-rendszerben, az $\mathbf{r}(t)$ általános térbeli mozgás ismeretében, a sebességvektor és a gyorsulásvektor formálisan kiszámítható. Az eredmény legtöbbször egyáltalán nem szemléletes, mert a három vektor egymáshoz való (geometriai) viszonya a kapott formákból nehezen olvasható ki. Ezért a kinematikában azt a megoldást választjuk, hogy a sebesség- és a gyorsulásvektorokat a tömegpont pályájához viszonyítva határozzuk meg.

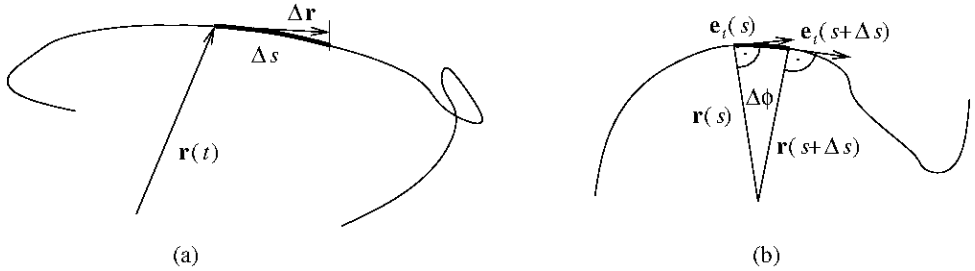
Mivel a pályát magát az $\mathbf{r}(s)$ függvény adja meg, ezért célszerű lesz, ha az időderiváltakat az $\mathbf{r}(s(t))$ összetett függvényből számítjuk ki. A közvetett deriválás művelete segítségével, a sebességvektor a következő módon írható fel:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}(s(t))\right] = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{r}'\dot{s}, \tag{2.7}$$

ahol vesszővel az út szerinti deriválást jelöltük. Az út idő szerinti deriváltja a sebesség ($\dot{s} = v$), A helyvektor út szerinti deriváltjának, $\mathbf{r}'$-nek igen szemléletes geometriai jelentése van. Ugyanis:

$$\mathbf{r}' = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{e}_t \tag{2.8}$$

Hiszen amint a 2.2 (a) ábrából kitűnik Δr határértékben a pálya érintőjébe megy át. Az érintő irányú egységvektort, tangenciális egységvektornak nevezzük és $\mathbf{e}_t$-vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{r}(s)$ térgörbe (a pont pályája) s szerinti deriválása magáról a pálya geometriájáról szolgáltat adatokat, hiszen közvetlenül az időparamétert nem tartalmazza.



2.2. ábra. Egy tömegpont pályája. A pályaérintő.

Számoljuk ki a gyorsulást:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\mathbf{e}_t' \frac{ds}{dt} = \dot{v}\mathbf{e}_t + v^2\mathbf{e}_t' \tag{2.9}$$

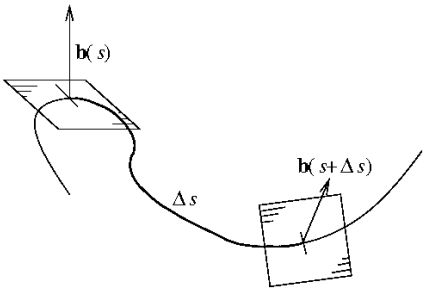
Határozzuk meg a tangenciális egységvektor úthossz szerinti deriváltját. A 2.2 (b) ábra alapján:

$$\mathbf{e}_t' = \mathbf{e}_n \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{\mathbf{e}_n}{R_g}, \tag{2.10}$$

ahol R_g a pálya görbületi sugara , a reciprokát pedig görbületnek nevezzük. Tehát a gyorsulás

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R_g}\mathbf{e}_n \tag{2.11}$$

Ebből leolvasható, hogy a gyorsulásvektornak van egy sebességgel párhuzamos és egy arra merőleges komponense. Az előbbi a sebesség nagyságának, a másik a sebesség irányának a megváltozását jellemzi, ez utóbbi a jól ismert centripetális gyorsulás . Látható, hogy állandó görbületi sugár esetén az általános körmozgás (2.4) kinematikai egyenleteihez jutottunk.



2.3. ábra. Binormális egységvektor egy térbeli pályán

Általános térbeli mozgásnál a tangenciális és a normális egységvektorok a pillanatnyi körmozgás síkját adják meg (ld. 2.3 ábra). Ennek a síknak a térbeli helyzetét a binormális egységvektorral jellemezhetjük:

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n \tag{2.12}$$

Síkmozgás esetén $\mathbf{b}$ állandó, térbeli pálya esetén $\mathbf{b}$ változtathatja az irányát. Ezen irányváltozás nagyságát fejezi ki a torzió , amelynek definíciója a következő:

$$T = \frac{d\beta}{ds}, \tag{2.13}$$

ahol β jelöli a binormális egységvektor elfordulási szögét. Azaz a torzió a binormális vektor szögsebessége.

Igazak a következő (egyáltalán nem nyilvánvaló) összefüggések (a bizonyítást az Olvasóra bízzuk):

$$\frac{1}{R_g} = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} \tag{2.14}$$

$$T = \frac{|(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\mathbf{r}'''|}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} = \frac{|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})\dddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} \tag{2.15}$$

Látható tehát, hogy két fontos geometriai adat (a pálya R_g görbületi sugara és T torziója) egyaránt kiszámítható a pálya helyvektorának út, vagy idő szerinti deriváltjaiból.

3. fejezet

Egyetlen tömegpont általános dinamikája

3.1. Történeti bevezető

A dinamika a mechanikának az a része, amelyik a mozgás okaival foglalkozik. A „miért"-re ad választ, ellentétben a kinematikával, amelyik csak a „hogyan"-nal foglalkozik. Isaac Newton (1643-1727) fogalmazta meg először azokat az alaptörvényeket, amelyek segítségével meg tudjuk magyarázni, hogy a testek miért éppen úgy mozognak, ahogyan azt egy adott esetben teszik.

„Égi" és „földi" megfigyelések és a megfigyelt mechanikai mozgások számszerű leírásának sokasága jelentette az utat a newtoni törvények felismeréséhez.

Newton maga mondta:

„Ha távolabbra láttam másoknál, azt azért tehettem, mert óriások vállán álltam."

Tycho Brahe, Galileo Galilei, Johannes Kepler, René Descartes, Christiaan Huygens voltak ezek az „óriások". Ezen megismerési út végét Newton műve, a Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica jelentette (1687).

Megszületett a mai értelemben vett fizika tudománya. Már a mű címe is lényeges, hiszen a természetfilozófia matematikai elveiről beszél. Ez mintegy válasz Galilei alapvető felismerésére, amely a mai modern természettudomány (és az ezen alapuló technikai civilizációnk) egyik alapköve. Eszerint ugyanis: *„A természet nagy könyvében csak az tud olvasni, aki ismeri azt a nyelvet, amelyen e könyv írva van, és az a nyelv: a matematika."* Ez a fontos tény Newton munkásságában konkrét alakot öltött, hiszen Newton felismerte azt a matematikai nyelvet is (ez a differenciál- és az integrál-számítás), amellyel a Természet (a mechanikai jelenségeknél) szól hozzánk. Természetesen az azóta eltelt több mint 300 év alatt sokan és sokat foglalkoztak mechanikával. A Newton által megfogalmazott törvények (a lényegük megtartása mellett) letisztultak és absztrakt matematikai modellé fejlődtek. Ma már ebben a formában fogalmazzuk meg őket.

Newton törvényeit (axiómáit) tömegpontokra mondjuk ki. Ez az a modell, amelyen a matematikai számítások egyértelműen elvégezhetők. A valódi, kiterjedt testeket tömegpontok sokaságaként modellezzük majd. Az itt felismert törvények már precízen alkalmazhatóak a minket körülvevő véges méretű (tetszőleges halmazállapotú) tárgyak mechanikai viselkedésének a tanulmányozására. A következőkben ezt az utat követjük.

Az általunk felismert természettörvények ún. kerettörvények, azaz pontosan meg tudjuk (meg kell tudnunk) mondani azon jelenségeknek a körét, amelyeknek a megmagyarázására szolgálnak. Ilyen a newtoni mechanika is. A Newton törvények fénysebességnél sokkal kisebb sebességgel mozgó, makroszkopikus méretű testek mechanikai viselkedését modellezik. Ezt nevezzük klasszikus mechanikának.

A klasszikus mechanika általánosítása nagy sebességek esetén a speciális relativitáselmélethez, mikroszkopikus (atomi méretek) tartományában pedig a kvantummechanikához vezet. A modern fizikának ezek a fejezetei természetesen nem hatálytalanítják a Newton törvényeket. A newtoni modell (éppen azért, mert „csak" modell) továbbra is igen pontosan megadja a klasszikus testek mindennapi dinamikáját. Sőt, mind a speciális relativitáselmélet, mind pedig a kvantummechanika határesetben vissza kell, hogy adja a newtoni mozgástörvényt. Ezt nevezzük korrespondencia-elvnek. Az elméleti fizika egyik igen fontos feladata ezen modellek közötti viszonyrendszer bemutatása.

3.2. A tömegpont mozgásegyenlete

Tekintsünk egy m tömegű pontszerű testet. Ez a tömegpont a rá ható erők hatására valamilyen $\mathbf{r}(t)$ függvény szerint mozog. Az $\mathbf{r}(t)$ függvényt egy olyan vonatkoztatási rendszerben adjuk meg, amelyben a Newton törvények igazak, azaz ha a testre nem hat erő, egyenesvonalú egyenletes mozgást végez (Newton 1. törvénye). Ennek a vonatkoztatási rendszernek a matematikai modellje egy koordináta-rendszer. Az erők matematikai modellje az erővektor. A tömegpont mozgásegyenlete Newton 2. törvénye alapján:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \tag{3.1}$$

ahol az impulzus $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Newton 3. törvénye az erő-ellenerő kapcsolatot mondja ki, mely szerint két test kölcsönhatása során mindkét testre azonos nagyságú, egymással ellentétes irányú erő hat. Ha a tömegpontra N darab erő hat, akkor a rá ható eredő erő Newton 4. törvénye alapján:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \tag{3.2}$$

Az erők forrása a tömegpont és a testek közötti kölcsönhatás. A hétköznapi életben a minket körülvevő makroszkopikus testek között csak akkor lép fel erőhatás, ha azok közvetlenül érintkeznek egymással. Ezért a tömegpontnak is érintkeznie kell a reá ható testekkel. Ugyanakkor érezhetően jelen van a hétköznapjainkban egy olyan erőhatás

is, ahol nem kell, hogy a tömegpont közvetlenül érintkezzen a testtel. Ez a gravitáció. Nem véletlen, hogy a Principiában Newton kidolgozta a Newton-féle gravitáció elméletét is. Newton természetesen még nem ismerhette az elektrodinamikát. Nem tudott az elektromos töltéssel bíró részecskék és az elektromágneses tér kölcsönhatásairól. Nem volna szükségszerű, de tapasztalati tény, hogy a Newton törvények az elektromágneses mezőben mozgó tömegpontra is érvényesek.

Mindenfajta erő ún. lokális erő. Ez azt jelenti, hogy az erőhatás csak a tömegpont $\mathbf{r}$ helyén lévő fizikai viszonyoktól függ (bármit is értsünk most „fizikai viszonyokon"). Ennek a lokalitásnak a következtében az helyen lévő tömegpontra ható eredő erő matematikai alakja (elvileg) a következő lehet:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}, \ldots, t) \tag{3.3}$$

A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy az első deriváltnál magasabb rendű tagok nem jelennek meg az erőtörvényekben, azaz elég az alábbi függvényt vizsgálni:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \tag{3.4}$$

Az $\dot{\mathbf{r}}$ függés leginkább a súrlódásból és a közegellenállásból származó erők esetén fordul elő, illetve az elektromágneses mezőben mozgó töltéssel rendelkező tömegpontra ható Lorentz-erő tartalmaz sebesség függést. Fontos osztály tehát, amikor a sebességfüggés nem jelenik meg, ekkor az erő

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \tag{3.5}$$

olyan mintha a tér tulajdonsága lenne, ami függ a tömegpont mozgásállapotától. A fenti függvény neve erőtér, hiszen a tér minden egyes pontjában a tömegpontra egy jól definiált erő hat.

3.3. Munkatétel

A mozgásegyenletből fontos törvények vezethetők le. A továbbiakban, hacsak azt külön nem említjük, a tömegpont tömege mindig állandó lesz: $\dot{m}$=0.

Induljunk ki a mozgásegyenletből:

$$\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{3.6}$$

Sorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát skalárisan az $\dot{\mathbf{r}}$ sebességvektorral, ami után az egyenlet bal oldala teljes derivált alakban írható:

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right) = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} \tag{3.8}$$

Integráljuk mind a két oldalt a $[t_1, t_2]$ időtartományra. Ekkor kapjuk, hogy:

$$\left[\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}dt \tag{3.9}$$

A (3.9) egyenlet jobb oldalán lévő integrál neve az $\mathbf{F}$ erő által végzett *munka*:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}dt = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}d\mathbf{r} \equiv W_{12} \tag{3.10}$$

A (3.9) egyenlet bal oldalán álló kifejezést kinetikus energiának nevezzük.

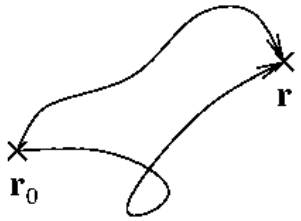
$$E_{\text{kin}} \equiv \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 \tag{3.11}$$

A kapott egyenlőség a *munkatétel*:

$$E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} = W_{12} \tag{3.12}$$

Szavakban: *egy tömegpont kinetikus energiájának a megváltozása egyenlő a rá ható erők munkájával.*

3.4. Mechanikai energia megmaradás



3.1. ábra. A két pályán az erőtér munkája megegyezik, ha a körintegrál zérus.

Tegyük fel, hogy a tömegpontra ható erő olyan, hogy közvetlenül nem függ sem az időtől sem pedig a pont mozgásállapotától, azaz $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektortérrel modellezhető. Továbbá speciálisan olyan, hogy egy zárt görbére vett integrálja zérus, azaz:

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0. \tag{3.13}$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy ennek az erőnek a tér két tetszőleges pontja között végzett munkája nem függ magától a pálya alakjától, csakis a két végpont helyzetétől (Lásd 3.1 ábra), azaz

$$W_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{r} \tag{3.14}$$

független az úttól. Ekkor egy tetszőleges (önkényes) $V(\mathbf{r}_0)$ referencia értékhez képest, definiálható a potenciális energia:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{r} \tag{3.15}$$

A $V(\mathbf{r})$ potenciális energia a tér minden pontjában kiszámítható. Természetesen megadható az inverz kapcsolat is $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ és $V(\mathbf{r})$ között. Vizsgáljuk meg a potenciális energia megváltozását egy kis, infinitezimális Δx elmozdulásra. Ekkor (3.15) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$\Delta V \simeq -F_x \Delta x, \tag{3.16}$$

ahonnan

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = F_x \tag{3.17}$$

Ugyanígy $\partial V / \partial x_i = -F_i$, azaz

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad} V = -\nabla V. \tag{3.18}$$

A jobb oldalon álló matematikai művelet neve gradiens, amely egy skalármező meredekség vektorát határozza meg:

$$\mathrm{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \tag{3.19}$$

Ebben az esetben a munkatétel így írható:

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \Big|_{\mathbf{r}_2} - \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \Big|_{\mathbf{r}_1} = W_{12} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \tag{3.20}$$

Átrendezve:

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \Big|_{\mathbf{r}_1} + V(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \Big|_{\mathbf{r}_2} + V(\mathbf{r}_2) = \text{állandó} \tag{3.21}$$

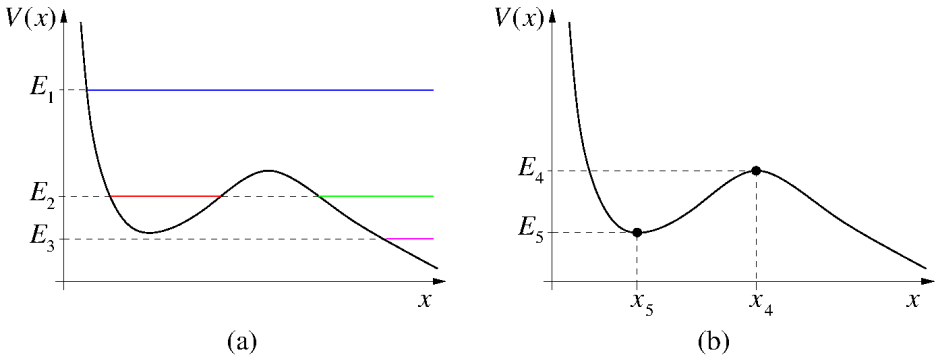
Ez természetesen a tér bármelyik két pontjára igaz. Tehát létezik egy skalár mennyiség, amely a mozgás során állandó marad. Ennek a neve a tömegpont mechanikai energiája, azaz:

$$E_{\mathrm{mech}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \text{állandó} \tag{3.22}$$

Ez a mechanikai energia megmaradásának tétele. Mivel az E_{mech} mechanikai összenergia a mozgás során nem változik az ilyen erőtereket konzervatív erőtérnek nevezzük.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen megkötéseket jelent a tömegpont mozgására, illetve tartózkodási helyére a mechanikai energia megmaradásának tétele. Vizsgájuk az egydimenziós problémát. Ekkor

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \tag{3.23}$$



3.2. ábra. (a) Különböző energiákhoz tartozó klasszikusan megengedett tartományok: kék, zöld, lila: nem kötött állapot, piros: kötött állapot. A szaggatott részek nem megengedett tartományok. (b) egyensúlyi állapotok x_4 instabil, x_5 stabil.

Klasszikusan, a tömegpont nem tartózkodhat olyan helyeken, ahol a potenciál nagyobb értéket vesz fel, mint a tömegpont mechanikai energiája. Ezek a részek a teret úgynevezett klasszikusan megengedett tartományokra tagolják, ahol a potenciálfüggvény nem nagyobb, mint a tömegpont mechanikai energiája $V(x) \leq E$ és ahol a tömegpont előfordulhat.

Egy tömegpont kötött állapotban van, ha véges térrészben tartózkodhat. Például a 3.2 (a) ábrán az E_2 energiához tartozó pirossal jelölt tartománya. Ellenkező esetben nem kötött állapotról beszélünk (3.2 (a) ábrán a kék, zöld és lila részek).

Amennyiben a potenciálnak extrémuma van egy pontban és a tömegpont mechanikai energiája pont megegyezik az itt felvett potenciális energiával (lásd 3.2 (b) ábra), egyensúlyi helyzetről beszélünk. Az egyensúlyi helyzet lehet *stabil*, ha a potenciál második deriváltja pozitív ebben a pontban, illetve *instabil* ellenkező esetben.

3.5. Disszipatív erők. A munkatétel általánosítása

Nem konzervatív mozgás legegyszerűbb példája az egyszerű csúszó súrlódás. Ha egy tömegpont egy vízszintes lapon mozoghat, akkor a síklap és a tömegpont között egy

állandó nagyságú súrlódó erő hat.

Az eddigi tanulmányainkból ez jól ismert jelenség. Azt is tudjuk, hogy a csúszó súrlódási erő függ a tömegpont mozgási állapotától, hiszen mindig a pillanatnyi elmozdulással ellentétes irányban hat, azaz egy sebességvektortól függő erőről van szó. Ennek matematikai alakja

$$\mathbf{F}_s = -\alpha(\mathbf{v}/v), \tag{3.24}$$

feltéve, hogy $v \neq 0$. Mivel a kinematikából tudjuk, hogy a sebességvektor mindig a pálya érintőjével párhuzamos, ezért

$$\mathbf{F}_s = F_s \mathbf{e}_t \tag{3.25}$$

Számoljuk ki egy állandó nagyságú súrlódási erő munkáját egy zárt $\mathcal{S}$ görbén

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}_s d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{S}} F_s \mathbf{e}_t d\mathbf{r} = F_s \oint_{\mathcal{S}} ds = F_s S, \tag{3.26}$$

ahol S a zárt $\mathcal{S}$ görbe hossza. Azaz a súrlódási erő nem konzervatív erő. Nem definiálható egy hozzá tartozó potenciális energiafüggvény. Az ilyen mechanikai rendszereket disszipatív rendszereknek nevezzük és a ható erőket *disszipatív erő*knek. A súrlódási erő tehát disszipatív erő. Ha a tömegpontra egy $\mathbf{F}_k$ konzervatív és egy $\mathbf{F}_s$ disszipatív erő hat, akkor a munkatétel értelmében:

$$\left[\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2\right]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} = \left[-V(\mathbf{r})\right]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} + \oint_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_s d\mathbf{r} \tag{3.27}$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

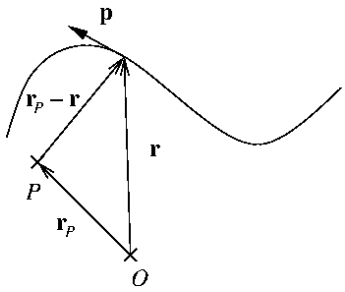
$$\left[E_{\text{kin}} + V(\mathbf{r})\right]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} = \oint_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_s d\mathbf{r} \tag{3.28}$$

Felhasználva a mechanikai energia fogalmát:

$$E(\mathbf{r}) - E(\mathbf{r}_0) = \oint_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_s d\mathbf{r} \tag{3.29}$$

Szavakban megfogalmazva: egy tömegpont mechanikai energiájának a megváltozása a ráható disszipatív erők munkájával egyenlő. Súrlódási erőknél ez mindig negatív. Ebben az esetben tehát a mechanikai energia nem egy megmaradó mennyiség.

Látni fogjuk majd, hogy makroszkopikus skálán definiált disszipatív erő(k) munkáját mikroszkopikus skálán lehet tömegpontok dinamikájaként is értelmezni. Azaz a mikroszkopikus skálán csak két energiafajta van: kinetikus- és potenciális energia.



3.3. ábra. A perdület definíciójához használt vektorok.

3.6. Egyetlen tömegpont perdülete

Az $\mathbf{r}$ helyen lévő, $\mathbf{p}$ impulzusú tömegpontnak egy adott, álló pontra vett perdületét (impulzusmomentumát) a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{L}_P = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{p}. \tag{3.30}$$

A definíciót a 3.3 ábra szemlélteti. A továbbiakban, ha csak külön nem említjük a P pont maga az O origó lesz, ahonnan az $\mathbf{r}$ helyvektort is mérjük. Azaz

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{3.31}$$

Induljunk ki a mozgásegyenletből majd szorozzuk meg balról az egyenletet vektoriálisan a helyvektorral:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{F} \\ \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}}_{=0} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

ahol bevezettük az $\mathbf{F}$ erőnek az origóra vett $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ forgatónyomatékát . A (3.32) egyenlet

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} \tag{3.33}$$

a *perdülettétel*.

3.7. Megmaradási tételek egyetlen tömegpont mozgása során

Az úgynevezett *megmaradási tételek* igen fontos és hasznos szerepet játszanak, nemcsak a mechanikában, hanem a fizika más fejezeteiben is. Ezen tételek első, legegyszerűbb

megnyilvánulásait már egyetlen tömegpont dinamikája esetén is láthatjuk. Legyen a tömegpontra ható összes erők eredője $\mathbf{F} = 0$ zérus, akkor a Newton II. törvénye alapján az impulzusmegmaradás tételéhez jutunk:

$$\mathbf{p} = \text{állandó} \tag{3.34}$$

Ha a tömegpontra ható erők eredőjének a nyomatéka $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ zérus, akkor az impulzusmomentum-megmaradás tételét kapjuk:

$$\mathbf{L} = \text{állandó} \tag{3.35}$$

Ha a tömegpontra csak konzervatív erők hatnak, akkor a mechanikai energia megmaradás törvénye adódik:

$$E = \text{állandó} \tag{3.36}$$

Ezeket a mozgás során állandó dinamikai mennyiségeket *mozgásállandóknak* nevezzük. Összetett mechanikai rendszerek (tömegpontrendszerek) esetén ugyancsak megfogalmazhatók a fenti tételekkel analóg mozgásállandók. Sőt, megmutatható, hogy ezen megmaradási tételek valamilyen alapvető (tér és idő) szimmetria következményei. Ezekről a Mechanika elvei (5) fejezetben ejtünk majd egy-két fontos szót.

3.8. Tömegpont speciális térbeli mozgása: a centrális erőtér

Tekintsünk egy olyan erőteret, amelyben a tömegpontra ható erő a tér minden pontjában egy megadott rögzített pont (legyen ez az origó) irányába mutat. A klasszikus mechanikai körülmények között előforduló erőhatások esetében nincs az erőnek időfüggése, tehát a centrális erőtér matematikai alakja a következő:

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r \tag{3.37}$$

Ilyen például a (Newton-féle) gravitációs erőtér de egy rugó végére erősített test is ilyen erőteret érzékel a mozgása során.

A centrális erőterek definíciójából következnek az alábbiak:

3.1. Következmény *Az izotrópia miatt könnyen belátható, hogy ez az erőtér konzervatív:*

$$\oint \mathbf{F}_c(\mathbf{r})d\mathbf{s} = \oint F(r)\mathbf{e}_r d\mathbf{s} = \oint F(r)dr = 0, \tag{3.38}$$

mivel skalár függvény körintegrálja mindig nulla. A levezetés során a zárt görbe menti infinitezimális elmozdulás-vektorokat most $d\mathbf{s}$*-el jelöltük. Kihasználtuk azt, hogy* $\mathbf{e}_r$ *a*

sugárirányú egységvektor, ezért az $\mathbf{e}_r d\mathbf{s}$ *skalárszorzat* dr*-t, azaz a centrumtól való infinitezimális távolodás mértékét adja. Az erőtér tehát konzervatív, azaz létezik egy* $V_c(r)$ *potenciális energia, ami a (3.15) egyenlethez hasonlóan a következő formába írható:*

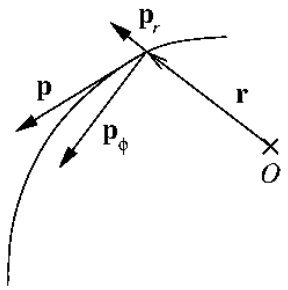
$$V_c(r) = V_0 - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} F(r)dr \tag{3.39}$$

A $V_c(r)$ *ekvipotenciális felületei gömbök.*

3.2. Következmény *A forgató nyomaték mindig nulla:*

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_c = F_c(r) \underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r}_{\mathbf{r}||\mathbf{e}_r} = 0 \tag{3.40}$$

3.3. Következmény *Centrális erőtérben mozgó tömegpont síkmozgást végez. Mivel a forgatónyomaték mindig zérus, ezért a perdület állandó:* $\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v} = mv\mathbf{r}\times\mathbf{e}_t =$ *állandó ezért a pályára merőleges egység vektor is állandó. Azaz a pálya síkja állandó, tehát a tömegpont síkmozgást végez.*



3.4. ábra. Az impulzus felbontása polár koordináta-rendszerben

Mivel síkmozgásról van szó, célszerű síkbeli polár koordináta-rendszerben dolgoznunk.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_r + \mathbf{p}_\phi \tag{3.41}$$

A tömegpont mechanikai energiája kihasználva, hogy $p^2 = p_r^2 + p_\phi^2$ a következőképpen alakul:

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m} + V_c(r) \tag{3.42}$$

Az állandó nagyságú $\mathbf{L}$ perdületből $\mathbf{p}_\phi$ kifejezhető

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (\underbrace{\mathbf{p}_r}_{\mathbf{p}_r||\mathbf{r}} + \mathbf{p}_\phi) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\phi \tag{3.43}$$

mivel $\mathbf{r} \perp \mathbf{p}_\phi$, ezért $L = rp_\phi$. Ezt beírva az energia kifejezésébe, azt kapjuk, hogy

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + V_\mathrm{c}(r)}_{V_\mathrm{eff}(r)}, \tag{3.44}$$

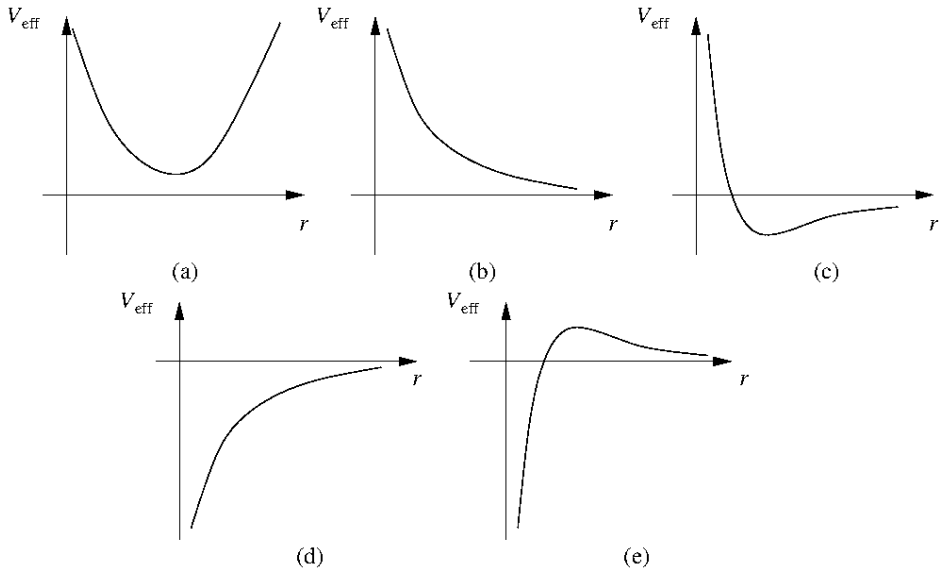
ahol az utolsó két tag csak az origótól vett távolságtól függ és egyesíthető egy *effektív potenciális energiában*:

$$V_\mathrm{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V_\mathrm{c}(r) = V_\mathrm{cf}(r) + V_\mathrm{c}(r) \tag{3.45}$$

Az újonnan bevezetett, első tag neve centrifugális potenciális energia. A centrifugális potenciális energia $\sim 1/r^2$ alakú taszító potenciál, az ehhez tartozó erő nagysága:

$$F_\mathrm{cf} = -\frac{\partial V_\mathrm{cf}}{\partial r} = m\omega^2 r \tag{3.46}$$

Fontos, hogy most egy új koordináta-rendszerre tértünk át, amelyben a tömegpont helyzetét egyetlen koordinátával a centrumból mért távolsággal jellemezzük, miközben a koordináta-rendszer mindig a test felé fordul.



3.5. ábra. Az effektív potenciál lehetséges alakjai hatványfüggvény centrális potenciálban.

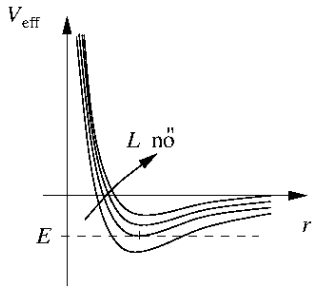
A $V_\mathrm{c}(r)$ potenciáltól függően az effektív potenciál sokféle alakot vehet fel. Mivel a természetben általában ilyenek fordulnak elő, tegyük fel hogy a potenciál a sugárnak

hatványfüggvénye $V_c(r) = \alpha r^\beta$. Ekkor az 3.5. ábrán látható alakokat veheti fel az effektív potenciál. β értékei a következők lehetnek:

β	α	Effektiv potenciál 3.5. ábra
$\beta > 0$	$\alpha > 0$	(a)
$\beta <= 0$	$\alpha > 0$	(b)
$0 > \beta > -2$	$\alpha < 0$	(c)
$\beta = -2$	$\alpha < -L^2/2m$	(d)
$\beta < -2$	$\alpha < 0$	(e)

A különböző potenciálok hatása leginkább a szóráselméletben kap nagy jelentőséget. Érdemes megfigyelni, hogy két esetben (a) és (c) létrejöhet kötött állapot. Ez különleges jelentőséggel bír, mivel ez esetben zárt pályákat figyelhetünk meg.

Az (a) esetre, legegyszerűbb példa a harmonikus oszcillátor potenciál függvénye $V_c(r) = \alpha r^2$. Ezt a potenciált érzi egy rugó végére erősített test. Itt csak kötött pályák figyelhetők meg, sőt visszatérve Descartes koordináta-rendszerre könnyen belátható, hogy a pályák általában ellipszis alakúak, de ha a mechanikai energia pont az effektív potenciál minimumával egyenlő, akkor a pálya kör alakú lesz, hiszen ekkor csak egy sugár megengedett a tömegpont számára.



3.6. ábra. Az effektív potenciál gravitációs kölcsönhatás esetén különböző perdületű tömegpontra.

A (c) esetre a legtipikusabb példa a gravitációs potenciál $V_c(r) = -|\alpha|/r$. Kötött állapot csak $E < 0$ esetén jöhet létre. Mint az a 3.6 ábrán látható kötött állapotok esetén azonos energián mindig a körpálya perdülete a legnagyobb. Hasonlóan adott perdület esetén a körpálya energiája a legalacsonyabb.

Határozzuk meg a centrális erőtérben mozgó tömegpont pályájának alakját! Indul-

junk ki a mechanikai energiából:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$
$$\frac{dr}{dt} = \pm|\dot{\mathbf{r}}| = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]} \tag{3.47}$$

A szögsebességet a perdületből tudjuk meghatározni:

$$L = mr^2\omega = mr^2\dot{\phi}$$
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \tag{3.48}$$

Osszuk el egymással a (3.47) és (3.48) egyenleteket:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{\pm r^2\sqrt{2m(E - V_{\text{eff}})}} \tag{3.49}$$

Ezek után V_{eff} ismeretében a $\phi(r)$, majd ebből az $r(\phi)$ meghatározható. Ránézve az egyenletekre könnyen belátható, hogy analitikus megoldások csak speciális $V_{\text{c}}(r)$-nél adódnak. Erre nézzünk két példát!

3.1. Feladat *Ha nincs semmilyen kölcsönhatás, azaz $V_c(r) = 0$, akkor a pálya Newton I értelmében a pálya egyenesvonalú egyenletes mozgás. Ezt szeretnénk visszakapni a (3.49) egyenlet segítségével.*

Legyen az m tömegű test sebessége v, ekkor $E = mv^2/2$. A sebesség által meghatározott egyenes és az origó távolsága d, ekkor $L = mdv$. A (3.49) egyenlet a következőképpen alakul:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{\pm r^2\sqrt{2m\left(E - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} = \frac{d}{\pm r^2\sqrt{1 - \frac{d^2}{r^2}}} = \frac{d\arccos(d/r)}{dr} \tag{3.50}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $d = r\cos\phi$, ez pedig tényleg az origótól d távolságra lévő egyenes egyenlete.

3.2. Feladat *Gravitáció esetén $V_c(r) = -\alpha/r$ a pályák kúpszeletek. Csináljuk fordítva a bizonyítást. Tudjuk, hogy a kúpszelet egyenlete a következő [1]*

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon\cos\phi} \tag{3.51}$$

Ebből számolható a ϕ távolság szerinti deriváltja:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{k}{r^2\sqrt{e^2 - 1 - k^2/r^2 + 2k/r}} \tag{3.52}$$

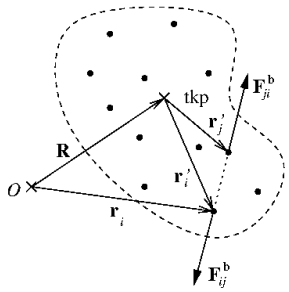
Amiből (3.49) egyenletet kihasználva azt kapjuk, hogy

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2 m}} \tag{3.53}$$

ami $e > 0$ esetén hiperbolát, $E = 0$ esetén parabolát, $E < 0$ esetén ellipszist ad és jól látható, hogy van egy minimális energia, amikor a pálya kör alakú. Adott L perdület esetén ennél kisebb energiával nem létezik pálya, azaz $E \geq -\alpha^2 m/2L^2$.

4. fejezet

Tömegpont-rendszerek



4.1. ábra. Pontrendeszer szemléltetése. A tömegpontok helyvektora az origóból a $\mathbf{r}_i$, az $\mathbf{R}$ tömegközéppontból a $\mathbf{r}'_i$ helyvektor. Az i tömegpontból a j tömegpontra ható erőt a $\mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{ji}$ vektor jelöli.

Egy N tömegpontból álló rendszert tömegpont-rendszernek nevezünk (lásd 4.1 ábra). Jelölje az i-edik tömegpont tömegét m_i, helyvektorát $\mathbf{r}_i$. Vezessük be továbbá a pontrendszer

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{4.1}$$

össztömegét, valamint a tömegközéppont

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \tag{4.2}$$

helyvektorát. Ha a tömegpontok tömege állandó, akkor (4.2) deriválása után a tömeg-

középpont sebessége és gyorsulása:

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i,$$
$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i. \tag{4.3}$$

Azt a külső vonatkoztatási rendszert, amelyben a pontrendszer megfigyelését végezzük, laboratóriumi rendszernek (L) nevezzük. Emellett szokás bevezetni a tömegközépponti-rendszert (TK), ami olyan vonatkoztatási rendszer, amelynek origója a tömegközéppont. A két rendszerben a tömegpont helyvektorai között fenn áll az

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \tag{4.4}$$

összefüggés, ahol $\mathbf{r}_i$ a laboratóriumi-rendszerbeli, $\mathbf{r}'_i$ pedig a tömegközépponti-rendszerbeli helyvektorok. Nyilvánvalóan tömegközépponti rendszerben a tömegközéppont helyvektora a nullvektor, azaz $\mathbf{R} = \dot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$. Ezt (4.2) és (4.3) egyenletekbe helyettesítve kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{0}. \tag{4.5}$$

Egy tömegpontra ható erő két összetevőből áll: a rendszeren kívülről ható külső erőkből és a rendszer tagjai által kifejtett belső erőkből. Ez alapján az i-edik tömegpontra ható eredő erő:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \mathbf{F}_i^{\mathrm{b}} = \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}^{\mathrm{b}}, \tag{4.6}$$

ahol $\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}}$ a tömegpontra ható külső erők eredője, $\mathbf{F}_i^{\mathrm{b}}$ a tömegpontra ható belső erők eredője, $\mathbf{F}_{ij}^{\mathrm{b}}$ pedig a j-edik tömegpont által az i-edik tömegpontra kifejtett belső erő. Így az i-edik tömegpontra vonatkozó Newton-féle mozgásegyenlet:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}^{\mathrm{b}}, \tag{4.7}$$

ahol $i = 1, \ldots, N$. (4.7) egy $3N$ egyenletből álló másodrendű differenciálegyenletrendszer, amely az $\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_{0i}$ és $\dot{\mathbf{r}}_i(0) = \mathbf{v}_{0i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ kezdeti feltételek ismeretében elméletileg megoldható. Mivel azonban a fenti egyenletben a belső erők sokszor nem lineárisan függenek a tömegpontok távolságától, ezért általános esetben az egyenletrendszer megoldása már $N = 3$ esetén sem lehetséges zárt alakban. Azonban léteznek a pontrendszernek olyan általános dinamikai sajátosságai, amelyek nem függnek a tömegpontok

közötti kölcsönhatásoktól. Ezek (éppen az általánosságuk miatt) a részletes dinamikát nem tartalmazzák, de makroszkopikus skálán fontos ismereteket nyújtanak számunkra a rendszer fő dinamikai sajátosságairól.

4.1. Tömegközéppont-tétel

Induljunk ki a rendszer (4.7) mozgásegyenletéből és összegezzük azt valamennyi tömegpontra:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}^{\mathrm{b}}. \tag{4.8}$$

A bal oldal (4.3) alapján $M\ddot{\mathbf{R}}$-ként írható fel. A jobb oldal első tagja a rendszerre ható külső erők $\mathbf{F}^{\mathrm{k}}$ eredője. A második tagban az összes belső erő szerepel, vagyis szerepel benne minden $\mathbf{F}_{ij}$ erőnek az $\mathbf{F}_{ji}$ ellenerője, melyek Newton III. törvénye szerint kiejtik egymást, így ez az összeg zérus. Ezzel az (4.8) mozgásegyenlet a következő alakot ölti:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{\mathrm{k}}. \tag{4.9}$$

Ez a *tömegközéppont-tétel*, amely azt fejezi ki, hogy egy pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer teljes tömege ebbe a pontba lenne sűrítve és a külső erők eredője a tömegközéppontra hatna. A tömegközéppont-tétel miatt használható jól a tömegpont fogalma.

4.2. Pontrendszer impulzustétele

Az (4.7) egyenletben felhasználva, hogy $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$ és ismét összegezve a tömegpontokra:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}^{\mathrm{b}}, \tag{4.10}$$

ahol a bal oldal ezúttal a pontrendszer $\mathbf{P}$ összimpulzusának időbeli változása, mellyel a fenti egyenlet a

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\mathrm{k}}. \tag{4.11}$$

alakba írható.

Ez a *pontrendszer impulzustétele*, mely azt fejezi ki, hogy egy pontrendszer összimpulzusát csak a külső erők változtathatják meg. Ha a külső erők eredője zérus, a rendszer összimpulzusa időbeli állandó marad.

4.3. Pontrendszer munkatétele

A tömegpont munkatételének levezetése során alkalmazott módszer mintájára szorozzuk be az i-edik tömegpontra vonatkozó (4.7) mozgásegyenletet $\dot{\mathbf{r}}_i$-tal:

$$\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}}\dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\mathbf{F}_{ij}^{\mathrm{b}}\dot{\mathbf{r}}_i = m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2\right) = \dot{K}_i, \tag{4.12}$$

ahol K_i az i-edik tömegpont kinetikus energiája. Ezt összegezve az összes tömegpontra és a derivált linearitását kihasználva:

$$\sum_{i=1}^{N}\dot{K}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}K_i = \dot{K} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}}\dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\mathbf{F}_{ij}^{\mathrm{b}}\dot{\mathbf{r}}_i, \tag{4.13}$$

ahol K a tömegpont-rendszer teljes kinetikus energiája.

Vizsgáljuk meg az (4.13) egyenlet tagjait külön-külön: $\dot{\mathbf{r}}_i$ helyébe helyettesítsük (4.4)-t, majd a zárójelek felbontása után használjuk fel a (4.5) összefüggéseket. A rendszer kinetikus energiája:

$$K = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\dot{\mathbf{R}}+\dot{\mathbf{r}}_i'\right)^2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{R}}^2\sum_{i=1}^{N}m_i + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i'^2 + \underbrace{2\dot{\mathbf{R}}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\mathbf{r}}_i'}_{=0}. \tag{4.14}$$

Tömegközépponti rendszerben a tömegpont helyvektora, és annak idő szerinti deriváltja is zérus, ezért nulla az utolsó tag. Tovább írva a kifejezést:

$$K = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}'^2 = K_{\mathrm{TR}} + K^{\mathrm{b}}. \tag{4.15}$$

Itt K_{TR} a *transzlációs kinetikus energia*, amely a tömegközéppont kinetikus energiájának felel meg, K^{b} a *belső kinetikus energia*, amely a tömegpontok tömegközépponthoz viszonyított sebességéből származik. Ez utóbbi adódhat rendezetlen mozgásból (például hőmozgásból), vagy rendezett mozgásból (például forgómozgásból).

A (4.13) egyenlet jobb oldalának első tagja:

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}}\left(\dot{\mathbf{R}}+\dot{\mathbf{r}}_i'\right) = \dot{\mathbf{R}}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}}\dot{\mathbf{r}}_i' = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{F}^{\mathrm{k}} + \sum_{i=1}^{N}P_i^{\mathrm{k}} = P_{\mathrm{TKP}}^{\mathrm{k}} + P^{\mathrm{k}}, \tag{4.16}$$

ahol $P_{\mathrm{TKP}}^{\mathrm{k}}$ a külső erőknek a tömegközéppontra vonatkozó látszólagos teljesítménye, P^{k} a külső erők összteljesítménye a tömegközépponti rendszerben.

A (4.13) egyenlet jobb oldalának második tagja felhasználva, hogy $\mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{ij} = -\mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{ji}$:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{ij}\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{ij}\dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{ji}\dot{\mathbf{r}}_j\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{ij}\left(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{ij}\dot{\mathbf{r}}_{ij} = P^{\mathrm{b}}, \tag{4.17}$$

ahol P^{b} a belső erők összteljesítménye tömegközépponti rendszerben, $\dot{\mathbf{r}}_{ij}$ pedig az i-edik tömegpontból a j-edik tömegpontba mutató vektor időderiváltja.

Az utóbbi eredmények felhasználásával a (4.13) egyenlet egyszerűbb alakra hozható:

$$\dot{K}_{\mathrm{TR}} + \dot{K}_{\mathrm{b}} = P^{\mathrm{k}}_{\mathrm{TKP}} + P^{\mathrm{k}} + P^{\mathrm{b}}. \tag{4.18}$$

A további egyszerűsítés érdekében a (4.9) tömegközéppont-tétel esetében is kövessük a tömegpont munkatételének levezetése során alkalmazott módszert és szorozzunk be $\dot{\mathbf{R}}$-tal:

$$P^{\mathrm{k}}_{\mathrm{TKP}} = \mathbf{F}^{\mathrm{k}}\dot{\mathbf{R}} = M\ddot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2\right) = \dot{K}_{\mathrm{TR}} \tag{4.19}$$

(4.18)–(4.19) felhasználásával:

$$\begin{aligned}\dot{K}_{\mathrm{TR}} &= P^{\mathrm{k}}_{\mathrm{TKP}}\\ \dot{K}^{\mathrm{b}} &= P^{\mathrm{k}} + P^{\mathrm{b}}\end{aligned} \tag{4.20}$$

Vagyis a pontrendszerre vonatkozó differenciális munkatétel két állítást tesz:

1. A pontrendszer transzlációs kinetikus energiájának időbeli változása a külső erők tömegközéppontra vonatkozó látszólagos teljesítményével egyenlő. Ha ez utóbbi zérus, akkor a rendszer transzlációs kinetikus energiája időben állandó marad.

2. A pontrendszer belső kinetikus energiájának időbeli változása a belső- és külső erők tömegközépponti-rendszerbeli összteljesítményének összegével egyenlő. Ha ez utóbbiak nullák, akkor a rendszer belső kinetikus energiája időben állandó marad.

Ha a belső erők konzervatívak, azaz létezik potenciális energia:

$$P^{\mathrm{b}} = \dot{W}^{\mathrm{b}} = -\dot{V}^{\mathrm{b}}, \tag{4.21}$$

amit (4.20)-be helyettesítve:

$$\dot{K}^{\mathrm{b}} = P^{\mathrm{k}} - \dot{V}^{\mathrm{b}} \Longrightarrow P^{\mathrm{k}} = \frac{d}{dt}\left(K^{\mathrm{b}} + V^{\mathrm{b}}\right) = \frac{d}{dt}U, \tag{4.22}$$

ahol U a rendszer teljes belső energiája. Az utóbbi eredmény szerint a rendszer teljes belső energiájának időbeli változása a külső erők tömegközépponti-rendszerbeli összteljesítményével egyenlő.

4.4. Pontrendszer perdülettétele

Írjuk fel az i-edik tömegpont origóra vett perdületét, majd a tömegpontokra való összegzést követően $\mathbf{r}_i$ helyébe helyettesítsük (4.4)-t és használjuk fel a (4.5) összefüggéseket:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i \left(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i\right) = \tag{4.23}$$

$$= \mathbf{R} \times m_i \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i, \tag{4.24}$$

amit összegezve valamennyi tömegpontra és felhasználva a (4.5) összefüggéseket:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i \left(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i\right) = \tag{4.25}$$

$$= \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^{N} m_i + \mathbf{R} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i}_{=0} - \dot{\mathbf{R}} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}'_i}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \tag{4.26}$$

$$= \mathbf{R} \times M \dot{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{L}_{\mathrm{TKP}} + \mathbf{S}, \tag{4.27}$$

ahol $\mathbf{L}_{\mathrm{TKP}}$ a tömegközéppont origóra vett perdülete, $\mathbf{S}$ a belső perdület (spin), amely a tömegpontoknak tömegközépponti-rendszerben a tömegközéppontra vett összperdülete.

A rendszer perdületváltozása:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{TKP}} + \dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{L}}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \tag{4.28}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\dot{\mathbf{r}}_i \parallel \mathbf{p}_i$, így keresztszorzatuk zérus. (4.28) jobb oldalán $\mathbf{r}_i$ helyébe (4.4)-t helyettesítve, a tömegpontra ható erőt pedig külső- és belső erők összegeként felírva, majd felhasználva az (4.5) összefüggéseket:

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times \left(\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \mathbf{F}_i^{\mathrm{b}}\right) = \tag{4.29}$$

$$= \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \mathbf{R} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\mathrm{b}}}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{\mathrm{b}} = \tag{4.30}$$

$$= \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{\mathrm{k}} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}^{\mathrm{b}} = \tag{4.31}$$

$$= \mathbf{M}_{\mathrm{TKP}}^{\mathrm{k}} + \mathbf{M}^{\mathrm{k}} + \mathbf{M}^{\mathrm{b}}, \tag{4.32}$$

ahol $\mathbf{M}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{TKP}}$ a külső erők origóra vonatkozó, tömegközéppontra ható forgatónyomatéka, $\mathbf{M}^{\mathrm{k}}$ a külső erők forgatónyomatéka tömegközépponti-rendszerben, $\mathbf{M}^{\mathrm{b}}$ pedig a belső erők forgatónyomatéka tömegközépponti-rendszerben. Ha a tömegpontok között ható erők centrálisak, azaz $\mathbf{r}_{ij} \parallel \mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{ij}$, az utolsó tag eltűnik. Ekkor a (4.28) egyenlet a következőképpen írható:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{TKP}} + \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{M}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{TKP}} + \mathbf{M}^{\mathrm{k}}. \tag{4.33}$$

A további egyszerűsítés érdekében deriváljuk idő szerint az $\mathbf{L}_{\mathrm{TKP}}$-t definiáló összefüggést:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{TKP}} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}}\right) = \dot{\mathbf{R}} \times M\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{\mathrm{k}} = \mathbf{M}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{TKP}}, \tag{4.34}$$

amit (4.33)-ben felhasználva:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{TKP}} = \mathbf{M}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{TKP}} \tag{4.35a}$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{M}^{\mathrm{k}} \tag{4.35b}$$

Tehát centrális erők esetében a pontrendszerre vonatkozó perdülettétel a következő két állítást teszi:

1. Pontrendszer tömegközéppontjának origóra vett perdületének időbeli változása a külső erők tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomatékával egyenlő. Ha ez utóbbi zérus, akkor a tömegközéppont origóra vett perdülete időben állandó marad.

2. Pontrendszer belső perdületének időbeli változása a külső erők tömegközépponti-rendszerbeli forgatónyomatékával egyenlő. Ha ez utóbbi zérus, akkor a rendszer belső perdülete időben állandó marad.

5. fejezet

A mechanika elvei

Mint azt láttuk a klasszikus mechanika egy „axiomatikus” modell a makroszkopikus testek (dinamikai) viselkedésének a megértéséhez. Természetesen itt az axióma nem a matematikai szigorúsággal értendő. Pusztán annyit jelent, hogy kísérleti megfigyeléseken alapuló tények sokaságából kiválasztjuk azt a lehető legkisebb számút, amelyek segítségével a többi (lehetőleg összes) mechanikai jelenség logikusan levezethető. A logikusság itt matematikai formalizmusban mutatkozik meg.

A Newton-törvények (vagy Newton axiómák) adják a klasszikus mechanika alaptörvényeit. A Newtont követő fizikusok (D'Alambert, Euler, Lagrange, Hamilton,...) megpróbálták a mozgástörvényt más formában is megfogalmazni. Ezeket ma a „mechanika elvei”-ként tartjuk számon.

Ezek az elvek nem lépnek túl a newtoni mechanika határain, így ha van potenciál ekvivalens megfogalmazásai a klasszikus mechanikai modelljeinknek. Mégis van egy fontos sajátosságuk, amely a Newton-féle mozgástörvényekkel szemben nagy elvi előnynek bizonyult. Ez pedig az, hogy olyan formában fogalmazzák meg a dinamika alaptörvényét, amely közvetlenül általánosítható a mikrofizika irányába. Mindez természetesen csak utólag derült ki. A kísérleti tapasztalatok hatására, a XX. század első évtizedeiben, ezen elméleti alapok tették lehetővé a kvantummechanika megszületését.

5.1. Általános koordináták

Egy N tömegpontból álló, d dimenziós rendszer állapotát dN darab Descartes-koordinátával jellemezhetjük. Ha a rendszerben valamilyen kényszser feltétel, azaz koordináták közti kapcsolat van jelen, akkor a koordináták nem lesznek egymástól függetlenek, így s darab *kényszer* esetén a koordináták közti összefüggéseket s darab egyenlet fogja leírni. Így a jellemzéshez szükséges szabad paraméterek számát, vagyis a rendszer *szabadsági fokát* az

$$f = dN - s \tag{5.1}$$

összefüggés adja meg.

A Descartes-koordináták helyett azonban használhatjuk a rendszer tetszőleges f darab, független paraméterét, amelyek a rendszer állapotát egyértelműen leírják. Ezek az úgynevezett *általános koordináták*.

5.2. A legkisebb hatás elve – Variációszámítás

A következőkben egy axiómát fogunk kimondani, először azonban definiáljuk a szükséges alapfogalmakat.

5.1. Definíció (Hatásintegrál) *Azt az $S[\,.\,]$ funkcionált, amit az*

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt \tag{5.2}$$

összefüggés definiál hatásintegrálnak nevezzük, ahol az

$$\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \tag{5.3a}$$
$$\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2 \tag{5.3b}$$

összefüggések a peremfeltételek.

A fenti definícióban szereplő $\mathcal{L}$ függvény az úgynevezett *Lagrange függvény*, mely egyértelműen jellemzi a rendszer mozgását. A lehetséges $\mathbf{q}(t)$ trajektóriák közül a valóságban az fog megvalósulni, amelyik esetén a hatásintegrál minimális. Ez az axióma a *legkisebb hatás elve*.

A fent megfogalmazott feladat a *variációszámítás alapfeladata*, megoldásának egyik lehetséges módját az Euler-Lagrange formula adja meg.

5.2. Tétel (Euler-Lagrange formula) *A fenti módon definiált hatásfüggvény minimális, ha bármely $i = 1, \ldots, k$ teljesül a*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{5.4}$$

összefüggés.

Bizonyítás. A bizonyításhoz a szélsőérték számításból használt analógiát fogjuk használni. Egy f függvénynek szélsőértéke van azon a helyen, ahol a függvény értékét infinitezimálisan megváltoztatva a függvény értéke nem változik, tehát $df = 0$. Hasonlóan egy S funkcionál minimális (v. maximális), ha az argumentumában szereplő $\mathbf{q}(t)$ függvényhez

egy „kicsi” $\delta\mathbf{q}(t)$ függvénnyel megváltoztatjuk, akkor az S ily módon definiált megváltozása, úgynevezett *variációja*, nullával egyenlő, tehát $\delta S = 0$. Felhasználva S definícióját, a variáció átírható a

$$\delta S = S[\mathbf{q} + d\mathbf{q}] - S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} [\mathcal{L}(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)]dt = 0 \tag{5.5}$$

alakba. Ezt $\delta\mathbf{q}$ és $\delta\dot{\mathbf{q}}$ szerint sorba fejtjük első rendig:

$$\begin{aligned}\delta S &\approx \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)\right] dt = 0.\end{aligned} \tag{5.6}$$

A második tagot parciálisan integrálhatjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)dt = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt. \tag{5.7}$$

Mivel a peremfeltételeknek $\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}$-ra is teljesülniük kell, ezért $\delta\mathbf{q}(t_{1,2}) = 0$. Ez alapján a fenti képlet első tagja nullával egyenlő. Az így kapott eredményt visszahelyettesítve a

$$\delta S \approx \sum_{i=1}^{f} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt = 0 \tag{5.8}$$

összefüggést kapjuk, ami akkor és csak akkor teljesül, ha bármely δq_i-re, ahol ($i = 1, \ldots, f$) ha a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{5.9}$$

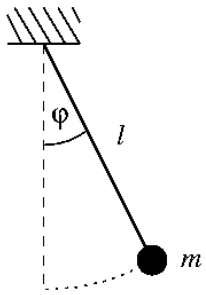
Euler-Lagrange differenciálegyenlet teljesül. □

Megmutatható, hogy konzervatív rendszerben a Lagrange függvény nem tartalmaz explicit időfüggést és a rendszer kinetikus és potenciális energiájának különbségével egyezik meg:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}). \tag{5.10}$$

5.1. Feladat (Matematikai inga)

Írjuk fel a matematikai inga mozgási energiáját a Lagrange-formalizmus felhasználásával (5.1 ábra)! A rendszer két dimenziós, egy tömegpontból áll és egy kényszer van jelen (ℓ = állandó), így a szabadsági fokok száma: $f = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, így egy általános



5.1. ábra. A matematikai inga.

koordinátát választhatunk szabadon. A geometriai elrendezés miatt ebben az esetben legcélszerűbb a φ szögelfordulást választani. Írjuk fel az inga mozgásegyenletét először Descartes-koordinátákkal:

$$K(x,y) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{5.11}$$

Majd kihasználva a kényszerfeltételt áttérhetünk φ általános koordinátára:

$$\begin{aligned} x &= \ell \sin\varphi \\ y &= \ell \cos\varphi, \end{aligned} \tag{5.12}$$

ezt felhasználva a kinetikus energia a

$$K(\dot{\varphi},\varphi) = \frac{1}{2}m\left[(\ell\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\ell\dot{\varphi}\cos\varphi)^2\right] = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\varphi})^2 \tag{5.13}$$

alakban írható fel. A potenciális energia hasonlóan határozható meg:

$$V(x,y) = -mgy = -mg\ell\cos\varphi, \tag{5.14}$$

ahol a potenciális energia nullszintjének a felfüggesztési ponton átmenő vízszintes síkot választottuk. Tehát a matematikai inga Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L}(\dot{\varphi},\varphi) = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\varphi})^2 + mg\ell\cos\varphi. \tag{5.15}$$

Ezt behelyettesítve (5.9) egyenletbe megkapjuk az inga jól ismert mozgásegyenletét:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} &= -mg\ell\sin\varphi - \frac{d}{dt}m\ell^2\dot{\varphi} \\ -mg\ell\sin\varphi &= m\ell^2\ddot{\varphi} \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.3. Hamilton-formalizmus

A *Hamilton-formalizmus* jelentős újrafogalmazása a klasszikus mechanikának, amelynek igazi fontossága a kvantum mechanika leírásánál kerül előtérbe.

Először vezessük az *általános impulzust* az alábbi módon:

5.3. Definíció (Általános impulzus) *A q_i általános koordinátához tartozó p_i általános impulzus a*

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \tag{5.17}$$

összefüggéssel leírt mennyiség.

A fenti definíciót behelyettesítve az Euler-Lagrange egyenletbe a következőhöz jutunk:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \tag{5.18}$$

Ezután írjuk fel a Lagrange-függvény teljes differenciálját, felhasználva az általános impulzus definícióját:

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{f} \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^{f} p_i d\dot{q}_i. \tag{5.19}$$

Felhasználva a szorzat függvény differenciálási szabályát a fenti egyenletet az alábbi módon alakíthatjuk át:

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{f} \dot{p}_i dq_i + d\left(\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i dp_i. \tag{5.20}$$

Definiáljuk egy rendszer *Hamilton-függvényét* a rendszer teljes energiájával, de úgy hogy az $\mathbf{q}$ és $\mathbf{p}$ változókkal fejezzük ki:

5.4. Definíció (Hamilton-függvény) *Egy mechanikai rendszer $\mathcal{H}$ Hamilton-függvénye tehát*

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{5.21}$$

Az 5.10 egyenlet alapján, konzervatív rendszer esetében a Hamilton-függvény az alábbiak szerint írható:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{5.22}$$

A Hamilton-függvény segítségével az alábbi alakhoz jutunk:

$$d\left(\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}\right) = \sum_{i=1}^{f} \dot{p}_i dq_i - \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i dp_i = d\mathcal{H}. \tag{5.23}$$

Ezek alapján megkaphatjuk az úgynevezett *Hamilton-féle kanonikus egyenleteket*:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \tag{5.24a}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}, \tag{5.24b}$$

ezek $2f$ számú elsőrendű differenciálegyenletet jelentenek.

Tekintsük ismét a matematikai ingát, írjuk fel a φ-hez tartozó általános impulzust:

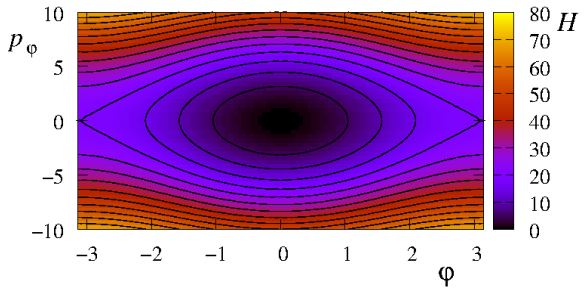
$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi}. \tag{5.25}$$

Ez alapján felírhatjuk a matematikai inga Hamilton-függvényét:

$$E(\varphi, \dot{\varphi}) = m(\ell\dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2}m(\ell\dot{\varphi})^2 - mg\ell\cos\varphi = \frac{p_\varphi^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos\varphi = \mathcal{H}(\varphi, p_\varphi). \tag{5.26}$$

A Hamilton-függvény szintvonalai (illetve magasabb dimenzióban szintfelületei) az azonos energiájú állapotokat jelölik. Ez a mechanikai rendszer *energiatérképe*.

Felrajzolva a matematikai inga energiatérképét (5.2 ábra) a tapasztalatnak megfelelő eredményeket kapunk.

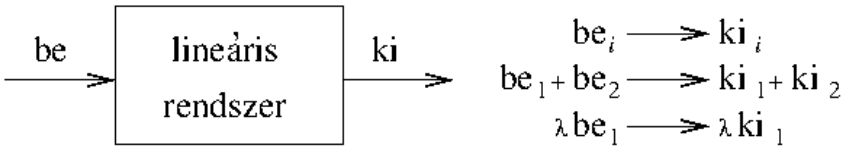


5.2. ábra. A matematikai inga energiatérképe.

6. fejezet

Lineáris rendszerek analízise - lineáris mechanikai oszcillátor

6.1. Lineáris rendszer definíciója



6.1. ábra. Lineáris rendszer.

Mielőtt elkezdenénk a csillapított harmonikus oszcillátor vizsgálatát, ismételjük át még egyszer mit is értünk lineáris rendszeren! A lineáris függvény definíciója a következő:

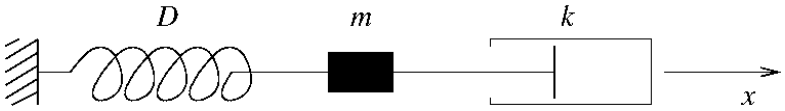
$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(ax) &= af(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

A lineáris rendszer definíciója ezzel teljesen analóg, a bemenet és a kimenet között van lineáris kapcsolat, bármi legyen is a bemenet, vagy a kimenet. Amint majd látni fogjuk a harmonikus csillapított oszcillátor esetében ezek függvények lesznek.

6.2. Harmonikus oszcillátor

Felmerülhet a kérdés, hogy miképpen kerül egy egyszerű, speciális mechanikai rendszer az általános érdeklődésünk középpontjába (és a fizikus indulóba). A válasz egyszerű. A lineáris mechanikai oszcillátornak olyan tulajdonságai vannak, amelyek alkalmassá teszik

őt arra, hogy a példáján keresztül betekintést nyerjünk a lineáris rendszerek jellegzetes viselkedésébe. Mivel a feladat szemléletes, hétköznapi, makroszkopikus tapasztalatokon alapul, ezért könnyen megérthető. Ennek kapcsán pedig általános törvényeket ismerhetünk fel. Ezek aztán a fizika más területein is sikerrel alkalmazhatók.



6.2. ábra. Csillapított harmonikus oszcillátor

Tekintsük az 6.2 ábrán látható csillapított harmonikus mechanikai oszcillátort. Ennek egy konkrét megvalósítása a következő. Legyen egy m tömegű pont, amelyet egy rugóval az x tengely origójához erősítettünk. A rugó nyugalmi hossza zérus és erősségét a D rugóállandóval jellemezzük. Hasson a tömegpontra egy sebességgel arányos csillapító erő is a csillapítás erőssége legyen k. A mozgásegyenlet egy dimenzióban a következő:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} \tag{6.2}$$

Érdemes átrendezni az egyenletet:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \tag{6.3}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{6.4}$$

ahol bevezettük a

$$\alpha = \frac{k}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{6.5}$$

A (6.4) egyenlet alakját tekintve egy *állandó együtthatójú, másodrendű, közönséges, lineáris, homogén differenciálegyenlet. Állandó együtthatójú*, mert $\{\alpha, \omega_0\}$ időtől független állandók. *közönséges*, mert csak egy változós függvény $x(t)$ szerepel benne *másodrendű* mert x második deriváltját tartalmazza, *lineáris*, mert a keresett $x(t)$ függvényen csak lineáris matematikai műveleteket hajtunk végre (nincsen benne pl. x^2, $\sin(x)$ kifejezés). Végül azért *homogén*, mert az egyenlet jobb oldalán 0 szerepel, azaz nincs x-ben konstans tag. Ha ott egy tetszőleges előre megadott $f(t)$ függvény volna, akkor az egyenlet *inhomogén* lenne. Ilyenekkel később még foglalkozunk. Mint majd látni fogjuk a fenti elnevezések önmagukon túlmutató jelentőséggel bírnak és többségüket ki fogjuk használni.

Mivel az egyenlet másodrendű differenciálegyenlet ezért két kezdeti feltételre van szükségünk $x(t)$ meghatározásához:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{6.6}$$

A (6.4) egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$x(t) = e^{\lambda t} \tag{6.7}$$

ekkor ugyanis $\dot{x} = \lambda \exp(\lambda t)$, illetve $\ddot{x} = \lambda^2 \exp(\lambda t)$, és így

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2)}_{=0} e^{\lambda t} = 0. \tag{6.8}$$

Mivel a fenti egyenletnek tetszőleges időpontban igaznak kell lennie, ezért a zárójelben szereplő kifejezésnek nullának kell lennie:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{6.9}$$

Amint látható ez egy λ-ban másodfokú egyenletre vezetett. Megoldása:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \tag{6.10}$$

Az egyenletnek mindkét λ megoldása, mivel (6.4) egyenlet lineáris ezért az egyenlet megoldása a két lambdához tartozó megoldás lineáris kombinációja lesz:

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{6.11}$$

ahol $\{a_1, a_2\}$ együtthatók a kezdeti feltételből határozhatók meg.

Jól látható, hogy a fenti általános megoldással vannak problémák, mivel bizonyos esetben $\lambda_1 = \lambda_2$, illetve az $x(t)$ helyfüggvény akár komplexnek is adódhat. Ezeket az eseteket külön megvizsgáljuk.

6.2.1. Túlcsillapítás

Tegyük fel, hogy $\alpha > \omega_0$, azaz $k > \sqrt{4mD}$. Ebben az esetben a (6.10) egyenlet megoldásai különbözőek és valósak és ráadásul negatívak:

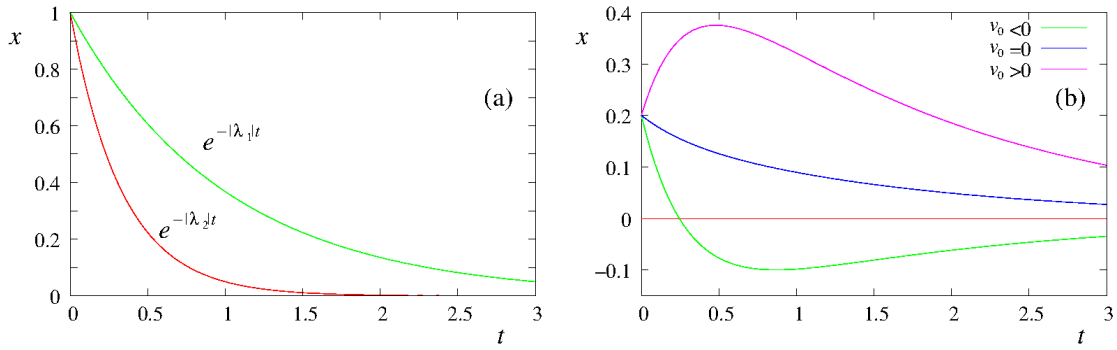
$$\lambda_1 = -|\lambda_1|, \quad \lambda_2 = -|\lambda_2| \tag{6.12}$$

Az $\{a_1, a_2\}$ együtthatókat az alábbi lineáris egyenletrendszerből tudjuk meghatározni:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= x_0 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 &= v_0 \end{aligned} \tag{6.13}$$

A mozgást pedig a (6.11) általános megoldás adja meg.

A túlcsillapított eset jellegzetes mozgásaira a 6.3 ábra mutat példákat.



6.3. ábra. (a) A két exponenciális részmegoldás, (b) egy-egy példa az $x(t)$ függvényre különböző kezdősebesség esetén.

6.2.2. Határcsillapítás

Ebben az esetben $\alpha = \omega_0$, azaz $k = \sqrt{4mD}$. Ekkor, mivel $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ ezért látszólag csak egy megoldása van a (6.4) egyenletnek. Ez azonban nem elegendő, hiszen két kezdeti feltételünk $\{x_0, a_0\}$ van. Azonban a $\alpha = \omega_0$, esetén az egyenletnek van egy másik speciális megoldása. Ezt keressük a

$$x(t) = te^{-\alpha t} \tag{6.14}$$

alakban. Ekkor ugyanis:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x \\ 0 &= -2\alpha e^{-\alpha t} + \alpha^2 t e^{-\alpha t} + 2\alpha\left(e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}\right) + \alpha^2 t e^{-\alpha t}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Tehát az általános megoldás határcsillapított esetben a következő:

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)\, e^{-\alpha t} \tag{6.16}$$

Az $\{a_1, a_2\}$ együtthatókat az alábbi lineáris egyenletrendszerből tudjuk meghatározni:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_0 \\ a_1\alpha + a_2 &= v_0 \end{aligned} \tag{6.17}$$

6.2.3. Alulcsillapítás

Legyen most $\alpha < \omega_0$ azaz $k < \sqrt{4mD}$. Ebben az esetben a (6.10) egyenlet megoldásai komplexek:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_\alpha, \tag{6.18}$$

ahol $\omega_\alpha \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Az általános megoldás (6.11) azonban komplex is lehet, miközben az $x(t)$ elmozdulást a valós számok halmazán kell keresnünk. Ehhez az kell, hogy az $\{a_1, a_2\}$ együtthatók komplexek lesznek. Ha $x(t) \in \mathbb{R}$, akkor megegyezik a komplex konjugáltjával. Azaz

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) \\ e^{-\alpha t}\left(a_1 e^{i\omega_\alpha t} + a_2 e^{-i\omega_\alpha t}\right) &= e^{-\alpha t}\left(a_1^* e^{-i\omega_\alpha t} + a_2^* e^{i\omega_\alpha t}\right) \\ e^{i\omega_\alpha t}(\underbrace{a_1 - a_2^*}_{=0}) &= e^{-i\omega_\alpha t}(\underbrace{a_1^* - a_2}_{=0}). \end{aligned} \tag{6.19}$$

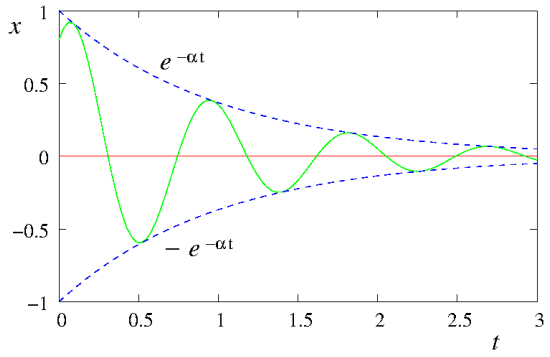
Tehát, ha $a_1^* = a_2$, akkor a megoldások valósak. Írjuk fel a_1 és a_2 együtthatókat a következő módon:

$$\begin{aligned} a_1 &= Ae^{i\phi} \\ a_2 &= Ae^{-i\phi}, \end{aligned} \tag{6.20}$$

ahol A és ϕ valósak. A valós általános megoldás tehát a következő:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \underbrace{2A}_{a} \underbrace{\left[\frac{e^{i(\omega_\alpha t+\phi)} + e^{-i(\omega_\alpha t+\phi)}}{2}\right]}_{\cos(\omega_\alpha t+\phi)}$$

$$x(t) = ae^{-\alpha t}\cos(\omega_\alpha t + \phi) \tag{6.21}$$



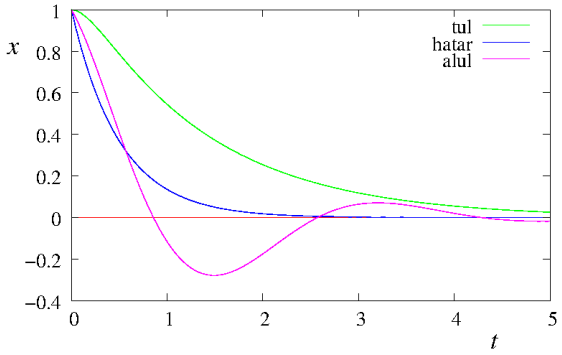
6.4. ábra. Az alulcsillapított rezgőmozgás és a burkoló exponenciális lecsengés.

A (6.21) általános megoldást az alábbi ekvivalens alakokba is lehet írni:

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{-\alpha t}\sin(\omega_\alpha t + \psi) \\ x(t) &= e^{-\alpha t}\left[c\sin(\omega_\alpha t) + d\cos(\omega_\alpha t)\right] \end{aligned} \tag{6.22}$$

A legutóbbi egyenlet illeszthető legkönnyebben a kezdeti feltételekkel: $d = x_0$, illetve $c = v_0$. A kapott megoldások valójában egy csillapodó rezgést adnak meg, amelynek ω_α körfrekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan oszcillátor saját körfrekvenciája ω_0. Egy példa látható a 6.4 ábrán.

6.2.4. Összefoglalás



6.5. ábra. A tömegpont helye az idő függvényében adott rugóállandó és változó csillapítás mellett álló helyzetből elengedve. A paraméterek értéke $\omega_0 = 2\frac{1}{\mathrm{s}}$, $\alpha = 3,\ 2,\ 0.8\frac{1}{\mathrm{s}}$ a túl- (zöld), határ- (kék), illetve alulcsillapított (lila) esetben.

Legfontosabb megjegyzés, hogy a tömegpont helyzete minden esetben exponenciálisan közelít a nyugalmi helyzethez. Azaz kijelenthetjük, hogy a csillapított harmonikus oszcillátor mindig véges időn belül nyugalomba kerül. (Ezt úgy kell érteni, hogy bármilyen kis ε távolságot veszünk az egyensúlyi helyzet körül, a tömegpont véges időn belül nem lép ki ebből a tartományból és ez akkor is így van, ha ε-t változtatva az időt is hatványfüggvény szerint átskálázzuk.)

Az előbbi fejezetekben a csillapítást három különböző részre bontottuk, mivel matematikailag más-más úton jutottunk el a megoldáshoz. Azonban ez a felbontás nem csak a levezetés miatt lényeges, hanem gyakorlati szempontból is. Vessünk egy pillantást a 6.5 ábrára! Itt összehasonlítjuk különböző csillapítás esetén egy adott m tömegű tömegpont helyének időfejlődését, ha kezdetben álló helyzetből véges kitérésből elengedjük. A rugóállandót mindhárom kísérletben ugyanannak választjuk.

Jól látható, hogy a határcsillapítás esetében éri el leggyorsabban a nyugalmi helyzetét a test. A túlcsillapítás nem engedi a testet kellően felgyorsulni, ezért a lecsengés lassú lesz. Alulcsillapítás esetén a test gyorsan áthalad az egyensúlyi helyzeten, de másik oldalt is kilengve tovább oszcillál. A kettő közötti optimum a határcsillapítás. A (6.10), (6.16), (6.21) egyenletekből jól látszik, hogy az exponenciális kitevője pont a határcsillapítás esetén a legkisebb.

Ennek fontos jelentősége van, ugyanis sok olyan gyakorlati probléma van, ahol fontos a rezgések mielőbbi csillapítása. Elég csak pl. az autók kerekeire gondolni, ahol a stabilitás és az úttartás miatt fontos a rezgések mielőbbi csillapítása. A fizika más területén is jól jön ez a tulajdonság. Molekuláris dinamikában [2], ahol ha számítógépen sok-sok részecske statikus helyzetét vizsgáljuk, a határcsillapítás segít az egyensúlyi helyzet mielőbbi elérésében.

6.2.5. Mechanikai energia

Nézzük meg a mechanikai energia megváltozását, a 3.3 fejezetben megismert módon! Induljunk ki a csillapított harmonikus oszcillátor mozgásegyenletéből (6.2):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -Dx - k\dot{x} \quad |\cdot \dot{x} \\ m\ddot{x}\dot{x} &= -Dx\dot{x} - k\dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}Dx^2\right) - k\dot{x}^2 \quad \left|\int_{t_1}^{t_2} \dots dt\right. \\ \Delta E_{\text{mech}} = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2\right]_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} -k\dot{x}^2 dt = \int_{x_1}^{x_2} -k\dot{x}dx < 0 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Ez a jól ismert általánosított munkatétel, amely szerint a rendszer mechanikai energiája nem állandó, hanem a súrlódási erő munkája csökkenti, míg a rugóerő konzervatív.

Mivel az $\{x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0\}$ kezdeti feltételek esetén $E = 0$ így nincsen semmi, ami az energia disszipációt fedezné. Azaz ebben az esetben csak az $x(t) \equiv 0$ triviális megoldás jöhet szóba.

6.3. Gerjesztett csillapított oszcillátor

Az előző fejezetben láttuk, hogy a csillapított oszcillátor magára hagyva egy idő után megáll. A valóságban azonban egy ilyen rendszert folyamatosan érhetik erőhatások. Az ilyen rendszert gerjesztett csillapított oszcillátornak nevezzük (pl. az autó kereke, ahol a csillapítást a lengéscsillapító, a gerjesztést az út egyenetlenségei adják). Tehát feltételezzük, hogy a csillapított oszcillátorra egy időfüggő $F(t)$ erő is hat. Ekkor a (6.2) mozgásegyenlet a következőképpen módosul:

$$m\ddot{x} + Dx + k\dot{x} = F(t) \tag{6.24}$$

Tömeggel való osztás után kapjuk az alábbi *inhomogén* differenciálegyenletet:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \tag{6.25}$$

ahol $f(t) = F(t)/m$, tehát $f(t)$ gyorsulás dimenziójú.

Ez egy lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, amelynek matematikai megoldási technikája közismert. Mivel az egyenlet lineáris, ezért az $x_{\mathrm{IH}}(t)$ általános megoldás felírható az alábbi alakban:

$$x_{\mathrm{IH}}(t) = x_{\mathrm{H}}(t) + x_{\mathrm{IHP}}(t) \tag{6.26}$$

ahol $x_{\mathrm{H}}(t)$ a homogén egyenlet általános megoldása (eddig az előzőekben ezzel foglalkoztunk), a két paraméteres függvényosztály bármelyik eleme lehet és bármilyen kezdeti feltételre illeszthető. Az $x_{\mathrm{IHP}}(t)$ az inhomogén egyenletnek egy tetszőleges induló értékekkel $\{x_{\mathrm{IHP}}(0), \dot{x}_{\mathrm{IHP}}(0)\}$ rendelkező megoldása. Ez tehát egy konkrét megoldás, amely nem tartalmaz semmiféle ismeretlen paramétert. Neve *partikuláris* (részleges, nem teljes) megoldás.

Az előzőekben láttuk, hogy a homogén egyenlet megoldása gyorsan lecseng:

$$\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{H}}(t) = 0 \tag{6.27}$$

Ezért ezt a megoldást tranziens megoldásnak is nevezik. Elegendően hosszú időre tehát:

$$x_{\mathrm{IH}}(t) \simeq x_{\mathrm{IHP}}(t) \tag{6.28}$$

Tehát a rendszer hosszú időre elfelejti a kezdeti feltételeket, ezért az $x_{\mathrm{IHP}}(t)$-t *állandósult* megoldásnak nevezzük.

Toljuk ki a kezdeti időpontot a $t \to -\infty$-be, és a teljes $(-\infty, \infty)$ időtartományon hasson $f(t)$, és keressük a $f(t)$ által generált $x_{\mathrm{IHP}}(t) = x(t)$ függvényt.

6.4. Green-függvény

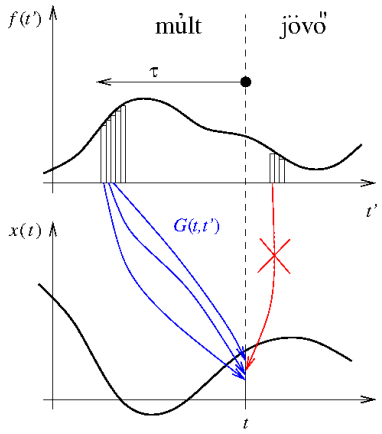
A 6.1 fejezetben definiáltuk a lineáris rendszereket: Ha $f_i(t)$ a bement és $x_i(t)$ a kimenet a lineáris rendszerből akkor a következő kapcsolatok igazak:

$$\begin{aligned} [f_1(t) + f_2(t)] &\to [x_1(t) + x_2(t)] \\ [af_1(t)] &\to [ax_1(t)] \end{aligned} \tag{6.29}$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott bemeneti függvény milyen kimeneti választ ad. Az egész folyamatot a 6.6 ábra szemlélteti. Általánosságban a fenti lineáris kapcsolatot a következő kifejezéssel lehet leírni:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') f(t') dt' \tag{6.30}$$

Ami szavakban azt fejezi ki, hogy az $x(t)$ válaszfüggvény értéke egy adott t pontban a gerjesztés összes pontban vett hatásának valamilyen súlyozott összege. A súlyozási függvényt *Green-függvénynek* nevezzük.



6.6. ábra. A Green-függvény szemléltetése. A múltbeli gerjesztések (kék) hatással vannak a válasz t időpontbeli értékére, míg a jövőbeliek (piros) nem. A kis téglalapok határesete az integrál. A gerjesztések idejét mérhetjük labor időben t', vagy eltelt időben τ, ha a rendszer időben változatlan.

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszer nem változik az időben (ezt fejezi ki, hogy (6.4) egyenlet *állandó együtthatójú*). Ekkor a rendszer állapota csak az időkülönbségtől függhet, hiszen bármikor végezzük el a kísérletet ugyanazt az eredményt kell kapnunk:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t')dt' \tag{6.31}$$

Alapvető fizikai megfigyelés a kauzalitás, azaz az ok-okozati viszony. Ez azt jelenti, hogy $t' > t$ gerjesztések nincsenek hatással az $x(t)$ értékére. A gerjesztés válasz kapcsolat tovább egyszerűsödik:

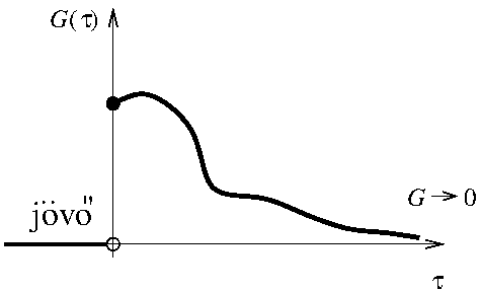
$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')f(t')dt' \tag{6.32}$$

Vezessünk be egy változó cserét, amelyben a t' *mikor* időváltozót a visszanéző, *mennyivel ezelőtt* $\tau \equiv t - t'$ változóval helyettesítjük. Ekkor (6.32) egyenlet az alábbiak szerint módosul:

$$x(t) = \int_{0}^{\infty} G(\tau)f(t-\tau)d\tau. \tag{6.33}$$

Vegyük észre, hogy $G(\tau)$ idődimenziójú, azaz $[G] = \mathrm{s}$.

Ha megköveteljük, hogy $G(\tau) = 0$ $\tau < 0$ esetén, akkor a kauzalitást így is írhatjuk



6.7. ábra. Szemléltető példa Green-függvényhez. $\tau < 0$-ra a függvény értéke 0, azonban nagy τ értékekre is 0=hoz tart a függvény értéke.

(lásd 6.7:)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) f(t-\tau) d\tau$$
$$G(\tau) = 0, \quad \text{ha } \tau < 0 \tag{6.34}$$

Fontos észrevétel, hogy

$$\lim_{\tau \to \infty} G(\tau) = 0. \tag{6.35}$$

Ez azt jelenti, hogy a nagyon régi események nincsenek hatással a mostani válaszra. Ez disszipatív lineáris rendszerekre mindig igaz.

A (6.34) egyenlet tulajdonképpen két függvényt szoroz össze egy speciális utasítással. Neve *konvolúció* [3].

A (6.34) egyenlet azért is fontos, mert ha meghatározható $G(\tau)$ alakja, akkor utána tetszőleges gerjesztéshez kiszámítható a válasz. Az lenne a legjobb, ha találnánk egy bemeneti $f(t)$ függvényt amire a rendszer a Green-függvénnyel arányos választ adna. Ha visszalapozunk a (1.20) egyenlethez jól látható, hogy van ilyen bemenet, mégpedig a Dirac-deltával arányos $f(t)$=$v_0\delta(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \underbrace{f(t-\tau)}_{v_0\delta(t-\tau)} d\tau = v_0 G(t) \tag{6.36}$$

Megjegyezzük, hogy a Dirac-delta teljesíti a $\delta(\tau) = 0$, ha $\tau < 0$ feltételt. A v_0 fizikai jelentését lásd alább.

Tehát a Green-függvény a lineáris rendszer Dirac-deltára adott válasza.

Megjegyezzük, hogy sok helyütt használatos a Green-függvény helyett a $H(t)$ átmeneti függvény, amely a $\theta(t)$ lépcsőfüggvényre adott válasz. A levezetés teljesen analóg módon megy.

6.4.1. Csillapított oszcillátor Green-függvénye

Határozzuk meg a gerjesztett csillapított lineáris oszcillátor Green-függvényét! Amint fent meghatároztuk, a Green-függvény, a rendszer Dirac-deltára adott válasza. Helyettesítsük a (6.25) egyenletbe $x = v_0 G$, illetve $f = v_0\delta(t)$ kifejezéseket! v_0-lal való egyszerüsítés után kapjuk, hogy

$$\ddot{G} + 2\alpha\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t) \tag{6.37}$$

Fontos megjegyezni, hogy míg x dimenziója méter ($[x] = \mathrm{m}$), addig a Green-függvényé másodperc ($[G] = \mathrm{s}$). A kettő közötti különbség egy sebesség dimenzió. Olyan, mintha (6.37) egyenletet elosztottuk volna egy konstans v_0 sebességgel. Ha ezt figyelembe vesszük akkor az egyenlet jobb oldala a következő:

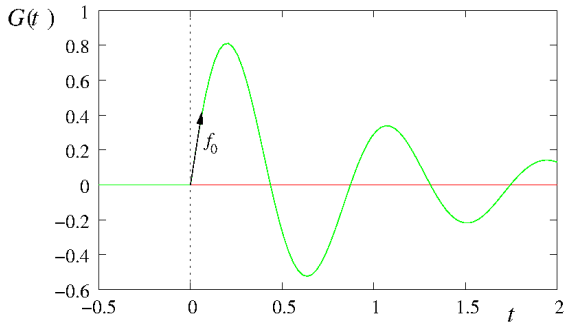
$$F(t) = mf(t) = mv_0\delta(t) \tag{6.38}$$

Azaz 1.3 fejezetben megtanultak alapján ez olyan mint egy pillanatszerű erőlökés. Ez látható a (6.37) egyenlet idő szerinti integráljából a $[-\varepsilon, \varepsilon]$ intervallumon:

$$[\dot{x}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (2\alpha\dot{x} + Dx)dt}_{=\mathcal{O}(\varepsilon)} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_0\delta(t)dt = v_0, \tag{6.39}$$

ahol a középső integrál ε nagyságrendű, mivel hagyományos függvényekből áll. Tehát a sebességváltozás a $t = 0$ időpillanatban v_0 nagyságú lesz:

$$\begin{aligned} x(0_-) &= 0 \qquad x(0_+) = 0 \\ \dot{x}(0_-) &= 0 \qquad \dot{x}(0_+) = v_0 \end{aligned} \tag{6.40}$$



6.8. ábra. Alulcsillapított harmonikus oszcillátor Green-függvénye.

Mivel $t > 0$ esetén a Dirac-delta zérus, ezért visszakapjuk a gerjesztés mentes harmonikus oszcillátort a (6.40) kezdeti feltételekkel (6.8 ábra). Ennek viszont már ismerjük a megoldását.

Válasszuk $v_0 = 1\text{m/s}$ értéket és alulcsillapított esetet, ekkor az általános megoldás (6.21):

$$x(t) = a\sin(\omega_\alpha t + \phi)e^{-\alpha t} \tag{6.41}$$

A (6.40) kezdeti feltételekből meghatározható a és ϕ. A kapott Green-függvény tehát a következő:

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_\alpha}\sin(\omega_\alpha t)e^{-\alpha t} & \text{ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{ha } t < 0 \end{cases} \tag{6.42}$$

6.4.2. Fourier-transzformáció lineáris rendszerekre

A lineáris rendszer válaszfüggvényét a bemenet és a Green-függvény konvolúciójával állíthatjuk elő (6.34):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)f(t-\tau)d\tau. \tag{6.43}$$

Az (1.52) egyenlet alapján Fourier térben a konvolúció egy egyszerű szorzássá válik:

$$\tilde{X}(\omega) = 2\pi\tilde{G}(\omega)\tilde{F}(\omega), \tag{6.44}$$

ahol $\tilde{G}(\omega) = \mathcal{F}[G(t)]$ a Green-függvény Fourier transzformáltja, az *átviteli függvény.*

Határozzuk meg a csillapított oszcillátor átviteli függvényét! Tudjuk, hogy $\mathcal{F}[\dot{x}] = i\omega\tilde{X}(\omega)$, illetve $\mathcal{F}[\ddot{x}] = -\omega^2\tilde{X}(\omega)$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x &= f(t) \\ -\omega^2\tilde{X}(\omega) + i\omega\tilde{X}(\omega) + \omega_0^2\tilde{X}(\omega) &= \tilde{F}(\omega) \\ \tilde{X}(\omega)\left(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2\right) &= \tilde{F}(\omega) \end{aligned} \tag{6.45}$$

Fourier térben a differenciálegyenlet nagyon egyszerű alakú. A $\tilde{F}(\omega)$ bemenethez a $\tilde{X}(\omega)$ kimenetet egyszerű osztással kapjuk:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2} = 2\pi\tilde{G}(\omega)\tilde{F}(\omega) \tag{6.46}$$

Tehát a csillapított oszcillátor átviteli függvénye:

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2)}. \tag{6.47}$$

Ellenőrizhető, hogy a fenti függvény a (6.42) Green-függvény Fourier-transzformáltja.

Az átmeneti függvény további vizsgálatához írjuk át az átviteli-függvényt Euler-alakba [4]:

$$\tilde{G}(\omega) = \left|\tilde{G}(\omega)\right| e^{-i\gamma} \tag{6.48}$$

Mivel

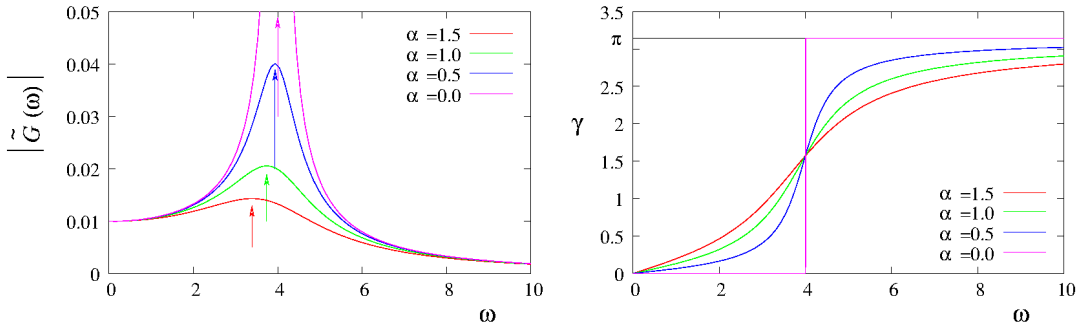
$$2\pi\tilde{G}(\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \tag{6.49}$$

ezért

$$\tan\gamma = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{6.50}$$

$$\left|\tilde{G}(\omega)\right| = \frac{1}{2\pi\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \tag{6.51}$$

A $\left|\tilde{G}(\omega)\right|$ függvényt *rezonancia görbének* nevezzük.



6.9. ábra. A csillapított oszcillátor rezonancia görbéje (a) és fázistolása (b), $\omega_0 = 4$ paraméter esetén különböző α értékekre. A rezonanciagörbe maximumát az (a) ábrán nyíl jelöli.

Vizsgáljuk meg a kapott eredményeket! A 6.9 ábrán egy példán szemléltetjük az átviteli függvény és a fázistolás alakját. Jól láthatóan a rezonancia görbének van egy maximuma (bár bizonyos α értékekre ez megszűnik). Ennek pozíciója számolható, ezt nevezzük a rezonancia frekvenciának. Értéke

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \tag{6.52}$$

A rezonancia frekvenciának a mérnöki alkalmazásokban kulcsszerepe van. Szinte minden építmény (épület, járművek, stb.) esetében fontos követelmény a rezonanciák elkerülése, vagy biztosítása. Rezonancia esetében ugyanis a rezgések amplitúdója megnő. Bizonyos esetekben (pl. autó) ez csak nemkívánatos zajokban jelenik meg, azonban más

esetekben a túl nagy amplitúdójú oszcilláció a szerkezet károsodásához vezethet. Egyik jól ismert példa a Tacoma-híd katasztrófája [5]. Manapság alapkövetelmény, hogy a szerkezetre ható rezgések (szél, földrengés) tipikus tartományában az épített struktúra jól csillapítson és ebben a tartományban rezonanciafrekvenciák ne forduljanak elő.

7. fejezet

Merev testek dinamikája

7.1. Merev test fogalma

A pontrendszerek általános tárgyalása után speciális rendszerekkel fogunk foglalkozni. A minket körülvevő világban (makroszkopikus mérettartományban) sokféle pontrendszerrel találkozunk. Az első tapasztalati benyomás, amely alapján ezek elkülönülnek egymástól az a halmazállapotuk. Azaz beszélünk szilárd, folyékony és légnemű halmazállapotú anyagokról. Természetesen, a részletek tanulmányozása egy sokkal gazdagabb világot tár fel előttünk, de az első lépésként halmazállapot szerinti osztályzás összhangban van a mindennapi tapasztalatainkkal.

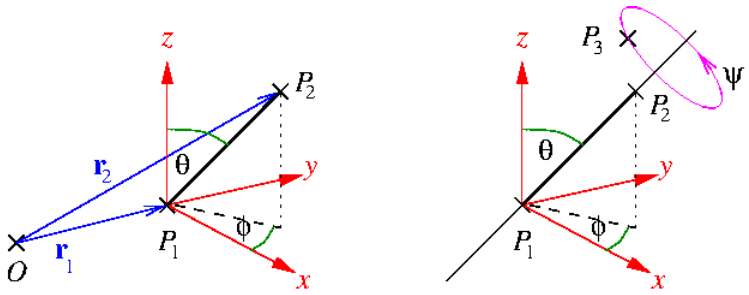
Általában minden anyag deformálható, ezzel foglalkozik a Deformálható testek dinamikája 8 fejezet. A szilárd testeknek nem csak a deformációja, hanem a merev testként való mozgása is érdekes problémákra vezet. Ezzel a kérdéssel foglalkozik ez a fejezet.

Merev testnek nevezzük azt a pontrendszert, amelyben bármelyik két pont egymástól mért távolsága időben állandó, azaz $\forall i, j$-re:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}_{ij}| = r_{ij} = \text{állandó}. \tag{7.1}$$

Tehát a tömegpontok koordinátái nem függetlenek egymástól, rájuk a fenti előírásoknak teljesülnie kell. Ezeket kényszerfeltételeknek nevezzük. Elemi meggondolásokkal kiszámíthatjuk, hogy hány skalár adat kell egy merev test helyzetének a megadásához:

- A test egy P_1 pontját mozgathatom bárhová a térben ez három szabadsági fok (x_1, y_1, z_1).
- A test egy másik P_2 pontját már csak egy gömbfelületre helyezhetem, hiszen a $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ távolság állandó kell, hogy legyen. A gömbfelületet két szöggel (ϑ, ϕ) tudjuk paraméterezni (lásd 7.1 ábra).
- Ha P_1 és P_2 rögzített, akkor ez a két pont által meghatározott egyenes tengely körül még a test elforoghat. Ezt egy ψ szöggel tudjuk paraméterezni (lásd 7.1 ábra).



7.1. ábra. Merev test elforgatásának paraméterezése Euler-szögekkel.

A merev test helyzetét tehát 6 db paraméterrel tudjuk leírni: $(x, y, z, \vartheta, \phi, \psi)$. Az (x, y, z) a test térbeli elmozdulását jellemzi, a (ϑ, ϕ, ψ) Euler-szögek [6] a test elfordulását.

A következőkben a merev test mozgását mindig egy állónak tekintett vonatkoztatási rendszerhez (inerciarendszerhez) viszonyítva vizsgáljuk. Ha rögzítjük a merev test egy pontját, akkor a test csak ezen pont körül mozoghat. A P_1 pont helye három (x_1, y_1, z_1) Descartes koordinátával jelölhető ki. Ekkor (ϑ, ϕ, ψ) szabadon változhat. Ezt nevezzük a merev test *rögzített pont körüli mozgásának*, vagy *pörgettyűmozgásnak*.

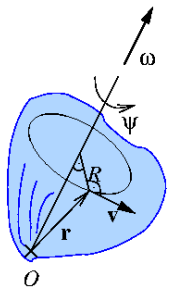
Ha rögzítjük a merev test egy másik P_2 pontját is, akkor a merev test csak a $\overline{P_1P_2}$ egyenes által meghatározott tengely körül foroghat. A tengely helyzetét (az álló koordinátarendszerhez képest) a gömbi koordinátáknál használatos (ϑ, ϕ) szögek adják meg. A test tengely körüli elfordulását pedig a ψ szögparaméter. Ezt nevezzük *rögzített tengely körüli forgásnak*.

A pörgettyűmozgás tanulmányozása a merev testek dinamikájának egyik legbonyolultabb és egyben legérdekesebb területe. Az érdekessége abban van, hogy egy pörgettyű a külső erőhatásokra nem az általunk szubjektíven várt módon reagál. Ennek oka tisztán pszichológiai, ugyanis a hétköznapjaink során a minket körülvevő, emberléptékű, természetes környezetünkben kevés számú pörgettyűvel találkozunk. Így nem alakulhatott ki ezen mozgást illetően semmiféle szemléletünk. Ezért a pörgettyű reakcióját a nem forgó testeknél nyert tapasztalataink alapján képzeljük el. A csalódásunk szembeszökő lesz. Mindezekről a Kísérleti Fizika során már némi benyomást szerezhettünk. A merev test mozgásának a részletesebb tanulmányozását a legegyszerűbbel, a rögzített tengely körüli forgással kezdjük. Majd ezután rátérünk a sokkal bonyolultabb pörgettyűmozgásra.

7.2. Rögzített tengely körüli forgás

Az általánosság elvesztése nélkül feltesszük, hogy a rögzített tengely átmegy az origón (lásd 7.2 ábra).

A merev test leírható igen sűrű tömegpontok sokaságaként, akár tömegpontként jel-



7.2. ábra. Merev test forgása rögzített tengely körül.

lemezve minden egyes atomot, azonban sokkal célszerűbb *kontinuum anyagmodellt* használni. Azaz a merev test anyagát egy $\rho(\mathbf{r})$ sűrűségű folytonos közegnek fogjuk tekinteni. Ekkor

$$dm = \rho(\mathbf{r})d^3r, \tag{7.2}$$

ahol dm az $\mathbf{r}$ hely körüli dr^3 térfogatban lévő anyag tömegét jelenti. A pontrendszereknél használt összegzés helyett az integrálásra térünk át

$$\sum_{i=1}^{N} \ldots \quad \longrightarrow \quad \int \ldots d^3r = \int \ldots dm. \tag{7.3}$$

Az integrálást a testre végezzük, de ha a sűrűséget úgy definiáljuk, hogy a testen kívül zérus, akkor az egész térre is felírható az integrál.

A rögzített tengely körül forgó merev test minden pontja körmozgást végez ezért érdemes az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektort használni. Ahol az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektor iránya párhuzamos a forgástengellyel, nagysága pedig a szögelfordulás sebességével $|\boldsymbol{\omega}| = \dot{\psi}$.

A test minden pontjának sebessége a körpálya érintőjének irányába mutat nagysága, pedig $v = R\dot{\psi}$, ahol R a tömegpont körpályájának sugara. a sebesség vektor alakban

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{7.4}$$

7.2.1. Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete

Írjuk fel a merev test perdületét (3.31) egyenlet alapján rögzített origó mellett:

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}dm = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d^3r =$$
$$= \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d^3r \tag{7.5}$$

Mivel mind a vektoriális szorzás, mind az integrálás lineáris művelet, ezért a perdület lineáris függvénye a szögsebesség vektornak. A (7.5) egyenlet tehát egy lineáris kapcsolatot ír fel két vektor, $\mathbf{L}_0$ és $\boldsymbol{\omega}$ között. Két vektor között az általános lineáris kapcsolatot egy tenzorral, a tehetetlenségi nyomaték tenzorral írhatjuk fel:

$$\mathbf{L}_0 = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega}. \tag{7.6}$$

Számoljuk ki a $\boldsymbol{\theta}$ tenzort a (7.5) egyenlet alapján, kihasználva, hogy $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \equiv (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$:

$$\mathbf{L}_0 = \int \underbrace{\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\boldsymbol{\omega} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})} \rho(\mathbf{r}) d^3r = \int [\boldsymbol{\omega} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})] \rho(\mathbf{r}) d^3r \tag{7.7}$$

Írjuk át $\boldsymbol{\omega}$-ra ható tenzor alakba az $\mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})$ kifejezést:

$$[\mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})]_i = \sum_j r_i r_j \omega_j = \sum_j (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})_{ij} \omega_j \tag{7.8}$$

Itt kihasználtuk (1.7) egyenletben definiált diadikus szorzatot. Tehát

$$\mathbf{L}_0 = \int \left(\mathbf{1} r^2 - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\right) \boldsymbol{\omega} \rho(\mathbf{r}) d^3r = \underbrace{\left[\int \left(\mathbf{1} r^2 - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\right) \rho(\mathbf{r}) d^3r\right]}_{\boldsymbol{\theta}_0} \boldsymbol{\omega} \tag{7.9}$$

Azaz

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \int \left(\mathbf{1} r^2 - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\right) \rho(\mathbf{r}) d^3r. \tag{7.10}$$

Jól látható tehát, hogy a tehetetlenségi nyomatéktenzor csak a test geometriájától függ. Vizsgáljuk meg $\boldsymbol{\theta}$ komponenseit:

$$\theta_{ij} = \int \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right) \rho(\mathbf{r}) d^3r, \tag{7.11}$$

ahol δ_{ij} a Kronecker-delta (1.5). A tehetetlenségi tenzor tehát egy szimmetrikus mátrix. Mátrix alakban ez a következőképpen néz ki:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \int \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(\mathbf{r}) d^3r \tag{7.12}$$

A mellékátlóban lévő θ_{ij}, $i \neq j$ mátrixelemek neve deviációs nyomatékok. Az elnevezés eredete forgó merev test dinamikájában keresendő. Erre még visszatérünk. Összefoglalva, a tehetetlenségi tenzor csak a test geometriájától függ és szimmetrikus.

7.2.2. Rögzített tengely körül forgó merev test kinetikus energiája

Mint azt láttuk, ha egy merev test egy rögzített t tengely körül forog, akkor minden pontja körmozgást végez, vagy áll, ha a pont éppen a forgástengelyen van. Minden pontjának a szögsebessége ugyanaz az $\boldsymbol{\omega}$. A tömegpontok sebessége a már megismert módon (7.5) alakba írható. Ez csak akkor igaz, ha az helyvektorokat a forgástengelyen, de azon tetszőleges helyen lévő pontból mérjük, azaz az origó a forgástengelyen van. Így egy elemi tömegpont kinetikus energiája:

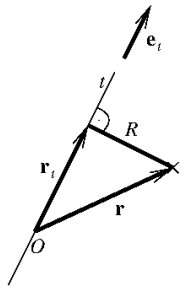
$$dE_k = \frac{1}{2}v^2 dm = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 dm \tag{7.13}$$

Használjuk a a Levi-Civita-szimbólum (1.4) ciklikusságát:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \mathbf{v}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega}\left[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\right] \tag{7.14}$$

Most megint a (7.5) egyenlethez hasonló kifejezést kapunk:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}\int \left\{\boldsymbol{\omega}\left[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\right]\right\} \rho(\mathbf{r}) d^3 r = \\ &= \frac{1}{2}\int \left\{\boldsymbol{\omega}\left[\mathbf{1}r^2 - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\right]\right\} \rho(\mathbf{r}) d^3 r = \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\theta}_0\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{ij} \omega_i \theta_{ij} \omega_j \end{aligned} \tag{7.15}$$



7.3. ábra. A tengelyen lévő origóból induló helyvektor, annak tengelyre vett vetülete és a tengelytől vett távolság szemléltetése.

Bontsuk szét az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektort tengely irányú egységvektorra $\mathbf{e}_t$ és szögsebesség nagyságra: $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$! Ezt felhasználva írjuk fel ismét a kinetikus energiát:

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{(\mathbf{e}_t \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{e}_t)}_{\theta_t} = \frac{1}{2}\theta_t \omega^2, \tag{7.16}$$

ahol θ_t a t tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték. A (7.16) egyenlet a középiskolából jól ismert kifejezés, ahol egy tengelyre vetített tehetetlenségi nyomaték egy konstans. Belátható, hogy θ_t a korábban megismert módon a sűrűség tengelytől vett távolságának négyzetének integráljával számolható. Induljunk ki a tehetetlenség tenzor definíciójából (7.10) és használjuk ki, hogy a sugár merőleges a tengelyre (lásd 7.3) ábrát:

$$\theta_t = \int \mathbf{e}_t \left[r^2 \mathbf{e}_t - \mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{e}_t)\right] \rho(\mathbf{r}) d^3r = \int \left[r^2 - (\mathbf{r}\mathbf{e}_t)^2\right] \rho d^3r = \int \left[r^2 - r_t^2\right] \rho d^3r$$

$$\theta_t = \int R^2 \rho d^3r, \tag{7.17}$$

ahol R a tengelytől vett távolságot jelöli. A fenti kifejezés nyilvánvalóan változatlan marad, ha az origót a tengely mentén eltoljuk. Ezt a tényt el is vártuk, mivel a kinetikus energia nagysága nem függhet a koordináta-rendszer origójának helyzetétől.

7.2.3. Rögzített tengelyre ható erők

Vizsgáljuk meg, hogy milyen esetben hat erő a rögzített tengelyű forgás során a tengelyre! A mindennapi életben ezek igen fontos jelentőséggel bírnak.

Ha a tömegközépponton nem halad át a tengely, akkor a tömegközépponti tétel 4.1 alapján erőhatás szükséges a tömegközéppont és ezáltal a test körpályán tartásához:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{tkp}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{tkp}} \tag{7.18}$$

A körpályán tartáshoz szükséges erő (2.5):

$$\mathbf{F}^{\mathrm{k}} = M\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{tkp}} = M\mathbf{a}_{\mathrm{cp}} = -\frac{M(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{tkp}})^2}{r_{\mathrm{tkp}}} \tag{7.19}$$

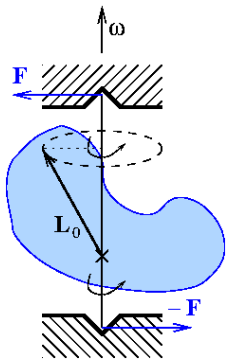
Jól látható, hogy amennyiben $\mathbf{r}_{\mathrm{tkp}}$ párhuzamos a tengellyel, azaz a $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektorral, akkor a külső erők eredője zérus. Ez akkor valósul meg, ha a tömegközéppont a forgástengelyen van.

Ezt az erőhatást jól lehet látni a mosógép centrifugálásakor, mivel a ruha sokszor egyenetlenül oszlik el a dobban, ezért a forgó rész tömegközéppontja ritkán esik egybe a forgástengellyel, ami a mosógép rázkódásához, ugrálásához vezet. Ez az effektus máshol is zavaró lehet, például az autó kerekét is azért kell centríroztatni, hogy az ugrálást, ezáltal a tapadás csökkenését elkerüljük.

Az, hogy a külső erők eredője zérus, még nem elegendő feltétel arra, hogy a tengely külső erőhatás nélkül is nyugalomban maradjon. Az

$$\mathbf{L}_0 = \boldsymbol{\theta}_0 \boldsymbol{\omega} \tag{7.20}$$

egyenletben a $\boldsymbol{\theta}_0$ tenzor a test geometriájától függ, tehát csak a testtel együtt forogva állandó. Álló koordináta-rendszerből szemlélve, amennyiben a test elfordul, akkor vele



7.4. ábra. Egy test perdületének forgása és az ébredő forgatónyomatékok, rögzített tengely esetén.

fordul $\boldsymbol{\theta}_0$ is. Ez azonban azt jelenti, hogy az álló rendszerből szemlélve az $\mathbf{L}_0$ perdületvektor a merev testtel együtt forog (7.4 ábra), azaz nem állandó. A pontrendszereknél tanult perdülettétel értelmében

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_0 = \mathbf{N}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{7.21}$$

Tehát ha $\mathbf{L}_0$ nem párhuzamos a $\boldsymbol{\omega}$ forgástengellyel, akkor a tengely egyhelyben tartásához forgatónyomatékra van szükségünk. A tengely végén ébredő erők pedig az $\mathbf{L}_0$ és a tengely által meghatározott síkban lesznek. A forgatónyomaték létéről mindenki maga is meggyőződhet, nem kell hozzá más, csak egy krumpli és egy kötőtű.

7.3. Szabad tengely körül forgó merev test

7.3.1. Főtengely rendszer

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a testre nem hat külső forgatónyomaték. Ekkor $0 = \mathbf{N}_0 = \dot{\mathbf{L}}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$. Azaz a test perdülete nem változik. Ha $\boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{L}_0$ nem párhuzamosak, akkor mivel $\boldsymbol{\theta}_0$ a testtel együtt forog, ez csak úgy lehetséges, ha a pillanatnyi forgástengely is pillanatról pillanatra változik, azaz $\boldsymbol{\omega}(t)$. Azonban, ha $\boldsymbol{\omega} || \mathbf{L}_0$, akkor ezek párhuzamosak is maradnak. Nézzük meg mikor lehetséges ez!

$$\mathbf{L}_0 = \boldsymbol{\theta}_0 \boldsymbol{\omega} = \theta_0 \boldsymbol{\omega}, \tag{7.22}$$

A (7.22) egyenlet egy sajátérték-egyenlet, ahol θ_0 sajátértéke, $\boldsymbol{\omega}$ pedig sajátvektora a $\boldsymbol{\theta}_0$ tehetetlenségi tenzornak.

Mivel a tehetetlenségi tenzor szimmetrikus ezért sajátértékei $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ valósak, sajátvektorai $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ pedig merőlegesek egymásra:

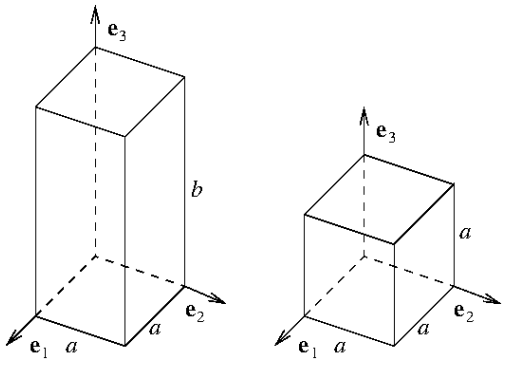
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}\mathbf{e}_1 &= \theta_1\mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{\theta}\mathbf{e}_2 &= \theta_2\mathbf{e}_2 \\ \boldsymbol{\theta}\mathbf{e}_3 &= \theta_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{7.23}$$

A három merőleges sajátvektor egy bázist alkot, amelyben a fentiek alapján a tehetetlenségi tenzor diagonális:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

A $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tengelyeket *tehetetlenségi főtengelyeknek*, a koordinátarendszert *főtengelyrendszernek (FTR)* nevezzük. Ekkor megkülönböztetés végett általában az x, y, z helyett a főtengelyeket $1, 2, 3$-mal jelöljük.

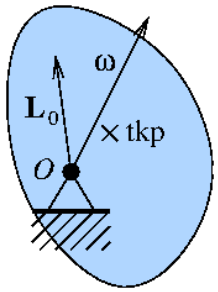
Az elmondottakból következik, hogy ha a merev testet egy tömegközéppontján (TKP) átmenő főtengely körül forgatjuk, akkor a tengelyre semmiféle külső erő nem fog hatni. Az ilyen tengelyeket *szabad tengelynek* nevezzük. A megadott feltételek miatt minden merev testnek (bármilyen alakú és tömegeloszlású is legyen) minimum három szabad tengelye van. Ezek a *tömegközépponti tehetetlenségi főtengelyek*.



7.5. ábra. Négyzet alapú hasáb és kocka.

Általában a szabálytalan testeknek három szabad tengelye van. Azonban ha a test rendelkezik bizonyos szimmetriával, akkor akár végtelen sok szabad tengelye is lehet. Például a négyzet alapú hasábnak (7.5 ábra) két azonos tehetetlenségi nyomaték sajátértéke lesz $\theta_1 = \theta_2$, ilyenkor bármely $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$ tengely szabad tengely. A kocka esetében (7.5 ábra) mindhárom sajátérték azonos $(\theta_1 = \theta_2 = \theta_3)$, ekkor bármely tömegközépponton átmenő tengely szabad tengely. Tehát a kocka tehetetlensége azonos a gömbével, azaz a gömb és a kocka forgómozgásában semmilyen különbség sincs.

7.4. Rögzített pont körül forgó merev test dinamikája (a pörgettyű mozgás)



7.6. ábra. Rögzített pont körül forgó merev test illusztrációja.

Tekintsünk egy merev testet, amelyik egy adott (rögzített) O pontja körül szabadon foroghat. Ha az O nem esik egybe a tömegközépponttal és a test gravitációs térben van, akkor ún. súlyos pörgettyűről beszélünk.

Mint már említettük, ha $\boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{L}_0$ nem párhuzamos, akkor $\boldsymbol{\omega}(t)$ időben változik. Arra vagyunk kíváncsiak, hogyan mozog a merev testünk, azaz szeretnénk meghatározni az $\boldsymbol{\omega}(t)$ függvényt. A perdület megváltozása a forgatónyomatékkal egyezik meg:

$$\mathbf{N}_0 = \dot{\mathbf{L}}_0 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{7.25}$$

A következő kérdés, hogy meg tudjuk-e határozni a tehetetlenségi tenzor megváltozását a forgás során? Vizsgáljuk meg a rendszert a testtel együttmozgó koordinátarendszerben! Ebben a rendszerben jelöljük vesszővel a mennyiségeket! A fenti (7.25) egyenlet a következőképpen néz ki az együttforgó rendszerben:

$$\dot{\mathbf{L}}_0^{'} = \boldsymbol{\theta}'\dot{\boldsymbol{\omega}}', \tag{7.26}$$

mivel $\dot{\boldsymbol{\theta}}^{'} \equiv 0$, hiszen az csak a test geometriájától függ az együttmozgó rendszerben az nem változik. A labor rendszerből úgy kapjuk meg az együttmozgó rendszert, hogy mindig $\boldsymbol{\omega}$-val forgunk. Azaz

$$\mathbf{N}_0 = \dot{\mathbf{L}}_0 = \dot{\mathbf{L}}_0^{'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_0' \tag{7.27}$$

Megjegyezzük, hogy ezt egyszer már kommentár nélkül kihasználtuk a (7.21) egyenletben. A (7.25) egyenlet főtengely-rendszerben tehát a következőképpen írható (most már elhagyjuk a vesszőket):

$$\mathbf{N}_0 = \boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} \tag{7.28}$$

Komponensenkként kiírva:

$$\begin{aligned} N_{01} &= \theta_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\theta_3 - \omega_3\omega_2\theta_2 \\ N_{02} &= \theta_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\theta_1 - \omega_3\omega_1\theta_3 \\ N_{03} &= \theta_3\dot{\omega}_3 + \omega_2\omega_1\theta_2 - \omega_1\omega_2\theta_1 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Összevonva:

$$\begin{aligned} N_{01} &= \theta_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(\theta_2 - \theta_3) \\ N_{02} &= \theta_2\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3(\theta_3 - \theta_1) \\ N_{03} &= \theta_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \tag{7.30}$$

A (7.28), illetve (7.30) elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert a *pörgettyűmozgás Euler-egyenletének* nevezzük.

Az egyenletrendszer nemlineáris, ezért a megoldása néhány, jellegzetes, speciális esettől eltekintve egyáltalán nem egyszerű. Látható, hogy az egyenletrendszer kapcsolatot teremt a rögzített O pont körül forgó test $\boldsymbol{\omega}$ szögsebessége és a rá ható külső erőknek az O pontra vett $\mathbf{N}_0$ nyomatéka között. Az érdekessége az, hogy ezt a kapcsolatot a forgó testhez rögzített főtengely-rendszerben felírható $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ és (N_{01}, N_{02}, N_{03}) komponensek között adja meg.

A pörgettyűmozgás megoldásának a másik nehézsége abban van, hogy ha már meghatároztuk $\boldsymbol{\omega}$ komponenseit, akkor még ebből ki kell találnunk, hogy a test hogyan mozog az álló rendszerben. Itt lép a színre az Euler-szögek rendszere. A bevezetőben láttuk ugyanis, hogy egy merev test mozgását a $(\vartheta(t), \phi(t), \psi(t))$ időfüggvényekkel adjuk meg. Ez azt jelenti tehát, hogy az ismeretében meg kell határoznunk az álló rendszerben rögzített koordinátarendszerünkben a szögsebesség-komponenseket, majd ennek alapján magát a mozgást, azaz

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad \longrightarrow \quad (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad \longrightarrow \quad (\vartheta(t), \phi(t), \psi(t)) \tag{7.31}$$

Mindez általános esetben egyáltalában nem könnyű feladat, de elvileg megoldható. Ebben rejlik a pörgettyűk dinamikájának a titokzatossága, de egyben a szépsége is.

Az alábbiakban két egyszerű esetben megoldjuk a pörgettyűmozgás Euler-egyenletét.

7.1. Feladat *Vizsgáljuk meg egy szabadon forgó test stabilitását! Biztosan mindenki észrevette már, hogy egy gyufaskatulyát pörögve feldobva annak mozgása néha szép pörgő marad, néha pedig bukdácsoló. Tudjuk, hogy elméletileg a szabad tengelyek mentén megpörgetve a szögsebesség állandó marad, tehát mindenképpen szép pörgő mozgást kellene látnunk. Ha a legkisebb és legnagyobb lapon megy át a tengelyünk, ez így is van, azonban ha a középsőn, akkor mindig bukdácsol. Nézzük meg miért van ez! Az itt ismertetett levezetés a [7] jegyzet alapján készült.*

Legyen egy test tehetetlenségi tenzorának három sajátértékére igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \tag{7.32}$$

Pörgessük meg a testet e legkisebb sajátértékhez tartozó $\mathbf{e}_1$ *főtengely mentén* ω_1 *szögsebességgel! Azonban mivel nem vagyunk tökéletesek, a másik két főtengely mentén is kicsit forog a testünk (perturbáció), azaz a test szögsebessége:*

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2 + \mu \mathbf{e}_3, \tag{7.33}$$

ahol $\lambda, \mu \ll \omega_1$*. Írjuk fel az (7.30) Euler-egyenletet csak az első rendű tagokat megtartva:*

$$0 = \theta_1 \dot{\omega}_1 \tag{7.34}$$

$$0 = \theta_2 \dot{\lambda} - \omega_1 \mu (\theta_3 - \theta_1) \tag{7.35}$$

$$0 = \theta_3 \dot{\mu} - \omega_1 \lambda (\theta_1 - \theta_2) \tag{7.36}$$

A (7.34) egyenlet azt mondja nekünk, hogy $\omega_1 =$ *állandó. A (7.35) és (7.36) egyenleteket idő szerint deriválva kapjuk, hogy*

$$\ddot{\lambda} = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2} \omega_1 \dot{\mu} \tag{7.37}$$

$$\ddot{\mu} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_3} \omega_1 \dot{\lambda} \tag{7.38}$$

A (7.37) egyenletben megjelenő $\dot{\mu}$ *mennyiséget helyettesítsük be (7.36) egyenletből:*

$$\ddot{\lambda} + \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3} \omega_1^2 \lambda = 0 \tag{7.39}$$

Mivel $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$*, ezért a* λ *előtt álló faktor pozitív, tehát a fenti másodfokú differenciálegyenlet megoldása szinuszos oszcilláció:*

$$\lambda(t) = \lambda_0 \sin\left(\sqrt{\frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3}} \omega_1 t + \phi_0 \right) \tag{7.40}$$

Könnyen belátható, hogy hasonló eredményt kapunk μ *időbeli változására is. Tehát az általunk akaratlanul okozott többi főtengely irányú perturbáció csak elliptikusan oszcillál, a mozgás alapvetően marad az* $\mathbf{e}_1$ *tengely körüli forgás.*

Amennyiben a fenti számolást végigvisszük a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező tengelyre: $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$*, akkor is ugyanezt kapjuk, a (7.39) egyenletben a* λ *előtt álló faktor pozitív.*

Más a helyzet a középső tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező irányban: $\theta_2 > \theta_1 > \theta_3$. Ekkor ugyanis a (7.39) egyenlet megoldása már nem szinuszos oszcilláció, hanem exponenciális lesz:

$$\lambda(t) = Ae^{\alpha_2 t} + Be^{-\alpha_2 t}, \tag{7.41}$$

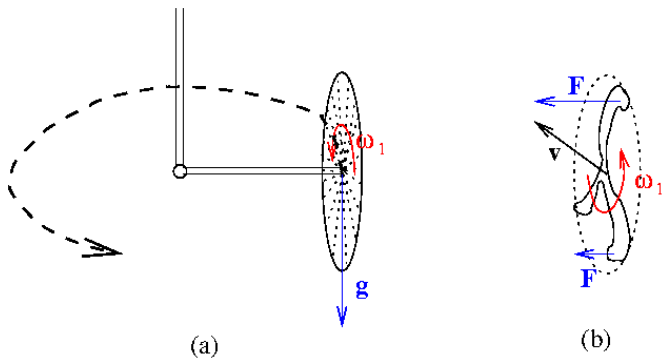
ahol

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3}} \tag{7.42}$$

Ez azt is jelenti, hogy a kis perturbáció megnő és a többi irányú forgás is láthatóvá válik. Természetesen, ekkor már nem alkalmazható ez az elsőrendű közelítés.

Összefoglalva tehát, megmutattuk, hogy egy test legkisebb és legnagyobb sajátértékéhez tartozó irányokban a szabad forgása stabil, azonban a középső sajátértékéhez tartozó irányban a szabad forgása instabil.

7.2. Feladat *Ebben a részben két problémát vizsgálunk. Megmutatjuk, hogy ugyanarra a jelenségre vezethetők vissza. Az első probléma a 7.7 (a) ábrán látható. Itt egy tengelyen lévő kerék gömbcsuklóval kapcsolódik a függőleges tartórúdhoz. Ha a kerék nem forog, akkor elengedés után a tengely függőlegesen lefelé fog mozogni a gravitáció hatására. Ha azonban tengely vízszintes helyzete mellett a tengelyen lévő kereket megpörgetjük, majd elengedjük, akkor nem ez történik, hanem a tengely megőrzi vízszintes helyzetét és elkezd a csukló körül körbe forogni.*



7.7. ábra. (a) csuklón forgó kerék, mely a gravitáció hatására nem lefelé mozdul el, hanem körbe. (b) Bumeráng.

A gravitációból származó forgatónyomaték tehát lefelé szeretné fordítani a tengelyt, de az erre merőleges forgómozgás miatt mégsem arra, hanem egy harmadik merőleges irányba indul el a test.

A bumeráng egy olyan eszköz, amelyben a lapátok szárny-profilúak. Ezért a forgó mozgás hatására azokon a forgás tengelyével párhuzamos felhajtóerő keletkezik. Mivel

a bumerángot nem egyhelyben forgatjuk, hanem a forgómozgással párhuzamosan haladó mozgást is végez, ezért a lapátok a fenti helyzetben, mikor a haladó mozgás irányába forognak, gyorsabban mennek a levegőhöz képest, mint az alsók, ezért a lapátokra ható erő különböző lesz, ami szintén egy forgatónyomatékot eredményez hasonlóan az előző példához és a végeredmény is hasonló vízszintes körmozgás, ami lehetővé teszi a bumeráng visszatértét.

Az alaphelyzet tehát mindkét esetben ugyanaz, van egy testünk, amely az egyik szabad tengelye mentén gyors forgómozgást végez, miközben arra merőlegesen forgatónyomaték lép fel. Írjuk fel az Euler-egyenleteket erre az esetre. Vizsgáljunk forgásszimmetrikus testet, amely a forgástengelye ($\mathbf{e}_1$) körül forog ω_1 szögsebességgel. Ebben az irányban a tehetetlenségi nyomatéka $\theta_{||}$. Az N forgatónyomaték hasson a $\mathbf{e}_2$ irányban. A forgásirányra merőleges tehetetlenségi nyomaték legyen $\theta_\perp$:

$$\theta_{||}\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(\theta_\perp - \theta_\perp) = 0 \tag{7.43}$$
$$\theta_\perp\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(\theta_{||} - \theta_\perp) = N \tag{7.44}$$
$$\theta_\perp\dot{\omega}_3 + \omega_2\omega_1(\theta_{||} - \theta_\perp) = 0. \tag{7.45}$$

A (7.43) egyenlet ismét azt mondja nekünk, hogy súrlódás hiányában a nem csillapodik a forgómozgás, azaz $\omega_1 = $ állandó. Vezessük be $\tau = (\theta_{||} - \theta_\perp)/\theta_\perp$ konstansot. Deriváljuk idő szerint még egyszer a (7.44) és (7.45) egyenleteket még egyszer:

$$\ddot{\omega}_2 = -\tau\omega_1\dot{\omega}_3 \tag{7.46}$$
$$\ddot{\omega}_3 = -\tau\omega_1\dot{\omega}_2. \tag{7.47}$$

Az egyenletek jobb oldalán álló $\dot{\omega}_3$ és $\dot{\omega}_2$ változókat az (7.45) és (7.44) egyenletekből behelyettesítjük:

$$\ddot{\omega}_2 = -\tau^2\omega_1^2\ \omega_2 \tag{7.48}$$
$$\ddot{\omega}_3 = -\tau^2\omega_1^2\ \omega_3 + \frac{N\tau\omega_1}{\theta_\perp}. \tag{7.49}$$

Pontosan azt kaptuk, amit a kísérletek mutatnak, egy $\mathbf{e}_1$ irányban forgó testre, a $\mathbf{e}_2$ irányba ható forgatónyomaték a $\mathbf{e}_3$ irányba növeli meg a test szögsebességét, míg a $\mathbf{e}_2$ irányban a szögsebesség zérus marad.

8. fejezet

Deformálható testek mechanikája

8.1. Általános mérlegegyenletek

A természettudományos vizsgálódásunknak (most elsősorban gondoljunk a fizikára) az az objektív alapja, hogy az univerzumunkban valamiféle rend van. És ezt a rendet az ember (jelesül most a fizikus) képes felismerni. Mintázatokat vélünk tapasztalni a jelenségek minden szintjén. Ez teszi lehetővé azt, hogy matematikai modelleket gyártsunk, amelyek hűek és így belőlük számokkal megfogalmazható eredményeket kaphassunk. Ezeket aztán lehet a megfigyelésekkel, vagy tudatos mérésekkel ellenőrizni. Ha a modellünk jó, akkor számszerű egyezést fogunk tapasztalni. Azt mondjuk erre, hogy a modellünknek reálisnak kell lennie. Nem célunk most a modellalkotás filozófiai problémáiról beszélni. A kvantummechanikai tanulmányainknál ez úgyis elkerülhetetlen.

Ha egy törvény olyan, hogy nagyon sokféle természeti jelenségre értelmezhető, akkor az valami nagyon alapvető mintázatot, univerzális igazságot fogalmaz meg. A fizikus szeret ilyeneket találni, mert ez a dolgok lényegi megértését jelenti számára.

Ilyen univerzális törvényeket fogalmazunk meg az ún. mérlegegyenletekben. Ezek extenzív fizikai mennyiségek nagyon általános (térbeli és időbeli) tulajdonságait fogalmazzák meg. Érvényes lehet anyagi dolgokra (szubsztancia), mint pl. egy városba tartózkodó emberek száma. Vagy pedig nem anyagi természetű dolgokra, valamiféle számmal jellemezhető tulajdonságra (attribútum) mint pl. az energia. Mint látni fogjuk, a példaként felhozott két fogalom nagyon távoli egymástól, mégis ugyanolyan mérlegegyenleteknek tesznek eleget.

A fizikai jelenségeket mindig a tér egy általunk jól elkülönített részében figyeljük meg. Ezt a térrészt egy zárt felülettel elválasztjuk a környezetétől. A felület által határolt térrészben lévő objektumok alkotják a fizika rendszert amelyet valamilyen extenzív vagy intenzív (reális) fizikai mennyiségekkel jellemzünk (lásd Termodinamika). Egy fizikai jellemző extenzívitása nagyon általános tulajdonságokat eredményez. A mérlegegyenletekben éppen ezeket fogalmazzuk meg.

Legyen w egy extenzív mennyiség (például: tömeg, energia, impulzus, töltés, stb.) és $\rho_w(\mathbf{r},t)$ a w mennyiség *térfogatsűrűsége*. Ez azt jelenti, hogy a tér egy $\mathbf{r}$ pontjában egy t időpillanatban egy dV térfogatelemben ebből a fizikai mennyiségből $dw = \rho_w dV$ van jelen. A $\rho_w(\mathbf{r},t)$ mértékegysége tehát:

$$[\rho_w] = \frac{[w]}{\mathrm{m}^3} \tag{8.1}$$

A w extenzív mennyiségből képzett $\rho_w(\mathbf{r},t)$ térfogatsűrűség már intenzív mennyiség. Mivel a w mennyiség áramolhat ezért hasznos bevezetni a w mennyiség $\mathbf{j}_w$ áramsűrűségét. Ez egy adott $d\mathbf{A}$ felületen egységnyi idő alatt átáramló w mennyiségét méri:

$$\mathbf{j}_w d\mathbf{A} = \frac{dw}{dt} \tag{8.2}$$

Az áramsűrűség mértékegysége:

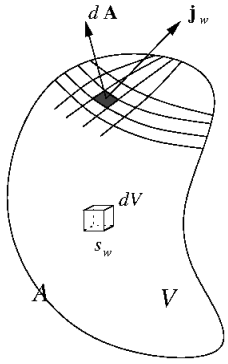
$$[j_w] = \frac{[w]}{\mathrm{s\ m}^2}. \tag{8.3}$$

Az adott mennyiség nem csak áramolhat, hanem keletkezhet és eltűnhet is. Ezt a folyamatot a s_w forrássűrűséggel jellemezzük. Ez megadja, hogy egy elemi térfogatban egységnyi idő alatt mennyi w keletkezik, illetve tűnik el:

$$s_w dV = \frac{dw}{dt}. \tag{8.4}$$

A forrássűrűség mértékegysége:

$$[s_w] = \frac{[w]}{\mathrm{s\ m}^3}. \tag{8.5}$$



8.1. ábra. Egy adott V térfogat a laborrendszerben. A $d\mathbf{A}$ felületelem vektor mindig merőleges a felületre és a térfogatból kifele mutat.

Legyen adott a laborrendszerben egy A felületű V térfogatú tartomány. Ebben a tartományban található w mennyisége a következő:

$$w(t) = \int_V \rho_w(\mathbf{r}, t) dV \tag{8.6}$$

A tartományban a w extenzív mennyiség csak kétféle módon változhat: (i) vagy átlép a felületen, (ii) vagy belül keletkezik. A most bevezetett fogalmakkal ez a következő módon fogalmazható meg:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho_w(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \partial_t \rho_w(\mathbf{r}, t) dV = \underbrace{-\oint_A \mathbf{j}_w d\mathbf{A}}_{\text{(i)}} \underbrace{+\int_v s_w dV}_{\text{(ii)}} \tag{8.7}$$

Az egyenlet bal oldalán az idő szerinti deriválást át lehet vinni az integrálon, mivel a vizsgált térfogat időben állandó. Az A felületre vett integrál előtt minusz jel áll, mivel a $d\mathbf{A}$ felületelem vektor a testből kifelé mutat, tehát kifelé folyó áram esetén lesz pozitív az integrandus, ami viszont w csökkenését eredményezi.

Általánosabb lenne a fenti képlet, ha az összes integrál térfogat szerinti lenne. Ebben nyújt segítséget a Gauss-Osztrogradszkij-tétel[8] amely egy tetszőleges $\mathbf{u}$ vektormennyiség térfogati és felületi integrálja között teremt kapcsolatot:

$$\oint_A \mathbf{u} d\mathbf{A} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{u} dV. \tag{8.8}$$

Mint már a Matematikai bevezetőben 1.2 is említettük a divergencia szemléletes jelentése az adott mennyiség lokális kitágulásának mértéke. A (8.8) egyenletet kihasználva kapjuk, hogy

$$\int_V \partial_t \rho_w dV = -\int_V \mathrm{div}\mathbf{j}_w dV + \int_V s_w dV \tag{8.9}$$

Átrendezve:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_w - s_w \right) dV = 0 \tag{8.10}$$

A fenti egyenlet tetszőleges térfogat esetén igaz ez csak akkor teljesülhet, ha maga az integrandus is zérus:

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_w = s_w \tag{8.11}$$

Ez a differenciális mérlegegyenlet, amit szokás még kontinuitási egyenletnek is nevezni. Ha forrás nincsen ($s_w = 0$), akkor megmaradási tételről beszélünk:

$$\partial_t \rho_w + \nabla \mathbf{j}_w = 0 \tag{8.12}$$

8.1.1. Konvektív, konduktív áram

Az eddigiekben nem beszéltünk arról, hogy milyen konkrét extenzív mennyiségre kell gondolnunk, amikor a fizikában mérlegegyenletekről beszélünk. A későbbi szemlélet (elektrodinamika, kvantummechanika) kialakítása végett célszerű a történeti utat követni. Ez ugyanis szépen tükrözi az általánosításoknak a szükségszerűségét. Kiindulásul egy konkrét fizikai rendszerrel, a tömegpontrendszerrel foglalkozunk. Méghozzá olyannal, ahol a rendszer (makroszkopikus) térfogata akkora, hogy kontinuum eloszlású anyagmodellt lehet használni. Ezt nevezzük folytonos anyageloszlású testnek, vagy egyetlen szóval közegnek. Az ilyen rendszer dinamikájával a kontinuummechanika foglalkozik.

A kontinuummechanikában a következő extenzív mechanikai mennyiségekre célszerű mérlegegyenleteket felírni.

Tömeg:	m	tömegsűrűség:	$\rho_m(\mathbf{r},t)$	$\equiv$	$\rho(\mathbf{r},t)$
Energia:	E	energiasűrűség:	$\rho_E(\mathbf{r},t)$	$\equiv$	$\rho(\mathbf{r},t)v^2(\mathbf{r},t)/2$
Impulzus:	$\mathbf{p}$	impulzussűrűség:	$\rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)$	$\equiv$	$\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{p}(\mathbf{r},t)$
Töltés:	Q	töltéssűrűség:	$\rho_Q(\mathbf{r},t)$	$\equiv$	$dQ(\mathbf{r},t)/dV$

Tömeg esetén, illetve elektrodinamikában a töltéssűrűség esetén általában nem írjuk ki az indexet. Az impulzusmomentum mérlegegyenletével nem foglalkozunk, ugyanis nem mond lényegesen többet, mint az impulzusmérleg. Majd alkalomadtán megemlítjük az idevonatkozó fizikai tudnivalókat.

Látható, hogy ezekben a fontos esetekben a anyagsűrűség, azaz az maguk az anyagi pontok hordozzák az extenzív mennyiséget (impulzus, energia, perdület, töltés). Az egyszerűbb szóhasználat végett úgy beszélünk ezekről a fizikai mennyiségekről, mintha maguk is szubsztanciák, valamiféle megfogható dolgok, önálló anyagi létezők volnának, holott ezek a közeget alkotó tömegpontok dinamikai tulajdonságai. Mindegyik esetben mérlegegyenleteket tudunk használni. Ez az absztrakció teszi lehetővé majd azt, hogy a kontinuummechanikában kidolgozott sikeres szemléletet átvigyük a fizika más területeire is (elektrodinamika, kvantummechanika).

A következőkben az áramsűrűséget vizsgáljuk. Az áramsűrűségnek két fajtáját ismerjük, ezek a *konvektív áramsűrűség*:

$$\mathbf{j}_{w,\mathrm{v}} = \rho_w \mathbf{v}, \tag{8.13}$$

valamint a *diffúziós áramsűrűség* izotrop esetre:

$$\mathbf{j}_{w,\mathrm{d}} = -D\nabla\rho_w \tag{8.14}$$

A konvektív áramsűrűséget a tömegpontok makroszkopikus rendezett elmozdulása, áramlása hozza létre. Ezért szerepel benne a áramlási sebesség. A konduktív áramsűrűséghez nem csatolódik makroszkopikus rendezett elmozdulás. A példaként felírt diffúziós áramot a részecskék rendezetlen, véletlenszerű mozgása idézi elő. És ezt a makroszkopikus skálán

a tömegsűrűség inhomogenitásával tudjuk figyelembe venni (Fick-féle egyenlet). A jelenség természetéből fakad tehát, hogy ennek részletes mikrofizikai hátterével a statisztikus fizika foglalkozik.

Írjuk fel a kontinuitási egyenletet mindkét esetre.

$$\partial_t \rho_w + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{v}) = s_w \tag{8.15}$$

$$\partial_t \rho_w - D\Delta\rho_w = s_w \tag{8.16}$$

A (8.16) egyenlet viszont a közismert diffúziós egyenlet [9], ahogy azt vártuk is. Általában nem mindig tudunk kiindulásul ilyen konduktív áramokat felírni. Ezek legtöbbször az alap dinamikai egyenleteknek a kontinuitási egyenletbe való átírásakor kijönnek. Röviden azt mondhatjuk, hogy minden olyan áramsűrűség, amelyik nem konvektív, azaz nem írható (8.13) alakba, az szükségképpen konduktív lesz még akkor is, ha a szemléletünk ezt nem látja.

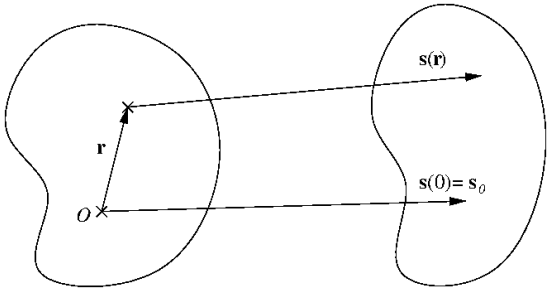
8.2. Deformálható testek kinematikája

A kontinuum anyagmodellt az előzőekben már sikeresen használtuk egy speciális pontrendszer, a merev testek dinamikájának a tárgyalásakor (7 fejezet). Most elhagyjuk azt a megkötést, amely a merev testeket merevvé tette, azaz megengedjük, hogy a test pontjai közötti távolság megváltozzon. Ez a változás azonban nem tetszőleges, hanem a testre ható külső és belső erők határozzák meg. A pontrendszer szemléletben megjelenő belső erők tulajdonsága a makroszkopikus skálán az illető anyagra jellemző anyagi tulajdonságként jelenik meg. A deformálható testeknek, közegeknek ezek a makroszkopikus jellemzői definiálják azt, hogy gáz, folyadék vagy rugalmas közeg dinamikáját kell meghatároznunk.

Először a deformálható testek mozgásának a leírásával kell foglalkoznunk és csak ennek ismeretében térhetünk át a dinamikára.

A már ismert technikát követve vegyünk fel egy álló vonatkoztatási rendszert, a labor rendszert. A deformálható testünk mozgását ebben a labor rendszerben fogjuk vizsgálni. A test egy pontját a labor rendszerben elfoglalt helye alapján azonosítjuk. Ha a deformálható test (a közeg) mozgásban van, akkor minden pontjának a helye az időben változni fog. Ez a fajta szemlélet túl általános és ugyanúgy nem vezet eredményre, mint azt a pontrendszerek esetében láttuk. Szűkítsük le a vizsgálatunkat csak a deformálhatóságra. Mint azt láttuk, ez azt jelenti, hogy (ellentétben a merev testekkel) most a közeg pontjai közötti távolság már nem marad állandó. Sőt, ennek a változásnak a meghatározása jelenti az új feladatot.

Összehasonlítva a merev testek mozgásával azt várjuk, hogy a test pontjainak elmozdulását három különböző folyamatra tudjuk bontani: Transzláció, forgás, deformáció. A deformáció vizsgálatához célszerű az első két elmozdulástípust leválasztani az anyag



8.2. ábra. Deformálható test paraméterezése laborrendszerben. Az eredeti állapot pontjait a $\mathbf{r}$ helyvektor paraméterezi, az elmozdulást a $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ vektor.

mozgásából. Vizsgálatunkat lineáris rendig fogjuk csak elvégezni, ezért megköveteljük, hogy a test pontjainak elmozdulása legyen kicsi.

A probléma jellegéből fakadóan célszerű a közeg pontjainak a helyzetét a közeg egy kiválasztott pontjához viszonyítva megadni amint a 8.2 ábra szemlélteti. Legyen ez az pont 0, amely természetesen mozoghat is. A közeg pontjait az 0 pontból mért helyvektorral azonosítjuk. Egy pont mozgását az $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ függvény írja le. Ez lesz a keresett mennyiségünk.

Legyen az 0 referenciapont elmozdulása $\mathbf{s}_0$. Ez a mennyiség írja le a közeg transzlációját. Ezt az elemi komponenst érdemes kihagyni a deformáció tanulmányozásából, ezért mivel kinematikáról van szó megtehetjük, hogy az origót mindig az $\mathbf{s}_0$ pontba rakjuk és az $\mathbf{r}$ helyvektorokat innét mérjük. Emellett bevezetjük a

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r}) - \mathbf{s}_0. \tag{8.17}$$

mennyiséget, ami a deformáció transzlációtól megtisztított részét tartalmazza. A fenti definíció segítségével sikerült az $\mathbf{s}_0$ tiszta elmozdulást kitranszformálni a $\mathbf{s}$ vektorokból. Mivel a deformációra vagyunk kíváncsiak le kell választanunk még a forgómozgást is. Kis elmozdulásokra sorbafejthetjük a relatív elmozdulás i-edik ($i = 1, 2, 3$) komponensét első rendig:

$$\Delta\mathbf{s}_i(\mathbf{r}) \simeq \frac{\partial s_i}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial s_i}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial s_i}{\partial x_3}x_3 = \sum_{j=1}^{3}(\partial_j s_i)x_j = \sum_{j=1}^{3}(\mathbf{Ds})_{ij}x_j \tag{8.18}$$

Tehát úgy néz ki, hogy első rendben a relatív elmozdulás vektor lineáris függvénye a helyvektornak, azaz:

$$\Delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) = (\mathbf{Ds})\mathbf{r}, \tag{8.19}$$

ahol a $\mathbf{Ds} = \nabla \otimes \mathbf{s}$ a *deriválttenzor*, ami a nabla operátor és az elmozdulás vektor diadikus szorzata.

Mint minden tenzor, **Ds** is előállítható egy szimmetrikus $\boldsymbol{\varepsilon}$ és egy **a** antiszimmetrikus tenzor összegeként:

$$\mathbf{Ds} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{a}, \tag{8.20}$$

ahol $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ és $a_{ij} = -a_{ji}$, minden i, j párra. Az előállítás:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\partial_j s_i + \partial_i s_j\right) \\ a_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\partial_j s_i - \partial_i s_j\right). \end{aligned} \tag{8.21}$$

Az elmozdulás vektort tehát három részre bontottuk. Meg fogjuk mutatni, hogy az antiszimmetrikus **a** rész jellemzi a forgatást és így a $\boldsymbol{\varepsilon}$ írja le a test deformációját. Azaz:

$$\mathbf{s} = \underbrace{\mathbf{s}_0}_{\text{eltolás}} + \underbrace{\mathbf{ar}}_{\text{forgatás}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}}_{\text{deformáció}} \tag{8.22}$$

Az eltolás mértékegysége a méter $[\mathbf{s}_0] = \mathrm{m}$, az elforgatás és deformáció viszont 1 dimenziójú $[a_{ij}] = [\varepsilon_{ij}] = 1$.

8.2.1. Elforgatás

Mutassuk meg, hogy a **Ds** deriválttenzor antiszimmetrikus része a forgatás.

$$\begin{aligned} \mathbf{ar} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{12}y + a_{13}z \\ a_{23}z - a_{12}x \\ -a_{13}x - a_{23}y \end{pmatrix} \\ d\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} d\phi_y z - d\phi_z y \\ d\phi_z x - d\phi_x z \\ d\phi_y y - d\phi_y x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.23}$$

A (8.23) egyenlet felső sorában Descartes koordináta-rendszerben kifejtettük az elmozdulás antiszimmetrikus részét, az alsó sorban egy infinitezimális forgatást írtunk fel. Nyilvánvaló, hogy az alábbi szögválasztással a két kifejezés azonos lesz:

$$\begin{pmatrix} d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{23} \\ a_{13} \\ -a_{12} \end{pmatrix} \tag{8.24}$$

Tehát ha infinitezimális elmozdulásokat vizsgálunk, akkor a derivált tenzor antiszimmetrikus része a test merev testként történő elfordulását írja le.

8.2.2. Deformáció

A fentiekben láttuk, hogy $\mathbf{s}_0$ és $\mathbf{a}$ tenzorok olyan transzformációkat írnak le, amelyek során a test pontjainak egymáshoz viszonyított távolsága nem változik. Tehát a test deformációját a $\boldsymbol{\varepsilon}$ tenzor adja meg:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j s_i + \partial_i s_j) \tag{8.25}$$

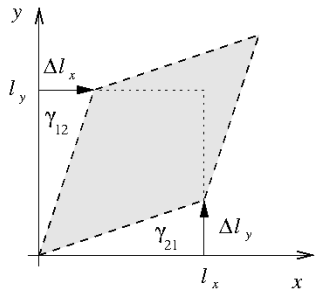
Vizsgáljuk meg a deformációs tenzor különböző elemeinek jelentését! Két pont közti távolság megváltozása tehát a következőképpen írható:

$$\Delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}. \tag{8.26}$$

Legyen $\mathbf{r} = (l_x, l_y, l_z)$, ekkor a főátlóban lévő elemek jelentése:

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \varepsilon_{ii} l_i \\ \varepsilon_{ii} &= \frac{\Delta s_i}{l_i}, \quad i \in \{x, y, z\} \end{aligned} \tag{8.27}$$

Azaz a főátlóban lévő elemek a deformáció hatására létrejött relatív megnyúlást fejezik ki.



8.3. ábra. Nyírási deformáció, a deformáció tenzor nem főátlóbeli elemeinek szemléltetése.

A mellékátlóban szereplő tagok jelentését 8.3 ábra szemlélteti. A ε_{yx} azt mondja meg, hogy az egységnyi hosszú x irányú szakasz mennyit deformálódott y irányban, azaz

$$\Delta l_y = \varepsilon_{yx} l_x. \tag{8.28}$$

Mivel $\boldsymbol{\varepsilon}$ szimmetrikus tenzor, ezért az y irányú egységszakasz is ugyanennyit deformálódik x irányban:

$$\Delta l_x = \varepsilon_{xy} l_y \equiv \varepsilon_{yx} l_y \tag{8.29}$$

Tehát a deformáció során az egységnégyzetből paralelogramma lesz. Ezt a deformációt nevezzük nyírásnak, vagy szögdeformációnak. Kis deformáció esetén az oldalak szögelfordulása:

$$\gamma_{xz} \equiv \gamma_{yx} \simeq \tan\gamma = \varepsilon_{yx} = \frac{\Delta s_y}{l_x} \tag{8.30}$$

8.2.3. Térfogatváltozás

A deformáció hatására a test térfogata megváltozhat. Mivel kis deformációkkal foglalkozunk ezért csak $\boldsymbol{\varepsilon}$ első rendben vizsgáljuk a problémát. Az $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformáció-tenzor szimmetrikus ezért sajátértékei valósak és létezik főtengely-rendszere, amelyben diagonális lesz a deformációmátrix. Ilyenkor a deformáció pusztán megnyúlásokból áll:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{8.31}$$

Az egység sugarú gömbből ellipszoid lesz, ahol az ellipszis tengelyei (8.27) egyenlet alapján $(l_1', l_2', l_3') = (1+\varepsilon_{11}, 1+\varepsilon_{22}, 1+\varepsilon_{33})$ nagyságúak. A térfogatváltozás első rendig

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(l_1' l_2' l_3' - 1) = \frac{4}{3}\pi(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) + \mathcal{O}(\varepsilon_{ii}^2). \tag{8.32}$$

A relatív térfogatváltozás tehát $\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$.

A térfogatváltozást más úton is meg lehet kapni. Most tetszőleges koordináta-rendszerben írjuk fel az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ egységvektorok által kifeszített kocka térfogatát:

$$V = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3 = 1 \tag{8.33}$$

Közismert, hogy

$$(a \times b)c = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{8.34}$$

Illetve a deformáció hatására megváltozott egységvektorok a következők lesznek:

$$\mathbf{e}_1' = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} \\ 1+\varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{32} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ 1+\varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{8.35}$$

Ezért a deformáció:

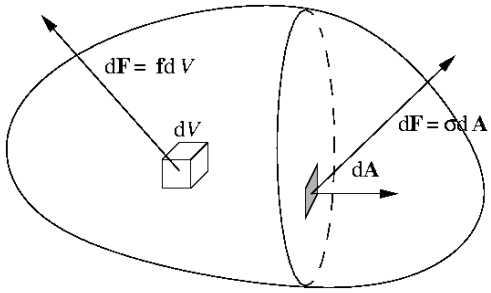
$$\frac{\Delta V}{V} = \det(1+\boldsymbol{\varepsilon}) \simeq \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{8.36}$$

Tehát még egyszer megkaptuk ugyanazt az eredményt. Érdemes a kapott képletbe visszaírni $\boldsymbol{\varepsilon}$ definícióját:

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \partial_1 s_1 + \partial_2 s_2 + \partial_3 s_3 = \mathrm{div}\mathbf{s} \tag{8.37}$$

Azaz térfogatváltozás az elmozdulásvektor divergenciájával egyezik meg. Ez viszont pont megfelel a divergencia szemléletes jelentésének. Továbbá, ha olyan anyagunk van, amely összenyomhatatlan, akkor abban div$\mathbf{s}$ azaz az elmozdulások divergenciája zérus.

8.3. Erőhatások deformálható testekben



8.4. ábra. Deformálható testben ható térfogati és felületi erők szemléltetése.

Az előzőekben tárgyalt deformációk erők hatására jönnek létre. A deformálható testekben fellépő erőhatások lehetnek *térfogati* és *felületi erők*. A 8.4 ábra szemlélteti ezeket az erőhatásokat. Mivel az erők helyről helyre változhatnak ezért érdemes ezek sűrűségével számolni. A térfogati erősűrűséget a $\mathbf{f}$ szimbólummal jelöljük és az infinitezimális dV térfogatra ható erő:

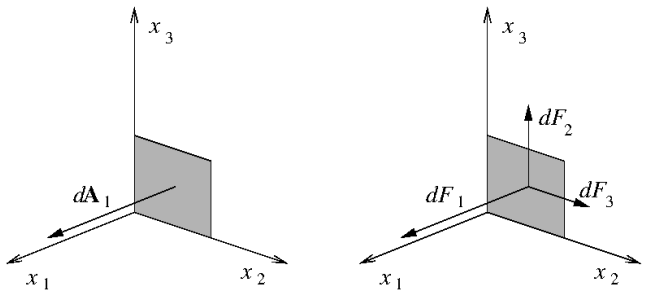
$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}dV, \tag{8.38}$$

amiből jól látható, hogy a térfogati erősűrűség mértékegysége $[\mathbf{f}] = \mathrm{N/m^3}$. A felületi erősűrűség egy infinitezimális felületelem és egy infinitezimális erő között teremt kapcsolatot. Mivel mindkét mennyiség vektor, ezért a felületi erősűrűség egy tenzor lesz, amit $\boldsymbol{\sigma}$-val jelölünk. Neve *mechanikai feszültség tenzor*. Elemeinek mértékegysége: $[\sigma_{ij}] = \mathrm{N/m^2}$. A $d\mathbf{A}$ felületen létrejövő erőhatást a következőképpen kaphatjuk meg:

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}d\mathbf{A}. \tag{8.39}$$

Vizsgáljuk meg a mechanikai feszültség tenzor elemeinek jelentését! Válasszunk egy $\mathbf{e}_1$ normálvektorú $d\mathbf{A}_1$ felületet. Az erre ható erőt a következőképpen számítjuk ki:

$$d\mathbf{F}(d\mathbf{A}_1) = \begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}dA_1 \\ \sigma_{21}dA_1 \\ \sigma_{31}dA_1 \end{pmatrix} \tag{8.40}$$



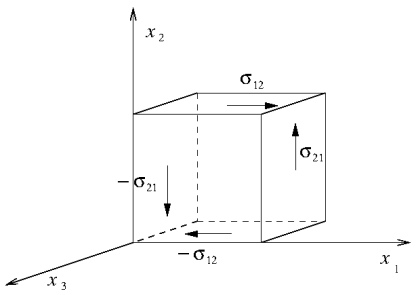
8.5. ábra. A mechanikai feszültség-tenzor elemeinek jelentésének szemléltetése.

A kapott erőkomponenseket a 8.5 ábra szemlélteti. Jól látható, hogy a σ_{11} a felület normálisának irányában, míg a másik két komponens a felület síkja irányában fejt ki erőhatást. Hasonlóan megmutatható a többi komponensre is, hogy $\boldsymbol{\sigma}$ főátlóbeli komponensei (σ_{ii}) a *húzófeszültséget*, a többi elem ($\sigma_{ij},\ i \neq j$) a *nyírófeszültséget* írja le.

Megmutatható még, hogy a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültség tenzor szimmetrikus. Válasszunk egy kis elemi térfogatot, amelyben a következő feszültség-tenzor hat:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.41}$$

Ekkor a kis kockán a 8.6 ábrán látható erők hatnak. Jól látható, hogy σ_{12} a kocka két átellenes lapján ellentétes irányú erőt hoz létre, amely forgatónyomatékkal hat az elemi térfogatra. Statikában nem lehet gyorsulása a rendszernek, ezért nem lehet kompenzálatlan forgatónyomaték az elemi térfogatokon, ezért $\sigma_{21} = \sigma_{12}$. Tehát a két tenzorelem megegyezik, azaz a feszültség-tenzor *szimmetrikus*.



8.6. ábra. A feszültség-tenzor elemei hatására létrejövő forgatónyomaték szemléltetése.

8.4. Rugalmas közegek dinamikája

A rugalmas közegben fellépő erők és a deformáció nem függetlenek egymástól, hiszen erők hatására deformálódik a test és viszont, a deformálódott testben erők, feszültségek lépnek fel. Kis deformációkra ezt a kapcsolatot lineárisan lehet közelíteni, de sok esetben nagyobb elmozdulások esetén is fennmarad a lineáris kapcsolat, mint pl. rugó, húr. Ezt a lineáris kapcsolatot Hooke-törvénynek hívjuk.

Robert Hooke 1660-ban először anagrammaként publikálta a fenti lineáris összefüggést *"ceiiinosssttuv"*, azaz *"ut tensio, sic vis"*. Jelentése, amekkora megnyúlás, akkor az erő. Most mi ennek egy általános változatát használjuk, és a teljes három dimenziós deformációra alkalmazzuk. Két tenzor a feszültség $\boldsymbol{\sigma}$ és a deformáció $\boldsymbol{\varepsilon}$ között kell kapcsolatot teremteni, ami szintén egy tenzor:

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} c_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{8.42}$$

ahol $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. A c_{ijkl} tenzor egy 81 elemű mátrix, azonban az elemei nem függetlenek egymástól. Mind $\boldsymbol{\sigma}$, mind $\boldsymbol{\varepsilon}$ szimmetrikus és csak $6 - 6$ független elemük van ezért c_{ijkl} maximum 36 független elemet tartalmazhat. Megmutatható, a deformációs energia változatlanságával, hogy c_{ijkl} is szimmetrikus és legáltalánosabb esetben is csak 21 független eleme lehet.

Izotrop anyagok esetén, ahol a fizikai tulajdonságok irányfüggetlenek, ezért $\boldsymbol{\varepsilon}$ és $\boldsymbol{\sigma}$ egyszerre diagonalizálható. Ilyenkor csak két független állandó marad a deformáció és feszültség kapcsolatában, ahol az egyik (*bulk modulus*) a térfogatváltozással, a másik (*shear modulus*) a nyírással szembeni ellenállást fejezi ki. Ezt nézzük meg részletesen!

Vizsgáljunk meg izotrop anyag esetén a feszültség és a deformáció közti kapcsolatot. A deformáció főtengely-rendszerében a feszültség is diagonális, mivel az offdiagonális elemek szimmetriát sértenének egy izotrop rendszerben. Írjuk fel σ_{11}-et!

$$\sigma_{11} = a\varepsilon_{11} + b\varepsilon_{22} + c\varepsilon_{33}, \tag{8.43}$$

ahol a, b, c konstansok c_{ijkl} megfelelő elemei. Az 1-es irányból nézve a 2-es és 3-as irány ekvivalens ezért azok hatása is az. Tehát $c \equiv b$. Hasonlóan a többi koordinátára felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= a\varepsilon_{11} + b(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\
\sigma_{22} &= a\varepsilon_{22} + b(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) \\
\sigma_{33} &= a\varepsilon_{33} + b(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})
\end{aligned} \tag{8.44}$$

Vezessük be az alábbi állandókat!

$$\begin{aligned}
\lambda &= b \\
2\mu &= a - b
\end{aligned} \tag{8.45}$$

Ekkor a (8.44) egyenlet a következőképpen írható

$$\sigma_{ii} = 2\mu\varepsilon_{ii} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \tag{8.46}$$

ahol $i = \{1, 2, 3\}$. Ugyanez az egyenlet tenzor alakban:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} \tag{8.47}$$

Mivel (8.47) koordináta független alak és $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ nem függ a forgatástól, ezért az egyenlet tetszőleges bázisban igaz lesz. Komponensenkét kiírva:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij}. \tag{8.48}$$

A λ, μ párost Lamé-állandóknak nevezzük. Bár a levezetés így volt egyszerűbb és a továbbiakban 8.47 egyenletet fogjuk használni a mindennapokban leggyakrabban nem a Lamé-állandókat használják. Gyakoribb párok a (K, G), ahol K az összenyomhatóság (*bulk modulus*), G a nyírási rugalmassági modulus (*shear modulus*), illetve a (E, ν), ahol E a Young, vagy rugalmassági modulus, ν a Poisson-tényező. Kapcsolatukat a 8.1 táblázat tartalmazza.

	(λ, μ)	(K, G)	(E, ν)
(λ, μ)	(λ, μ)	$\left(K - \frac{2G}{3}, G\right)$	$\left(\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \frac{E}{2(1+\nu)}\right)$
(K, G)	$\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}, \mu\right)$	(K, G)	$\left(\frac{E}{3(1-2\nu)}, \frac{E}{2(1+\nu)}\right)$
(E, ν)	$\left(\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)$	$\left(\frac{9KG}{3K+G}, \frac{3K-2G}{2(3K+G)}\right)$	(E, ν)

8.1. táblázat. Az izotrop Hooke-törvény paraméterei közötti összefüggés.

A különböző paraméterek meghatározása a következő:

- *Összenyomhatóság*:

$$K = -V\frac{dP}{dV} \tag{8.49}$$

  Izotrop nyomás hatására létrejött relatív térfogatváltozás.

- *nyírási rugalmassági modulus*:

$$G = \frac{F}{A \arctan\theta}, \tag{8.50}$$

  ahol az F nyíróerő az arra merőleges A felületre hatva θ szögdeformációt hoz létre.

- *Rugalmassági modulus*:

$$E = \frac{d\sigma_{ii}}{d\varepsilon_{ii}}, \tag{8.51}$$

A nyomófeszültség, illetve a fajlagos összenyomódás hányadosa.

- *Poisson-tényező*:

$$\nu = -\frac{d\varepsilon_{\text{trans}}}{d\varepsilon_{\text{axial}}}, \tag{8.52}$$

Ez azt fejezi ki, hogy a tranzverzális megnyúlás milyen mértékű axiális megnyúlással párosul.

Végül pedig írjuk fel a Hooke-törvényt (E, ν) állandókkal tenzoros alakban!

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\nu}{E}\left[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma}\right], \tag{8.53}$$

illetve

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & 0 & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & 0 & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \tag{8.54}$$

8.5. A kontinuummechanika mozgásegyenlete

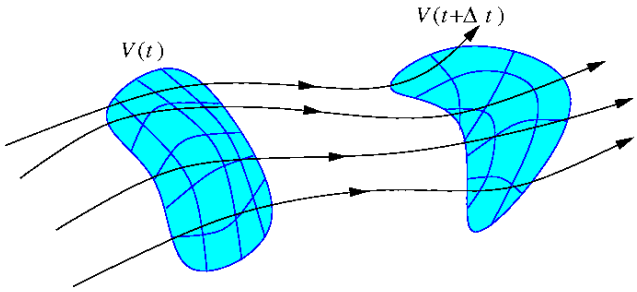
A kontinuummechanika célja a közegekre jellemző mozgásegyenletek felírása. Természetesen csak a Newton egyenletekből tudunk kiindulni, hiszen ez fogalmazza meg a mechanika alaptörvényeit, így a mozgásegyenletet is. Ez azonban tömegpontokra mond ki törvényeket. Kapcsolatot kell tehát teremteni a pontmechanika és a kontinuummechanika között. Ebben a fejezetben megnézzük, hogy mi lesz Newton II-ből kontinuum esetén:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{8.55}$$

Vizsgáljuk a közeg egy V térfogatú, A felületű, m tömegű és $\mathbf{p}$ impulzusú tartományának mozgását! Ezt úgy is lehet tekinteni, hogy a közeg egy tartományát befestjük kékre és követjük a kék paca mozgását (lásd 8.7 ábra).

Két lehetőségünk van a közegmozgás leírására:

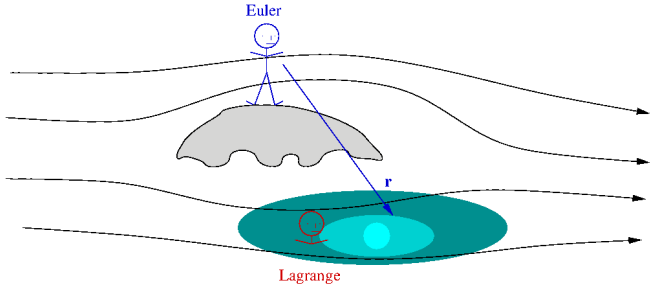
1. Lagrange-szemlélet: A V térfogatot, mint tömegpontot tekintjük és a mozgását követjük. Ez az együttmozgó, vagy Lagrange-szemlélet.



8.7. ábra. Áramló térfogat (kék paca) szemléltetése.

2. Euler-szemlélet: A labor rendszerben rögzített **r** pontban figyeljük a közeg mozgását az idő függvényében. Ez a térelméleti, vagy Euler-szemlélet.

A fenti kék pacás mintánál maradva, ez olyan, mintha a kék pacával együtt Lagrange is a vízbe szállna és úgy figyelné a közeg mozgását, míg Euler a parton egy pontot figyel (8.8 ábra).



8.8. ábra. Áramló térfogat (kék paca) szemléltetése.

8.5.1. Lagrange-féle mozgásegyenlet

A V térfogatú rész impulzusa az alábbiak szerint írható fel:

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{v} dV \tag{8.56}$$

Ezt felhasználva írjuk fel a mozgásegyenletet:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \oint_A \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} \tag{8.57}$$

Használjuk ki, hogy $dm = \rho dV$ és vizsgáljuk meg az egyenlet bal oldalán az integrandust:

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathbf{v} dV) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} dm) \tag{8.58}$$

Mivel az együttmozgás során a mozgó közeg tömege nem változik, ezért

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} dm) = dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{8.59}$$

Azaz

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dV \tag{8.60}$$

Most vizsgáljuk meg az (8.57) egyenlet feszültséget tartalmazó tagjának i komponensét!

$$\left[\oint_A \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} \right]_i = \oint_A \sum_j \sigma_{ij} dA_j \tag{8.61}$$

Definiáljuk a következő vektorokat:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}), \tag{8.62}$$

ahol $i \in \{1, 2, 3\}$. Komponensenkként:

$$(\boldsymbol{\sigma}_i)_j = \sigma_{ij} \tag{8.63}$$

A $\boldsymbol{\sigma}_i$ olyan mint egy vektormező, amely a feszültség-tenzor egy-egy sorát tartalmazza:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}_3 \end{pmatrix} \tag{8.64}$$

Ekkor a (8.61) egyenlet a következőképpen alakítható:

$$\oint_A \sum_j \sigma_{ij} dA_j = \oint_A \boldsymbol{\sigma}_i d\mathbf{A} \tag{8.65}$$

Kihasználva a Gauss-Osztrogradszkij-tételt[8] azt kapjuk, hogy

$$\oint_A \boldsymbol{\sigma}_i d\mathbf{A} = \int_V \mathrm{div} \boldsymbol{\sigma}_i dV = \int_V (\mathrm{div} \boldsymbol{\sigma})_i dV, \tag{8.66}$$

ahol $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}$ egy vektormező divergenciáját jelöli és definíciója:

$$(\mathrm{div} \boldsymbol{\sigma})_i \equiv \sum_j \partial_j \sigma_{ij} \tag{8.67}$$

A (8.57) egyenletet tehát a következőképpen írhatjuk át:

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \mathbf{f} + \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} dV \tag{8.68}$$

Mivel ez tetszőleges térfogatra igaz, ezért az integrandusoknak is ki kell elégíteni az egyenletet, azaz:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} \tag{8.69}$$

Ez a Lagrange-féle mozgásegyenlet.

8.5.2. Euler-féle mozgásegyenlet

Először is definiáljuk a szubsztanciális deriváltat, amit már a 8.1.1 fejezetben megemlítettünk. Vizsgáljuk egy $X(\mathbf{r}, t)$ mennyiség időbeli változását együttmozgó rendszerben!

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(\mathbf{r}, t) = \frac{d}{dt} X(\mathbf{r}(t), t) = \partial_t X + \partial_1 X \frac{dx_1}{dt} + \partial_2 X \frac{dx_2}{dt} + \partial_3 X \frac{dx_3}{dt} = \\ = \partial_t X + \mathbf{v}\mathrm{grad}(X) \end{aligned} \tag{8.70}$$

Azaz a szubsztanciális derivált azt fejezi ki, hogy egy mennyiség megváltozása létrejöhet a mennyiség explicit időbeli változásával, illetve áramlás általi megváltozással. A kék paca áramlására visszatérve, az első tag a paca szétterülését, míg a második annak a közeggel együttmozgását fejezi ki.

A (8.57) egyenlet bal oldalán az impulzussűrűség idő szerinti deriváltja található. A szubsztanciális deriváltat, illetve a Gauss-Osztrogradszkij-tételt kihasználva felírhatjuk (8.57) i komponensét:

$$\int_V \rho \partial_t v_i dV + \sum_j \rho v_j \partial_j v_i dV = \int_V \mathbf{f}_i + (\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_i dV. \tag{8.71}$$

Írjuk fel a tömegmegmaradást a (8.11) kontinuitási egyenlet alapján:

$$\partial_t \rho + \sum_j \partial_j (\rho v_j) = 0 \tag{8.72}$$

Adjuk hozzá a (8.71) egyenlet bal oldalához a (8.72) tömegmegmaradás v_i-szereség!

$$\int_V \left(\rho \partial_t v_i + v_i \partial_t \rho\right) dV + \int_V \left[\sum_j \rho v_j \partial_j v_i + v_i \partial_j (\rho v_j)\right] dV = \int_V \mathbf{f}_i + (\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_i dV. \tag{8.73}$$

A parciális integrálásokat összevonva kapjuk, hogy

$$\int_V \left[\partial_t (\rho v_i) + \sum_j \partial_j (\rho v_i v_j)\right] dV = \int_V \mathbf{f}_i + (\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_i dV. \tag{8.74}$$

Elhagyva az integrálást, és használva a diadikus szorzat (1.7) definícióját, megkapjuk a mozgásegyenlet Euler-alakban:

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f}. \tag{8.75}$$

Vegyük észre, hogy az Euler-féle mozgásegyenlet egy impulzusmérleg egyenlet! Nézzük a (8.11) egyenletet!

$$\frac{\partial\rho_w}{\partial t} + \nabla\mathbf{j}_w = s_w \tag{8.76}$$

- *Impulzus sűrűség*: $\rho_W = \rho v_i$
- *Impulzus áramsűrűség*: $(j_w)_k = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$
- *Impulzus forrássűrűség*: $s_w = f_i$

Az Euler és Lagrange mozgásegyenletek ugyanazt a folyamatot írják le más szemszögből és más koordinátákat használva.

Alakítsuk át (8.72) egyenletet!

$$\partial_t\rho + \sum_j \partial_j(\rho v_j) = 0$$

$$\partial_t\rho + \sum_j v_j\partial_j\rho + \sum_j \rho\partial_j v_j = 0 \tag{8.77}$$

A bal oldal első két tagja éppen ρ szubsztanciális deriváltja. Azaz

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho\mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \tag{8.78}$$

Amiből következik, hogy ha a közeg összenyomhatatlan, ρ=állandó, azaz $\frac{d}{dt}\rho$=0, akkor olyan az áramlás, hogy

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0. \tag{8.79}$$

A divergenciamentes vektorterekre lehet úgy is gondolni, mint összenyomhatatlan folyadék áramlására.

8.6. Közegmozgás

Ahhoz, hogy le tudjuk írni egy közeg mozgását kapcsolatot kell teremtenünk a ρ sűrűség, a $\mathbf{v}$ sebesség és a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültség között a tér minden pontjában minden időpillanatban figyelembe véve a határfeltételeket. Ez összesen $1+3+6=10$ ismeretlent jelent. Eddig

két egyenletet alkottunk meg, a tömeg-megmaradást (8.11), és a Lagrange-, vagy Euler-mozgásegyenletet, (8.69), illetve (8.75). Mivel a mozgásegyenletet vektoriális, ezért ez 4 egyenletet jelent.

A hiányzó egyenlet $\mathbf{v}$ és $\boldsymbol{\sigma}$ között kell, hogy kapcsolatot teremtsen, amely megmondja, hogy a relatív elmozdulások milyen feszültséget keltenek az anyagban. Ez az, ami különbséget tesz különböző anyagok (pl. szilárd deformálható, vagy folyadék) áramlása között.

8.6.1. Rugalmas közeg mozgása

Írjuk le izotrop Hooke-anyag (8.4 fejezet) mozgását! A Hooke-törvény (8.47)az elmozdulás és a feszültség között teremt kapcsolatot:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} \tag{8.80}$$

A mozgásegyenletekben div$\boldsymbol{\sigma}$ a feszültség divergenciája szerepel, ezért fejezzük ki azt a $\mathbf{s}$ elmozdulásvektorral, hiszen ez utóbbiból lehet származtatni a sebességet!

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij} \\ \sigma_{ij} &= \mu\partial_j s_i + \mu\partial_i s_j \lambda\delta_{ij} \sum_k \partial_k s_k,\end{aligned} \tag{8.81}$$

ahol kihasználtuk a deformáció definícióját (8.21). Most írjuk fel a feszültség divergenciáját!

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_i &= \sum_j \partial_j \sigma_{ij} \\ (\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_i &= \mu \underbrace{\sum_j \partial_j\partial_j s_i}_{\Delta s_i} + \mu\partial_i \sum_j \underbrace{\partial_j s_j}_{\mathrm{div}\mathbf{s}} + \lambda \underbrace{\sum_j \partial_j \delta_{ij}}_{\partial_i} \underbrace{\sum_k \partial_k s_k}_{\mathrm{div}\mathbf{s}}\end{aligned} \tag{8.82}$$

Azaz most már vektoriális alakban:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mu\Delta\mathbf{s} + (\mu+\lambda)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{s}) \tag{8.83}$$

Mivel az $\mathbf{s}(\mathbf{r},t)$ függvény az eredeti nyugalmi helyzetet írja le, $\partial_t\mathbf{s}$ már eleve az együttmozó sebességet jelöli, mivel a szubsztanciális deriválás szerint (8.70)

$$\frac{d}{dt}v_i = \partial_t v_i + \underbrace{\sum_j v_j\partial_j v_i}_{\mathcal{O}(v^2)}, \tag{8.84}$$

második tagja $\mathcal{O}(v^2)$ nagyságrendű ezért szilárd testekben elhanyagolható. Azaz:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \simeq \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \tag{8.85}$$

A Lagrange-féle mozgásegyenlet (8.69) deformálható szilárd testek esetén a következőképpen írható:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{s} + (\mu + \lambda) \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{s}) + \mathbf{f} \tag{8.86}$$

Most nézzük meg a fenti egyenlet divergenciáját olyan esetben, amikor div$\mathbf{f} \equiv 0$, kihasználva a Young-tételt, hogy a parciális deriválások sorrendje felcserélhető!

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 (\nabla \mathbf{s}) &= \mu \Delta (\nabla \mathbf{s}) + (\mu + \lambda) \nabla^2 (\nabla \mathbf{s}) \\ \rho \partial_t^2 (\nabla \mathbf{s}) &= (\lambda + 2\mu) \Delta (\nabla \mathbf{s}) \end{aligned} \tag{8.87}$$

A jól ismert hullámegyenlethez jutottunk a deformálható divergenciájára. Ez azt jelenti, hogy a deformáció divergenciája megváltozása terjed tovább az anyagban, azaz kompressziós hullámokról beszélhetünk. A terjedés sebességét is le tudjuk olvasni:

$$c_{\mathrm{kompr}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{8.88}$$

Most nézzük meg a (8.86) egyenlet rotációját! Használjuk ki, hogy rotgrad$X \equiv 0$!

$$\rho \partial_t^2 (\nabla \times \mathbf{s}) = \mu \Delta (\nabla \times \mathbf{s}) \tag{8.89}$$

Megint egy hullámegyenletre jutottunk, most azonban az elmozdulás rotációjára, azaz a torzióra. A torziós hullámok terjedési sebessége:

$$c_{\mathrm{torz}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{8.90}$$

Azaz a torziós hullámok lassabban haladnak lineáris rugalmas közegben, mint a kompressziós hullámok.

8.6.2. Ideális folyadék áramlása

Az ideális folyadékban nincs semmilyen nyírófeszültség semmilyen tesztsíkon. Emiatt vízszintes a folyadékok felülete nyugalomban és ezért vannak csak kompressziós hullámok folyadékban. Tehát a feszültségállapot gömbszerű, amit egyetlen paraméterrel, a nyomással írhatunk le:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) &= -p(\mathbf{r}, t)\mathbf{1} \end{aligned} \tag{8.91}$$

Fontos, hogy a nyomás definíciója pont ellentétes a feszültséggel ezért megjelenik egy mínusz előjel.

Számoljuk ki a feszültség-tenzor divergenciáját!

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_i = \sum_j \partial_j \sigma_{ij} = -\sum_j \partial_j p(\mathbf{r},t)\delta_{ij} = -\partial_i p = -(\mathrm{grad}p)_i$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = -\mathrm{grad}p \tag{8.92}$$

Írjuk fel az ideális folyadék Euler-egyenletét (8.75):

$$\rho\left(\partial_t v_i + \sum_j v_j \partial_j v_i\right) = -\partial_i p + f_i$$
$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\mathrm{grad}p + \mathbf{f}\right) \tag{8.93}$$

8.6.3. Newtoni-folyadék áramlása

A reális folyadékokban valóban nincs nyírófeszültség, de csak nyugalomban, amikor áramlik, akkor fellép súrlódás. Itt azt az esetet vizsgáljuk, amikor a dinamikus feszültség arányos a nyírási rátával. Tehát a feszültséget felbontjuk egy statikus és egy dinamikus részre:

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{-p\,\mathbf{1}}_{\text{statikus}} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}'}_{\text{dinamikus}} \tag{8.94}$$

A Newtoni-folyadék definíciója, hogy a $\boldsymbol{\sigma}'(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ függvény lineáris. Ha az anyag izotrop is, akkor a Hooke-törvény (8.4 fejezet) levezetésével teljesen analóg módon megkaphatjuk, hogy

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu'\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda'\mathrm{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\mathbf{1}, \tag{8.95}$$

ahol

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \tag{8.96}$$

Láttuk rugalmas esetnél az (8.83) egyenletben, hogy

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mu\Delta\mathbf{s} + (\mu+\lambda)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{s}) \tag{8.97}$$

Most a dinamikus részre azt kapjuk, hogy:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}' = \mu'\Delta\mathbf{v} + (\mu'+\lambda')\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{v}) \tag{8.98}$$

Legyen

$$\eta \equiv \mu' \tag{8.99}$$

a *dinamikai viszkozitás*. Az egészet beírva az (8.75) Euler-féle mozgásegyenletbe kihasználva, hogy a statikus tagnak már ismerjük az egyenletét (8.93):

$$\rho\left[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{v}\right] = -\mathrm{grad}p + \mathbf{f} + \eta\Delta\mathbf{v} + (\eta + \lambda')\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{v}) \tag{8.100}$$

Ez a *Navier-Stokes-egyenlet*!

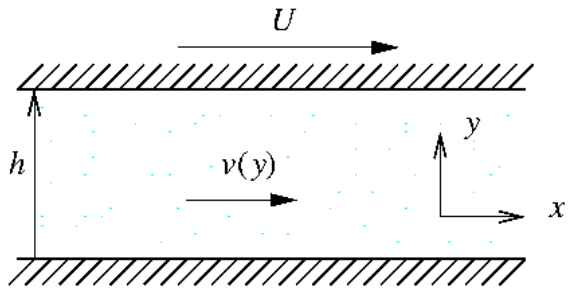
Érdemes még felírni az összenyomhatatlan folyadékra ($\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$) is a Navier-Stokes-egyenletet:

$$\begin{aligned}\rho\left[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{v}\right] &= -\mathrm{grad}p + \mathbf{f} + \eta\Delta\mathbf{v} \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{v} &= \frac{1}{\rho}(\mathrm{grad}p + \mathbf{f}) + \nu\Delta\mathbf{v},\end{aligned} \tag{8.101}$$

ahol $\nu = \eta/\rho$ a kinematikai viszkozitás.

A Navier-Stokes-egyenlet a hidrodinamika alapegyenlete a világ egyik leggyakrabban és legtöbb pénzt felemésztően megoldott egyenlete. Mivel nemlineáris, ezért nagyon nehezen kezelhető, bonyolult geometriákban, 3 dimenzióban nagy erős számításkapacitást igényel. Az alábbiakban néhány egyszerű esetben megoldjuk összenyomhatatlan folyadékra a Navier-Stokes-egyenletet.

8.1. Feladat Planáris Couette áramlás



8.9. ábra. Planáris Couette áramlás. A két y normálisú sík lap között folyadék áramlik. A felső lap U nagyságú x irányú sebességgel mozog, az alsó áll.

A 8.9 ábrán látható elrendezésben a folyadék két y normálisú sík lap között áramlik. A felső lap U nagyságú x irányú sebességgel mozog, az alsó áll. Mivel a rendszer stacionárius, ezért $\partial_t \mathbf{v} = 0$. Nincs külső erő $\mathbf{f} = 0$, nincs nyomásgradiens $\nabla p = 0$. A határfeltételek miatt A sebességnek csak x irányú komponense lehet $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$. Mivel a rendszer x és z irányokban eltolás szimmetrikus ezért a sebesség csak az y koordinátától függhet $v_x(y)$. Tehát a (8.101) egyenlet x komponense a következőképpen alakul

$$\sum_j v_j \partial_j v_x = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{8.102}$$

A bal oldal zérus, hiszen a deriválás csak $j = y$ esetén ad nem nulla tagod, míg v_j $j = x$ esetén. Azaz

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0, \tag{8.103}$$

amiből

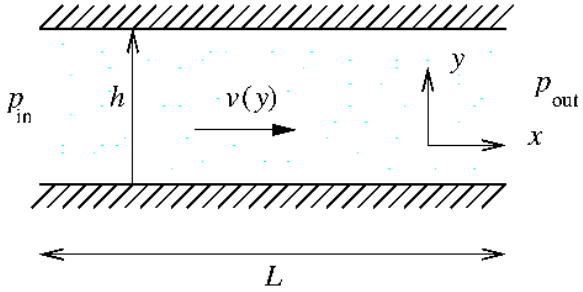
$$v_x = Ay + B \tag{8.104}$$

Ezt kell illeszteni a határfeltételekhez, amiből

$$v_x(y) = U\frac{y}{h}. \tag{8.105}$$

Azaz egy lineáris sebességprofilt kaptunk.

8.2. Feladat Planáris Poiseuille áramlás



8.10. ábra. Planáris Poiseuille áramlás. A két y normálisú álló L hosszú sík lap között folyadék áramlik $\Delta p = p_{\text{out}} - p_{\text{in}}$ nyomás hatására.

Vizsgáljuk meg miként áramlik egy összenyomhatatlan folyadék két álló síklap között nyomás hatására. A nyomásváltozás a L hosszúságú rendszerben $\Delta p = p_{out} - p_{in}$. Ekkor $\nabla p = (\Delta p/L, 0, 0)$. A mozgás stacionárius $\partial_t \mathbf{v} = 0$. Hasonlóan az előző feladathoz a sebességnek csak x komponense van, amely csak az y koordinátától függ, tehát $v_x(y)$-t keressük. Ugyanazon okok miatt a $(\mathbf{v}\text{grad})\mathbf{v}$ tag is eltűnik. Tehát a (8.101) egyenlet a következőre redukálódik:

$$\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\Delta p}{L\rho} = 0 \tag{8.106}$$

Ennek az általános megoldása:

$$v_x(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu\rho}y^2 + Ay + B \tag{8.107}$$

Tudjuk, hogy $v_x(y)$ a falaknál zérus értéket vesz fel, tehát:

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\mu\rho}y(h - y) \tag{8.108}$$

Azaz egy parabolikus sebességprofilt kaptunk.

II. rész

Elektrodinamika

9. fejezet

Bevezetés

A **Kísérleti Fizika** tantárgyban már megismerkedtünk a Maxwell-egyenletekkel amelyek segítségével megérteni és magyarázni tudjuk a hétköznapjainkban tapasztalható elektromágneses jelenségeket. A technika világában gépeket, berendezéseket tervezünk és gyártunk mindenféle méretben és számtalan céllal. Az ezt megvalósító mérnöki szakma is az ezen egyenletek által megfogalmazott törvények keretei között tevékenykedik.

A Maxwell-egyenletek tehát az elektrodinamika axiómái. Fizikai értelemben ma már bizonyítottnak vehetők. Azaz a megszületésük (1864) óta eltelt kb. 150 év alatt minden klasszikus elektromágneses jelenséget a segítségével meg tudtunk magyarázni, és nem tapasztalatunk egyetlen egy olyan effektust sem, amely cáfolta volna ezen törvények helyességét. Ez valójában azt jelenti, hogy ma már pontosan ismerjük a jelenségek azon körét, amelyekre ezek a törvények érvényesek. Mindaddig, amíg a fotonokat nem vesszük észre, addig a Maxwell-egyenletek teljesen kielégítő alaptörvényeket jelentenek. Ezt nevezzük a klasszikus elektrodinamikának. Ma már tudjuk azonban, hogy a jelenségek mélyén mindig fotonok viselkedése húzódik meg. Ezt pedig már a Kvantum-elektrodinamika tárgyalja. Azaz, ha úgy tetszik, akkor a Maxwell-egyenletek rendszere tulajdonképpen az igen nagyszámú fotonból ($\sim 10^{23}$) álló fizikai rendszerek makroszkopikus viselkedésének a törvényeit jelenti. Ez az, amit a mi (makroszkopikus) műszereink Elektromágneses térként (**EMT**) érzékelnek.

Joggal merülhet fel a kérdés, hogy van-e egyáltalán különbség a Kísérleti Fizikában tanult elektrodinamika és most, az **Elméleti Fizika** keretében tárgyalásra kerülő ismeretek között. A válasz nyilvánvalóan az, hogy csak egyféle Elektrodinamika létezik és így tulajdonképpen mindig ugyanarról beszélünk. Ugyanarról, de nem ugyanúgy! A különbség tulajdonképpen a szemléletben van.

A Kísérleti Fizika során lényegében egy **induktív módszert** alkalmaztunk. Azaz sok egyedi megfigyelés és elvégzett kísérlet után jellegzetes szabályosságokat vettünk észre. Majd ezeket a szabályokat általánosítottuk, azaz kimondtuk, hogy adott körülmények között lényegében mindig ugyanazt fogjuk tapasztalni a konkrét tárgyi megvalósulástól függetlenül. Majd ezeket a felismert törvényeket hierarchiába rendeztük. Azaz rájöttünk

arra, hogy melyek azok, amelyek egymástól függetlenek és amelyekből az összes többi logikailag következik. Így született meg a Maxwell-egyenletek rendszere.

Az Elméleti Fizika más utat követ és más a célja is. **Deduktív módszert** alkalmaz. Azaz a Maxwell-egyenleteket adottnak veszi. Nem foglalkozik azzal, hogy arra miként jöttünk rá. Elfogadja mint feltételezett alaptörvényeket (axiomák) és megnézi, hogy mi jön ki belőlük. Azaz milyen származtatott törvények sokaságát lehet kihámozni ebből a rendszerből. Majd megkeresi azokat a konkrét jelenségeket, amelyek mintegy igazolják a kapott törvényeket.

A dolgok természetéből fakad, hogy az Elméleti Fizikában viszonylag bonyolult matematikai apparátust kell mozgatnunk, hiszen itt az alapfogalmak megértésén már túl vagyunk. A cél az összetett jelenségek minél pontosabb matematikai modellezése.

A Maxwell-egyenleteket differenciális alakban fogjuk használni:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{9.1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{9.2}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \tag{9.3}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}, \tag{9.4}$$

ahol $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ az elektromos térerősség, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ a mágneses indukció, $\rho(\mathbf{r},t)$ a töltéssűrűség, $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ az áramsűrűség.

A (9.3) és (9.4) egyenletek vektoregyenletek, azaz mindhárom komponensre adnak egy egyenletet. Ezáltal a Maxwell-egyenletek összesen 8 db egyenletet jelentenek. Az ismeretlenek száma viszont csak 6: $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ és $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ három-három komponense. Helmholtz tétele azonban kimondja, ha a divergencia és a rotáció $1/r^2$-nél gyorsabban cseng le, akkor a divergenciára és rotációra vonatkozó egyenletek egyértelműen meghatározzák az adott vektormennyiséget, és az egyenletrendszer nem lesz túlhatározott.

Fontos megemlíteni, hogy a Maxwell-egyenletek nem adnak választ minden elektromágneses kérdésre, ugyanis az erőhatásokat nem írja le. Ezt a Lorentz-erő adja meg:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{9.5}$$

Érdemes észrevenni, hogy sztatikus esetben a Maxwell-egyenletek két független részre esnek szét! Azaz ha $\partial_t(\dots) \equiv 0$:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{9.6}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{9.7}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{9.8}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}. \tag{9.9}$$

Mivel ez elektromos térerősségre és a mágneses indukcióra vonatkozó részek nem függnek egymástól, ezért beszélhetünk külön elektrosztatikáról:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{9.10}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{9.11}$$

illetve magnetosztatikáról

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{9.12}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}. \tag{9.13}$$

10. fejezet

Elektrosztatika

Mint azt említettük, az elektrosztatikus teret álló töltések rendszere hozza létre. A rotációmentes elektromos mező forrása tehát az elektromos töltés. Azaz

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{10.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{10.2}$$

Tudjuk, hogy rotációmentes erőtérben (fizikai mezőben) mindig definiálható egy $\phi(\mathbf{r})$ skalár potenciálfüggvény, amely megadja fizikai mezőt. Jelen esetben tehát

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \tag{10.3}$$

Ezt beírva az első egyenletbe kapjuk az ún. Poisson-egyenletet:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{10.4}$$

Tegyük fel, hogy a $\phi(\mathbf{r})$ potenciált egy olyan V térfogatú térrészben keressük, ahol nincsen töltés (ϱ=0) és amelyet a Γ felület határol. Ekkor az ún. Laplace-egyenlethez jutunk:

$$\{\Delta\phi = 0\}_{V(\Gamma)} \tag{10.5}$$

Röviden azonban csak azt írjuk, hogy:

$$\Delta\phi = 0 \tag{10.6}$$

A feladatunk most a **Laplace-egyenlet** megoldása. Tudjuk azt, hogy az elektrosztatikus tér forrása mindig elektromos töltések valamilyen elrendeződése. Most azonban ebből semmit nem látunk, hiszen töltések szükségképpen a vizsgált térrészen kívül helyezkednek el. Természetesen a teret gerjesztő töltsek hatását valahogyan figyelembe kell vennünk. A matematikai vizsgálódások arra az eredményre vezettek, hogy a V térfogat

belsejében a Laplace-egyenlet mindig egyértelműen megoldható. Ehhez azonban szükség van az ún. peremfeltételek ismeretére. Ez azt jelenti, hogy a térfogat határán (a teljes Γ zárt felületen) ismernünk kell vagy a $\phi(\mathbf{r})$ potenciál értékét

$$\phi(\Gamma) \tag{10.7}$$

vagy a gradiens normálisának értékét

$$\nabla\phi(\Gamma)\mathbf{n} \tag{10.8}$$

vagy vegyesen a felület mentén hol ezt, hol azt:

$$\phi(\Gamma_1) \quad \text{és} \quad \nabla\phi(\Gamma_2)\mathbf{n}, \tag{10.9}$$

ahol $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Az iménti állítás könnyen elhihető, hiszen a teret gerjesztő töltések a Γ felületen is meghatározzák az elektrosztatikus teret. Így a peremfeltételek megadása a burkoltan a töltés elrendeződés megadását jelenti.

A Laplace-egyenlet megoldása során érdemes alkalmazkodni a zárt felület alakjához. Ez legtöbbször a koordináta-rendszer alkalmas megválasztásával történik. Például, ha egy kocka alakú felületen adjuk meg a peremfeltételeket, akkor célszerű Descartes-féle koordinátarendszert választanai. Gömbfelület esetén pedig értelemszerűen gömbi koordináták lesznek a jól viselkedő változók. A feladatok száma szinte korlátlan, ezért ezek csak amolyan ésszerű ajánlások, amelyek alkalmazhatóságát mindig a konkrét fizikai probléma dönti el. Amolyan ökölszabályként kezelhető.

Az általános potenciálelméleti problémák matematikai tárgyalása (ma már) a vektoranalízis keretei között szokott megtörténni. Ezért itt mi is csak amolyan szemléltető bemutatót tartunk a Laplace-egyenlet megoldási technikájára. A matematikai finomságokat átengedjük az idevonatkozó matematikai tantárgyaknak. (Pl. parciális differenciálegyenletek.)

A legegyszerűbbel fogjuk kezdeni.

10.1. A Laplace-egyenlet megoldása Descartes-féle koordinátarendszerben

Tekintsük tehát a

$$\Delta\phi = 0. \tag{10.10}$$

Laplace-egyenlet Descartes-koordinátákkal felírt alakját, azaz

$$\Delta_{\mathrm{xyz}}\phi(x, y, z) = 0, \tag{10.11}$$

ahol

$$\Delta_{\text{xyz}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{10.12}$$

Ez egy ún. (három változós) parciális differenciál egyenlet. A megoldása úgy történik, hogy megpróbáljuk visszavezetni egyváltozós (azaz közönséges) differenciálegyenletekre. Ezek megoldása ugyanis viszonylag egyszerű. Ennek az eljárásnak a neve változók szétválasztása, avagy szeparálás.

Ennek során feltesszük, hogy a keresett függvény előállítható három egyváltozós függvény szorzataként, azaz

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \tag{10.13}$$

A feltételezett megoldást beírva a Laplace-egyenletbe megnézzük, hogy létezik-e ilyen típusú (szeparált) megoldás. Ha igen, akkor rátérhetünk ezeknek a megkeresésére. Joggal felmerülhet a kérdés, hogy ha megtaláltuk a szeparált megoldást, akkor vajon a feladatunkat is megoldottuk-e. Azaz nem kell-e keresnünk további, nem szeparálható megoldásokat. A válasz a matematika szemével nézve nem triviális, és bizonyítást igényel. A Fizika szempontjából azonban nyilvánvaló. A Fizikában használt differenciál-egyenletek megoldása mindig egyértelmű. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy a megtalált szeparált megoldás egyben **A megoldás** is. Nem létezik mellette egy nem szeparálható fantom.

MEGJEGYZÉS: A differenciálegyenletek matematikai vizsgálata midig két kérdés feltevésével kezdődik:

1. **Van-e** megoldása az adott típusú differenciálegyenletnek?

2. **Egyértelmű-e** ez a megoldás?

A Matematikában a differenciálegyenletek elméletének a megalkotása során tételek sokaságát dolgozták ki, amelyek segítségével e fenti két kérdésre válaszolni tudunk. Ezek az ún. **egzisztencia** tételek (1. kérdés) és az ún. **unicitási** tételek (2. kérdés). A stratégia nyilvánvaló. Hiszen, ha nem létezik megoldása az egyenletnek, akkor kár keresni azt. Ha pedig a kapott megoldás nem egyértelmű, akkor még továbbiakat is keresni kell, ráadásul nem tudni, hogy hányat. Azaz a feladatra soha nem mondhatjuk, hogy megoldottuk. Ezért aztán nyilvánvaló, hogy mindenki számára a kétigenes differenciálegyenlet a megnyugtató. A Fizikában, a dolog lényegéből fakadóan, a helyzet nem ennyire bonyolult. Ugyanis, ha a szóban forgó differenciálegyenlet a vizsgált jelenségnek egy adekvát matematikai modellje (márpedig az, hiszen azért csináltuk meg), akkor a válasz csakis **kétigenes** lehet. Hiszen biztosan létezik megoldás, mert a jelenséget tapasztaltuk. Valamint csak is egy megoldás lehetséges, hiszen a mi Univerzumunk olyan, hogy egy időben, a térnek egy pontjában egy mérhető fizikai mennyiségnek csak egyféle értéke lehet. Ez egy elemi tapasztalati tény, és ha ez nem így volna, akkor annak a biológiában látványos evolúciós nyomai is lennének. Például az élőlények érzékszervei is alkalmazkodtak volna az Univerzum kettős életéhez. Ennek azonban semmi jele!

Helyettesítsük be a feltételezett szeparált megoldást az egyenletbe. Az $X(x), Y(y), Z(z)$ egyváltozós függvények saját változói szerinti deriváltjait rendre X'', Y'', Z''-vel fogjuk jelölni. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0 \tag{10.14}$$

Osszuk el az egyenletet $\phi = XYZ$-vel! Ekkor adódik a következő

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0. \tag{10.15}$$

Itt valójában három darab különböző és egyben különböző változójú függvény összege látható. Hiszen az első tag csak az x, a második csak az y és a harmadik tag csak a z változótól függ. Ezek a változók (Descartes-helykoordináták) egymástól függetlenek, hiszen a megoldást a tér tetszőleges (x, y, z) pontjában keressük. Márpedig az könnyen belátható, hogy három független változójú függvény összege akkor és csakis akkor lehet állandó, ha mindegyik függvény külön-külön állandó. Ezeket az állandókat **szeparációs állandóknak** nevezzük. Jelen esetben:

$$\text{állandó} + \text{állandó} + \text{állandó} = 0 \tag{10.16}$$

Ez nyilvánvalóan csak akkor állhat fenn, ha az egyik tag előjele más mint a másik kettőé. Azaz például

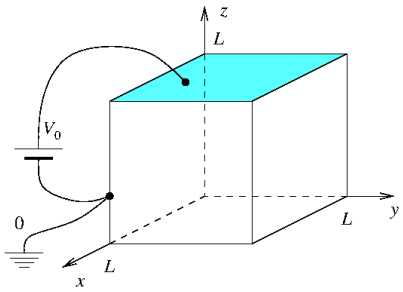
$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -k_x^2, \\ \frac{Y''}{Y} &= -k_y^2, \\ \frac{Z''}{Z} &= +\alpha^2. \end{aligned} \tag{10.17}$$

És ezért

$$k_x^2 + k_y^2 - \alpha^2 = 0. \tag{10.18}$$

Természetesen az $+\alpha^2$ bármelyik függvényhez rendelhető lenne. Az, hogy melyikhez kell azt a peremfeltételek döntik el.

10.1. Feladat *Ennek szemléltetésére célszerű egy konkrét fizika feladatot nézni. Legyen egy L oldalú, kocka alakú fémdoboz. A doboz teteje legyen elszigetelve a doboztól. A fedőn az elektromos potenciál legyen V_0, a dobozon zérus értékű. Ha a z a függőleges irány, akkor éppen a fenti konstans választás lesz a helyes. Ugyanis az x és az y irányokban ugyanazt a peremfeltételt kell teljesíteni, míg a z irányban egy másikat.*



10.1. ábra. A 10.1. feladat peremfeltételeinek szemléltetése

A doboz potenciál:

$$\phi(x,y,z) = \begin{cases} 0 & ha\ x = 0 \\ 0 & ha\ x = L \\ 0 & ha\ y = 0 \\ 0 & ha\ y = L \\ 0 & ha\ z = 0 \\ V_0 & ha\ z = L \end{cases} \tag{10.19}$$

Az általános megoldásokban szereplő szabad paramétereket tehát úgy kell megválasztanunk, hogy ezek a feltételek kielégüljenek. Az általános megoldások tehát a következők:

Tekintsük az első egyenletet, azaz

$$X'' = -k_x^2 X \tag{10.20}$$

Ennek általános megoldása közismert:

$$X = a\sin(k_x x) + b\cos(k_x x) \tag{10.21}$$

Alkalmazzuk az idevonatkozó megadott peremfeltételeket

$$\phi(0,y,z) = \phi(L,y,z) = 0, \tag{10.22}$$

azaz

$$X(0) = X(L) = 0. \tag{10.23}$$

Az első feltételből következik, hogy a koszinusz együtthatója zérus; $b = 0$, a második feltételből pedig, hogy

$$k_x = n\pi, \tag{10.24}$$

ahol $n \in \mathbb{Z}$. Mivel a (10.20) egyenlet lineáris, ezért a megoldások lineárkombinációja is megoldás, azaz az általános megoldás:

$$X(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right), \tag{10.25}$$

ahol elvileg $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots$. *De ha egy adott* $+n$ *érték helyére* $-n$ *értéket írunk, akkor* (-1) *kiemelhető szinusz függvényből és az* a*-t* $-a$ *ra változtatja. De ezt az előjelet beolvaszthatjuk magába az* a *konstansba. Így az* $n < 0$*-k nem jelentenek újabb fizikai megoldásokat, azaz elegendő csak ha*

$$n = 0, 1, 2, 3 \ldots . \tag{10.26}$$

Mármost ahányféle n *van, annyi különböző megoldás is van és ezek lineáris kombinációja szintén megoldása lesz az egyenletnek, azaz*

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) \tag{10.27}$$

A szimmetria miatt a megoldás menete és az eredmény ugyanilyen lesz y *irányban is, azaz*

$$Y(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n y\right) \tag{10.28}$$

A z *irányban a megoldást a* $Z(z)$ *függvény adja, azaz*

$$Z'' = +\alpha^2 Z \tag{10.29}$$

Az általános megoldás itt is jól ismert:

$$Z = a \exp(+\alpha z) + b \exp(-\alpha z) \tag{10.30}$$

Ami átírható még

$$Z = a \ \mathrm{sh}(\alpha z) + b \ \mathrm{ch}(\alpha z) \tag{10.31}$$

(Természetesen az a, b *együtthatók nem ugyanazok!)*

Mivel $Z(0) = 0$*, ezért a* ch *függvények együtthatója csak zérus lehet, azaz* $b = 0$*. Ezért tehát a megoldás:*

$$Z(z) = a\mathrm{sh}(\alpha z) \tag{10.32}$$

Teljesülnie kell még a szeparálás során kapott összefüggésnek (10.18) is:

$$\alpha^2 = k_x^2 + k_y^2 \tag{10.33}$$

Azaz

$$\alpha = \frac{\pi}{L}\sqrt{n^2 + m^2} \tag{10.34}$$

Ez az összefüggés összeköti a három függvényt is. Azaz az általános megoldás peremfeltétel kielégítése után) könnyen felírható.

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{L}\sqrt{n^2 + m^2} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} m y\right) \tag{10.35}$$

Az ismeretlen $\{a_{nm}\}$ együtthatók a negyedik (10.19) peremfeltétel kielégítésével kaphatjuk meg.

$$[\phi(x,y,z)]_{z=L} = \phi(x,y,L) = V_0 \tag{10.36}$$

Azaz

$$\phi(x,y,L) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{L}\sqrt{n^2+m^2}L\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}my\right) = V_0 \tag{10.37}$$

Célszerű bevezetni egy új jelölést:

$$A_{nm} \equiv a_{nm}\mathrm{sh}\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right) \tag{10.38}$$

Ekkor a ϕ a következő alakot veszi fel:

$$\phi(x_L,y_L,L) = \sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{m'=1}^{\infty} A_{n'm'}\sin(\pi n' x_L)\sin(\pi m' y_L) = V_0, \tag{10.39}$$

ahol későbbiek miatt, az indexeket átírtuk vesszősre, valamint áttértünk $x_L \equiv x/L$ és $y_L \equiv y/L$ koordinátákra. Használjuk ki a szinusz-koszinusz függvények ortogonalitását!

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(\pi m x)\cos(\pi n x)dx &= \frac{1}{2}\delta_{mn},\\
\int_0^1 \sin(\pi m x)\sin(\pi n x)dx &= \frac{1}{2}\delta_{mn},\\
\int_0^1 \cos(\pi m x)\sin(\pi n x)dx &= 0
\end{aligned} \tag{10.40}$$

Szorozzuk meg a (10.39) egyenlet mindkét oldalát a $\sin(\pi n x_L)\sin(\pi m y_L)$ függvénnyel és integráljunk x_L és y_L szerint 0 és 1 között:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 \sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{m'=1}^{\infty} A_{n'm'}\sin(\pi n' x_L)\sin(\pi m' y_L)\sin(\pi n x_L)\sin(\pi m y_L)dx_L dy_L =\\
&= \int_0^1\int_0^1 V_0\sin(\pi n x_L)\sin(\pi m y_L)dx_L dy_L
\end{aligned} \tag{10.41}$$

Az integrálás és a szummázás lineáris művelet és egymáson átvihető, majd elvégezzük az x_L szerinti integrálást:

$$\sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{m'=1}^{\infty} A_{n'm'}\int_0^1 \sin(\pi n' x_L)\sin(\pi n x_L)\frac{1}{2}\delta_{m,m'}dx_L = \int_0^1 \frac{V_0 L}{\pi n}[1-\cos(m\pi)]\sin(\pi n x_L)dx_L \tag{10.42}$$

Elvégezve az y_l szerinti integrálást:

$$\sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{m'=1}^{\infty} A_{n'm'}\frac{1}{4}\delta_{n,n'}\delta_{m,m'} = \frac{V_0}{\pi^2 nm}[1-\cos(m\pi)][1-\cos(n\pi)] \tag{10.43}$$

Ebből az egyenletből az A_{nm} együttható kifejezhető:

$$A_{nm} = \frac{4V_0}{\pi^2 nm}[1-\cos(m\pi)][1-\cos(n\pi)]. \tag{10.44}$$

Látszik, hogy minden olyan $A_{nm} = 0$ nulla, amelyikben valamelyik index páros szám. Végül is kapjuk tehát, hogy:

$$A_{nm} = \frac{16V_0}{\pi^2 nm}, \tag{10.45}$$

ahol n, m páratlan egész számok. Vegyük elő a ϕ függvény együtthatójának definícióját (10.38):

$$a_{nm} = \frac{A_{nm}}{\mathrm{sh}\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)}, \tag{10.46}$$

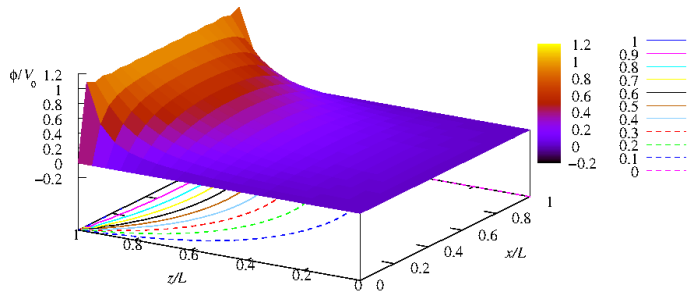
az kapjuk, hogy

$$a_{nm} = \frac{16V_0}{\mathrm{sh}\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)\pi^2 nm}. \tag{10.47}$$

És így a végeredmény:

$$\phi(x,y,z) = V_0\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{16\mathrm{sh}\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}z/L\right)}{\mathrm{sh}\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)\pi^2 nm}\sin\left(\pi n\frac{x}{L}\right)\sin\left(\pi m\frac{x}{L}\right) \tag{10.48}$$

Ezzel a feladatunkat megoldottuk. A keresett potenciálfüggvényt sikerült végtelen sorösszeg formájában megkapnunk, amelyet a 10.2 ábra szemlélteti. A numerikus eredmények ennek az adott pontosságú kiszámítása fogja nyújtani.



10.2. ábra. A (10.48) potenciál szemléltetése az $y = L/2$ pontban. A szaggatott vonalak a szintvonalakat mutatják.

A most tárgyalt peremértékfeladat viszonylag egyszerű volt, hiszen a megoldás során csak jól ismert szögfüggvényeket, illetve hiperbolikus függvényeket használtunk. A következőkben **speciális függvényekkel** dolgozunk majd. Az elnevezés csalóka. Megkérdezhetnénk ugyanis, hogy mennyiben speciálisak ezek a függvények. A válasz egyértelmű: Semmivel sem speciálisabbak, mint az eddigiek!. Legfeljebb más a nevük és más a függvény alakjuk. Azért nevezzük mégis speciálisnak, hogy megkülönböztessük őket az **eddigi megszokott** hatvány-, szög-, exponenciális-, logaritmikus-, hiperbolikus-függvényektől. Mindegyik felsorolt függvénytípus egyfajta igen egyszerű közönséges differenciálegyenlet megoldásaként látta meg a napvilágot.

Vannak azonban bonyolultabb közönséges differenciálegyenletek is, amelyek igen gyakran szerepelnek a fizikai modelljeinkben.

Ezeknek a megoldásait ugyanúgy megnevezzük és ábrázoljuk, mint pl. a $\sin(x)$-t.

A fizikai tanulmányaink során a leggyakrabban a következő nevekkel találkozunk majd : **Legendre**-polinomok, **Laguerre**-polinomok, **Bessel**-függvények, stb . (Kiejtésük: *lözsandr, lager, besszel.*) Ezek mindegyike egy-egy jól definiált függvényt jelent, amelyeknek a rajzolata a matematika könyvekben megtalálható, és adott pontbeli értékeit táblázatból kikereshetjük. Ugyanúgy, mint azt a $\sin(x)$ esetén tennénk.

10.2. A Laplace-egyenlet megoldása gömbi koordinátarendszerben

A feladatunk tehát a $\Delta\phi = 0$ Laplace-egyenlet megoldása gömbi koordináta-rendszerben.

$$\Delta_{r\vartheta\varphi}\phi\left(r,\vartheta,\varphi\right) = 0 \tag{10.49}$$

Ehhez tudnunk kell a Laplace-operátor polár-koordinátás alakját. Fellapozva a matematika könyvek idevonatkozó oldalait, azt találjuk, hogy

$$\Delta_{r,\vartheta,\varphi} = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi} \tag{10.50}$$

ahol

$$\begin{aligned}\Delta_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\\ \Delta_{\vartheta,\varphi} &= \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned} \tag{10.51}$$

Az első pillanatra meglehetősen bonyolultnak tűnő matematikai alakzatokat látunk. A megoldás menete ugyanaz, mint az előbb, a sokkal egyszerűbb Descartes-féle esetben volt. A megoldást szeparált alakban keressük.

Azaz

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)Y(\vartheta,\varphi) \tag{10.52}$$

majd tovább:

$$Y(\vartheta,\varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi). \tag{10.53}$$

Először az $R\,(r)$ sugártól és a $Y\,(\vartheta,\varphi)$szögektől függő részeket fogjuk szétválasztani. Írjuk be ezt a szeparált $\phi = RY$ függvényt az egyenletünkbe! Ekkor kapjuk, hogy:

$$\left(\Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi}\right) RY = 0, \tag{10.54}$$

azaz

$$Y\Delta_r R + \frac{R}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi} Y = 0. \tag{10.55}$$

Osszuk el az egyenletet a $\phi = RY$ -al és szorozzunk r^2-tel Adódik, hogy

$$\frac{r^2}{R}\Delta_r R + \frac{1}{Y}\Delta_{\vartheta,\varphi} Y = 0. \tag{10.56}$$

Láthatóan, az első tag csak az r, a második tag pedig csak a $\{\vartheta,\varphi\}$ szögek függvénye. A Laplace-egyenletnek a tér minden pontjában, azaz minden $\{r,\vartheta,\varphi\}$ értéknél teljesülnie kell. Mivel a változók függetlenek egymástól, azért ez csak úgy lehetséges, ha mind a két tag külön-külön állandó, amelyek összege nulla pl: $+A - A = 0$. Ekkor kapjuk, hogy

$$r^2\Delta_r R - AR = 0, \tag{10.57}$$

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} Y + AY = 0. \tag{10.58}$$

A (10.57) egyenlet egyszerű differenciálegyenletté alakítható, majd később A ismeretében foglalkozunk vele. Először (10.58) egyenletet szeparáljuk tovább a két változója szerint:

$$Y(\vartheta,\varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) \tag{10.59}$$

Ekkor (10.58) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$\Phi\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + A\Theta\Phi = 0 \tag{10.60}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $\sin^2\vartheta/(\Theta\Phi)$-vel:

$$\frac{1}{\Theta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}\right) + A\sin^2\vartheta + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{10.61}$$

A helyzet most is ugyanaz, mint eddig volt. Azaz két független változójú függvény összege látható az egyenlet bal oldalán. Jelöljük az új szeparációs állandót m^2-el. Ennek a fura

jelölésnek az oka később nyilvánvaló lesz. Ezzel megkaptuk a két szeparált egyenletet, nevezetesen:

$$\frac{1}{\Theta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}\right)+A\sin^2\vartheta=m^2, \tag{10.62}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=-m^2. \tag{10.63}$$

Ez utóbbi (10.63) az egyszerűbb, hiszen

$$\Phi''=-m^2\Phi \tag{10.64}$$

Ennek általános megoldása már jól ismert

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases}c_0\varphi+d_0, & \text{ha } m=0\\ c_m\sin(m\varphi)+d_m\cos(m\varphi), & \text{ha } m\neq 0\end{cases} \tag{10.65}$$

mivel tudjuk, hogy φ és $\varphi+2\pi$ ugyanazt a szöget jelenti, ezért szükséges, hogy:

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi). \tag{10.66}$$

Ebből az következik, hogy m csak egész szám lehet ($m\in\mathbb{Z}$), és $c_0=0$.

Gyakran hasznos a szinusz és koszinusz függvények helyett komplex exponenciálisat használni. Emellett

$$\Phi(\varphi)=c_m\sin(m\varphi)+d_m\cos(m\varphi)=b_m\exp(im\varphi), \tag{10.67}$$

ahol a b_m együttható egy komplex szám. A b_m és $\{c_m,d_m\}$ együttható közötti összefüggés megkeresését az olvasóra bízzuk.

A (10.62) egyenletet az $x=\cos\vartheta$ változó bevezetésével a következő alakra lehet hozni:

$$\left(1-x^2\right)\Theta''-2x\Theta'+\left(A-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0 \tag{10.68}$$

Ez az ún. Legendre-féle differenciálegyenlet (helyesebben annak ún kapcsolt vagy asszociált változata.

Ennek megoldása polinom-módszerrel történik. Megmutatható, hogy akkor van véges megoldás az értelmezési tartomány minden x pontjában, ha $\Theta(x)$ egy polinom. Azaz végtelen sorösszeg esetén nem!

A megoldás akkor lehetséges, ha az A állandó felírható a következő módon:

$$\begin{aligned}A&=l(l+1)\\ l&\in\mathbb{N}\\ |m|&\leq l.\end{aligned} \tag{10.69}$$

Másképp felírva:

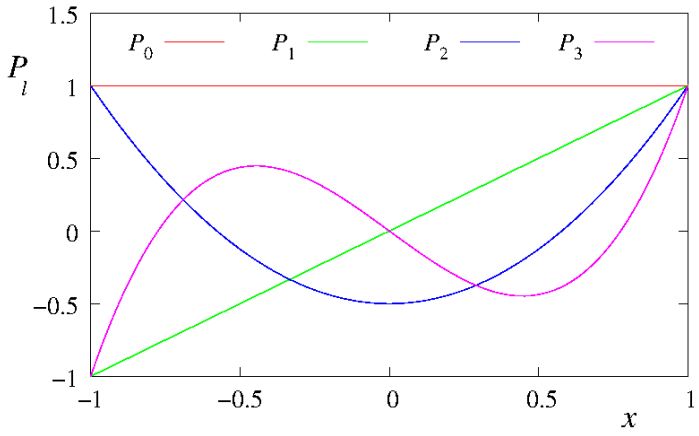
$$\begin{aligned} A &= l(l+1) \\ l &= 0, 1, 2, \dots \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm l \end{aligned} \tag{10.70}$$

Nagyon gyakran az $\{m, l\}$ között fennálló $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm l$ szoros kapcsolata miatt az $m \equiv m_l$ jelölést szoktuk használni. Tipográfiai okokból most ettől eltekintünk. A (10.62) egyenlet megoldásai

$$\Theta(\vartheta) = \begin{cases} P_l(\cos\vartheta) \text{ (Legendre-polinom)}, & \text{ha } m = 0 \\ P_l^{|m|}(\cos\vartheta) \text{ (asszociált Legendre-polinom)}, & \text{ha } m \neq 0 \end{cases} \tag{10.71}$$

Az asszociált Legendre-polinom definíciója:

$$P_l^{|m|}(\cos\vartheta) = (\sin\vartheta)^m \frac{\partial^{|m|}}{\partial(\cos\vartheta)^{|m|}} \left(P_l(\cos\vartheta)\right) \tag{10.72}$$



10.3. ábra. Az első négy Legendre-polinom.

A Legendre-polinomokat táblázatokból ki lehet keresni, mi itt csak az első négyet soroljuk fel és a Fig. 10.3 ábrán ábrázoljuk:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned} \tag{10.73}$$

Írjuk fel a $\phi(\mathbf{r})$ potenciálfüggvénynek a szögektől függő részét!

$$Y_l^m(\vartheta,\varphi) = a_{ml}\exp(im\varphi)P_l^{|m|}(\cos\vartheta) \tag{10.74}$$

A $\{\vartheta,\varphi\}$ polár szögpárok a gömbfelület egy pontját jelölik ki. Így aztán az $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ függvény a gömbfelület minden pontjához egy számot rendel. Ezért a neve gömbfüggvény. Megmutatható, hogy ezek a gömbfüggvények ún. ortogonális, teljes rendszert alkotnak. Ennek egyik feltételeként fennáll a következő (súlyozott) ortogonalitási összefüggés:

$$\int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_l^m(\vartheta,\varphi)Y_{l'}^{m'}(\vartheta,\varphi)^* = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{10.75}$$

Megjegyezzük, hogy az $l = l'$, $m = m'$ eset rögzíti az a_{ml} együtthatókat a (10.74) egyenletben. Pl. $a_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$. Az ortogonális teljes függvényrendszer azt jelenti, hogy egy gömbfelületen értelmezett, tetszőleges $F(\vartheta,\varphi)$ függvény (pl. a kontinensek határai) ezen gömbfüggvények rendszerében sorba fejthető. Azaz:

$$F(\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm}Y_l^m(\vartheta,\varphi). \tag{10.76}$$

A Laplace-egyenlet általános megoldása ezek után könnyen megkonstruálható. Ehhez azonban még meg kell oldanunk sugártól függő részre vonatkozó 10.57 differenciálegyenletet.

$$r^2\Delta_r R - AR = 0 \tag{10.77}$$

A $\Theta(\vartheta)$ megoldása során már megkaptuk az A integrálási állandó lehetséges értékeit: $A = l(l+1)$. Ezért írhatjuk, hogy

$$r^2\Delta_r R_l - l(l+1)R_l = 0, \tag{10.78}$$

ahol $l = 0, 1, 2, \ldots$ Mivel pedig tudjuk, hogy

$$\Delta_r R \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR) \tag{10.79}$$

ezért adódik, hogy

$$r\frac{d^2}{dr^2}(rR_l) = l(l+1)R_l \tag{10.80}$$

avagy

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}(rR_l) = l(l+1)(rR_l) \tag{10.81}$$

Vezessük be a

$$Q_l \equiv rR_l \tag{10.82}$$

jelölést! Ezzel a megoldandó egyenletünk a következő alakot ölti

$$r^2 Q_l'' = l\,(l+1)\,Q_l \tag{10.83}$$

Ez már egészen barátságosnak tűnik. Az egyenletből látható, hogy egy olyan függvényt keresünk, amelyet ha kétszer deriválunk akkor az megfelel annak, mintha r^2-el osztottuk volna. A hatványfüggvény pontosan ilyen! Azaz legyen

$$Q_l\,(r) = r^k \tag{10.84}$$

Beírva az egyenletbe adódik, hogy

$$r^2\left[k\,(k-1)\,r^{k-2}\right] = l\,(l+1)\,r^k \tag{10.85}$$

Azaz

$$k\,(k-1)\,r^k = l\,(l+1)\,r^k \tag{10.86}$$

És ezért

$$k(k-1) - l\,(l+1) = 0 \tag{10.87}$$

Aminek megoldása:

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+4l+4l^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(1+2l)^2}}{2} = \frac{1 \pm (1+2l)}{2} = \begin{cases} l+1 \\ -l \end{cases} \tag{10.88}$$

Azaz mivel

$$R_l\,(r) = \frac{1}{r} Q_l\,(r) \tag{10.89}$$

Így

$$R_l\,(r) = \frac{1}{r} Q_l\,(r) = \begin{cases} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{cases} \tag{10.90}$$

Az egyenlet általános megoldása ezen elemi megoldások lineáris kombinációja lesz, hiszen a Laplace-egyenlet lineáris differenciálegyenlet. Tehát

$$R(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right). \tag{10.91}$$

Ezt felhasználva fel tudjuk írni a teljes megoldást:

$$\phi\,(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos\vartheta). \tag{10.92}$$

Természetesen a $\{a_{lm}, b_{lm}\}$ ismeretlen együtthatókat a peremfeltételek teljesítésével határozzuk meg.

A peremfeltétel azt jelenti, hogy egy zárt Γ felületen előírjuk a potenciál viselkedését, azaz

$$\begin{aligned} \phi\left(\Gamma_1\right) &= f(\Gamma_1), \\ \mathbf{n}\nabla\phi\left(\Gamma_2\right) &= g(\Gamma_2), \\ \Gamma &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{aligned} \tag{10.93}$$

10.2.1. Tengelyszimmetrikus eset

Nagyban leegyszerűsödik a matematikai komplikáció, ha hengerszimmetrikus problémákkal foglalkozunk. Ez ugyan leszűkíti a vizsgálható jelenségek körét, de a viszonylag egyszerű megoldhatóság didaktikai előnye kárpótol minket.

Mint azt láttuk, hengerszimmetrikus esetben a $\phi\left(r, \vartheta\right)$ nem függ a φ szögtől és így az $m = 0$ (minden l esetén). Az általános megoldás tehát az (10.92) alapján következő alakba írható:

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l\left(\cos\vartheta\right), \tag{10.94}$$

ahol $P_l(\cos\vartheta)$ a Legendre-polinomok (10.73).

A következőkben megvizsgáljuk azt, hogy az eddigi tanulmányainkban megismert (Kísérleti Fizika) hengerszimmetrikus elektrosztatikus terek valóban olyan szerkezetűeke, mint azt az (10.94) általános felírás szolgáltat!

10.1. Feladat (Ponttöltés tere) *Mint az ismeretes egy Q nagyságú ponttöltés elektrosztatikus terét a*

$$\phi\left(\mathbf{r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{10.95}$$

potenciállal adhatjuk meg (ha a ponttöltés az origóban van és $r \neq 0$). Nagyon távol a töltéstől

$$\lim_{r\to\infty} \phi\left(r\right) = 0 \tag{10.96}$$

Ezért az r pozitív hatványai el kell, hogy tűnjenek, tehát a potenciál általános alakja

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l\left(\cos\vartheta\right) \tag{10.97}$$

A ponttöltés potenciálfüggvényét akkor kapjuk meg, ha

$$b_l = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} & ha\ l = 0 \\ 0 & ha\ l \neq 0 \end{cases} \tag{10.98}$$

Azaz a ponttöltés potenciálfüggvénye valóban megoldása a $\Delta\phi = 0$ ($r \neq 0$) Laplace-egyenletnek.

10.2. Feladat (Homogén elektrosztatikus mező) *A homogén tér skalár potenciálja*

$$\phi = -\mathbf{E}\mathbf{r} \tag{10.99}$$

hiszen

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = +\nabla\left(\mathbf{E}\mathbf{r}\right) = \mathbf{E} \tag{10.100}$$

Legyen az elektromos térerősség z irányú, azaz $\mathbf{E} = (0, 0, E)$. *Ekkor*

$$\phi = -Ez \tag{10.101}$$

Gömbi polárkoordinátákkal ez a következőt jelenti

$$\phi\left(\mathbf{r}\right) = -Er\cos\vartheta \tag{10.102}$$

Tekintsük az általános potenciálfüggvényt (homogén a tér, tehát hengerszimmetria van)

$$\phi\left(\mathbf{r}\right) = \sum_l \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\vartheta) \tag{10.103}$$

Nyilvánvaló, hogy ebből megkaphatjuk a homogén tér potenciálját, ha

$$\begin{aligned} a_l &= \begin{cases} -E & ha\ l = 1 \\ 0 & ha\ l \neq 1 \end{cases} \\ b_l &= 0 \end{aligned} \tag{10.104}$$

Tehát a homogén tér szintén kielégíti a Laplace-egyenletet.

10.3. Elektromos dipólus tere

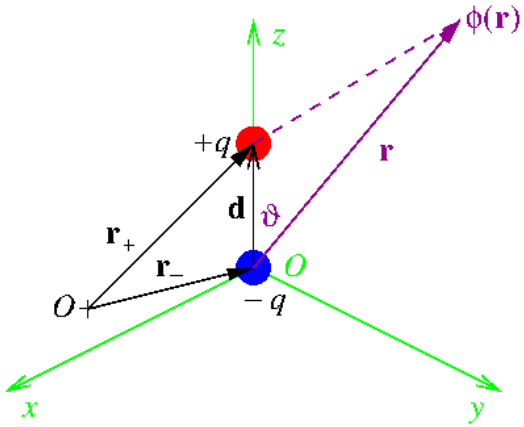
Egy q_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ ponttöltésekből álló rendszer *dipólmomentumát* az alábbi módon definiáljuk:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i q_i, \tag{10.105}$$

ahol $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots, \mathbf{r}_N\}$ a ponttöltések helyvektorai.

A legegyszerűbb ilyen elrendezés az elektromos dipólus. Ez $+q$ és $-q$ ponttöltésekből áll, amelyek helyvektorait (rendre) $\mathbf{r}_+$-szal és az $\mathbf{r}_-$-szal jelöljük. Ekkor elektromos dipólmomentumra azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}{=}+q\mathbf{r}_+ - q\mathbf{r}_- = q\left(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-\right) \equiv q\mathbf{d} \tag{10.106}$$



10.4. ábra. A dipólus szemléltetése. A koordinátarendszert origóját a $-q$ töltéshez rögzítjük, a z tengely pedig a $+q$ töltés felé mutat.

ahol

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- \tag{10.107}$$

Tehát a $\mathbf{d}$ a $+q$ töltésnek $-q$ hoz viszonyított helyét adja meg.

Helyezzük a $-q$ töltést az origóba. Ekkor az elektromos potenciál két ponttöltés potenciáljának az összegeként könnyen felírható:

$$\phi\left(\mathbf{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} - \frac{1}{r}\right) \tag{10.108}$$

Legyen a $+q$ töltés a z tengelyen, azaz $\mathbf{d} = (0,0,d)$. Ha $d \ll r$ (azaz elegendően távol vagyunk a dipólustól) akkor adódik, hogy

$$|\mathbf{r}-\mathbf{d}| = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\vartheta} \approx r\sqrt{1 - 2\frac{d}{r}\cos\vartheta} \approx r\left(1 - \frac{d}{r}\cos\vartheta\right) \tag{10.109}$$

Ezt beírva a (10.108) egyenletbe kapjuk, hogy

$$\phi\left(\mathbf{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r\left(1-\frac{d}{r}\cos\vartheta\right)} - \frac{1}{r}\right) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{r}\cos\vartheta - 1\right) = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta}{r^2} \tag{10.110}$$

De tudjuk, hogy $p = qd$, illetve a $\cos\vartheta$ kifejezés $\mathbf{r}$ és $\mathbf{d}$ skalárszorzatában is előjön. Tehát a (10.110) egyenletet más alakba is írhatjuk:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{pr}}{r^3} \tag{10.111}$$

Illetve:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r}. \tag{10.112}$$

Ezek után határozzuk meg az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ térerősséget a tér minden pontjában, azaz

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \tag{10.113}$$

Komponensenként kiírva:

$$\begin{aligned} E_i = -\partial_i\Phi = \sum_j -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\partial_i\left(\frac{p_j x_j}{r^3}\right) = \\ = \sum_j -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(p_j\partial_i x_j\frac{1}{r^3} + p_j x_j\partial_i\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned} \tag{10.114}$$

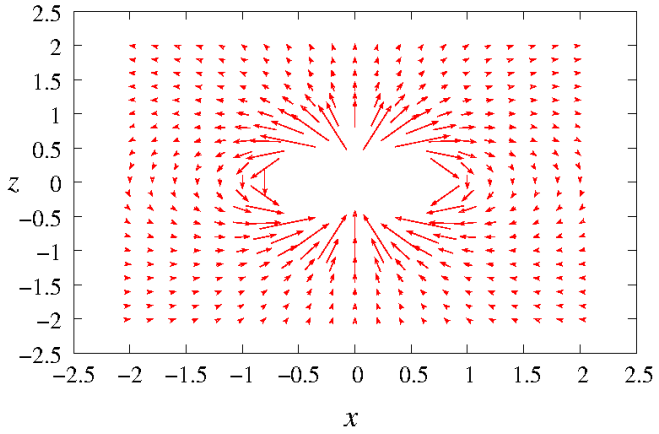
Itt kihasználtuk azt, hogy a $\mathbf{p}$ állandó. Elvégezve a kijelölt deriválásokat kapjuk, hogy:

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j\left(\frac{p_j\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3p_j x_j x_i}{r^5}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_i}{r^3} - \frac{3x_i\sum_j p_j x_j}{r^5}\right) \tag{10.115}$$

Visszaírva a vektoriális alakot:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}\right). \tag{10.116}$$

A kapott eredményt a 10.5 ábrán ábrázoljuk.



10.5. ábra. A dipólus által létrehozott elektromos tér xz metszete. A vektorok nagysága a térerősséggel arányos.

Ne felejtsük el, hogy ez csak akkor igaz, ha a dipólustól elegendően távol vagyunk ($d \ll r$). Mind e mellett azonban a teljes térre is igaz lesz, ha a ponttöltés mintájára bevezetjük a pontszerű dipólus fogalmát.

$$\lim_{\substack{d\to 0\\ Q\to\infty}} Q\mathbf{d} = \mathbf{p}. \tag{10.117}$$

Ez a fogalom igen hasznos lesz. Az anyag ugyanis atomokból áll, amelyek rendelkez(het)nek elektromos dipólussal. Hiszen van, hogy az elektron(felhő) töltésközéppontja nem esik egybe a pozitív töltésű atommagéval (molekulák esetén : magokéval). Mivel az atomok mérete sokkalta kisebb minden makroszkopikus méretnél, ezért az atomok (molekulák) pontszerű elektromos dipólussal jellemezhetők.

10.4. Green-függvények az elektrosztatikában

Tudjuk jól, hogy az anyag atomos szerkezetű. Így az elektromos töltések ($\pm q$) hordozói is atomok, molekulák lehetnek. Azt is tudjuk már, hogy az elektromos töltés kvantált mennyiség, azaz minden $\pm q$ töltés egy elemi e töltésegység egész számú többszöröse, ahol

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \tag{10.118}$$

Mivel a Maxwell-egyenletek lineárisak, ezért érvényes a szuperpozíció elve. Ez azt jelenti, hogyha pl. ismerem két ponttöltés elektromos terét külön-külön, akkor meg tudom mondani azt, hogy együttesen milyen elektromos mezőt hoznak létre. Azaz formálisan, ha egy q_i töltés által létrehozott elektromos térerősség $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, q_i)$, akkor a $\{q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_N\}$ töltésrendszer által létrehozott elektromos térerősség:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r}, \{q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_N\}\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, q_i) \tag{10.119}$$

Ez azt jelenti, hogy az alapfeladat egy ponttöltés terének a meghatározása. Természetesen **most** ezt is a Maxwell-egyenletek segítségével kell megtennünk. Azaz nem a ponttöltések között fellépő Coulomb erő matematikai kifejezésének a felhasználásával. Mivel a differenciális alapegyenletekben $\rho\left(\mathbf{r}\right)$ töltéssűrűség szerepel ezért a ponttöltést is ebben a formában kell használni. Ezt a térbeli Dirac-delta disztribúció segítségével tudjuk megtenni. A lineáris rendszerek analízise (6.1 fejezet) során már megismerkedtünk ezzel a fogalommal. Számunkra elegendő precizitással megbeszéltük a vele való korrekt matematikai műveletek lehetőségét is. Most ezeket ez ismereteinket fogjuk használni.

Helyezzünk el a tér $\mathbf{r}_0$ helyvektorú pontjába egy Q ponttöltést. Ekkor térbeli töltéssűrűséget a következő, immáron triviális, módon írhatjuk fel

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = Q\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right) \tag{10.120}$$

Hiszen a Dirac-deltánál tanultak szellemében (1.3 fejezet):

$$\int \rho\left(\mathbf{r}\right) d^3r = \int Q\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right) d^3r = Q \tag{10.121}$$

A ponttöltés elektromos térerősségét meghatározó Poisson-egyenlet ekkor tehát

$$\Delta_{\mathbf{r}}\phi\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_0\right) = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \tag{10.122}$$

A számolás egyszerűsítése végett rögzítsük az origót a ponttöltésünkhöz. Ez nem csorbít semmit az általános vizsgálódásunkon, hiszen a fizikai eredmények nem függhetnek a koordinátarendszer megválasztásától. Amúgy pedig az eredmény ismeretében, utólag még mindig visszatolhatjuk az origót az eredeti helyére. Ekkor a Poisson-egyenlet a következő lesz:

$$\Delta\phi\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}). \tag{10.123}$$

A (időfüggő) lineáris rendszereknél (6.1 fejezet) már foglalkoztunk azzal, hogy ha ismerjük a rendszernek a válaszát egy ügyesen megválasztott gerjesztésre, akkor ebből tudni fogjuk azt, hogy miként reagál a rendszer egy tetszőleges hatásra (bemenetre). Az egyik ilyen vizsgáló gerjesztés a Dirac-delta volt, a másik a szinuszos időfüggésű. Ez utóbbinak a megfelelő matematikai általánosításával jutottunk el a Fourier-transzformációhoz. Ennek használata igen hatékony eszköznek bizonyult a fizikailag értelmes (nem végtelen nagy energiatartalommal rendelkező) gerjesztések esetén. Azt is láttuk, hogy ezek a vizsgáló gerjesztések egymásba átszámíthatók, ezért aztán a válaszok között is igen jól definiált kapcsolat van.

A Dirac-delta gerjesztésre adott választ, azaz a kialakult elektromos térerősséget megadó potenciálfüggvényt most is Green-függvénynek fogjuk nevezni, és megtartjuk a $G\left(\mathbf{r}\right)$ jelölést is.

Tehát

$$\Delta G\left(\mathbf{r}\right) = -\delta(\mathbf{r}). \tag{10.124}$$

A $G\left(\mathbf{r}\right)$ ismeretében természetesen a ponttöltés $\phi_Q\left(\mathbf{r}\right)$ potenciálja közvetlenül adódik:

$$\phi_Q\left(\mathbf{r}\right) \equiv \frac{Q}{\varepsilon_0}G\left(\mathbf{r}\right). \tag{10.125}$$

Mindebből azonban több is következik. Ugyanis, ha (10.124) igaz, akkor igaz lesz a következő eltolt Poisson-egyenlet is

$$\Delta_r G\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{10.126}$$

ahol a változó továbbra is az $\mathbf{r}$ vektor és az $\mathbf{r}'$ az egyenlet szempontjából csak egy eltolási paraméter. Szorozzuk be az egyenletet $\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0}$ el, ami érzéketlen a Δ_r operátorra, hiszen

nem tartalmazza az $\mathbf{r}$ változót. Kapjuk, hogy

$$\Delta_r \left[\frac{1}{\varepsilon_0} G\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) \rho\left(\mathbf{r}'\right) \right] = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \delta\left(\mathbf{r}'\right). \tag{10.127}$$

Mind a két oldal elvégezhető egy térfogati integrálás az $\mathbf{r}'$ paraméter szerint az egész világra. Ekkor adódik, hogy:

$$\Delta_r \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \int G\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) \rho\left(\mathbf{r}'\right) d^3 r' \right] = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \rho\left(\mathbf{r}'\right) d^3 r' \tag{10.128}$$

A Dirac-delta definíciója értelmében az előző egyenlet bal oldalán megjelenik a $\rho\left(\mathbf{r}\right)$ töltéssűrűség, azaz

$$\Delta_r \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \int G\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) \rho\left(\mathbf{r}'\right) d^3 r' \right] = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho\left(\mathbf{r}\right) \tag{10.129}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a

$$\Delta \phi\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho\left(\mathbf{r}\right) \tag{10.130}$$

Poisson-egyenlet értelmében a megoldást a következő konvolúciós összefüggéssel tudjuk kiszámítani.

$$\phi\left(r\right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) \rho\left(\mathbf{r}'\right) d^3 r' \tag{10.131}$$

Tehát (hasonlóan az időtartományban tapasztaltakhoz) a $G\left(\mathbf{r}\right)$ Green-függvény ismeretében tetszőleges $\rho\left(\mathbf{r}\right)$ töltéselrendeződéshez tartozó $\phi\left(\mathbf{r}\right)$ potenciálfüggvény egyszerűen (bár legtöbbször nem kis matematikai munkával) kiszámítható.

A feladatuk tehát $G\left(\mathbf{r}\right)$ Green-függvény meghatározása. Ezt Fourier-transzformáció segítségével fogjuk végrehajtani.

Először ismételjük át az időbeli Fourier-transzformációt (1.42) és (1.43):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{10.132}$$

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \tag{10.133}$$

A térben az idő megfelelője a hely, a körfrekvenciáé, pedig a hullámszám:

$$\begin{aligned} t &\to \mathbf{r} \\ \omega &\to \mathbf{k} \end{aligned} \tag{10.134}$$

A térbeli Fourier-transzformáció tehát a következőképpen néz ki:

$$G(\mathbf{r}) = \int \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} d^3k,$$
$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}} d^3r. \tag{10.135}$$

Itt figyelembe vettük, hogy igazából három Fourier-transzformációt hajtunk végre a három független térbeli irány szerint. Szükségünk lesz még a Dirac-delta Fourier-transzformáltjára (1.47):

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{ik_x x} dk_x,$$
$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{kr}} d^3k. \tag{10.136}$$

Illetve az inverz transzformált:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{kr}} d^3r = \frac{1}{(2\pi)^3} e^0 \tag{10.137}$$

Most már feltudjuk írni a (10.123) Poisson-egyenletet Fourier-transzformált alakban kihasználva (10.135) és (10.136) egyenleteket:

$$\Delta \left[\int \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} d^3k \right] = \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{kr}} d^3k$$
$$\int \Delta \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} d^3k = \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{kr}} d^3k$$
$$\int k^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} d^3k = \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{kr}} d^3k$$
$$k^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \tag{10.138}$$

Visszatranszformálva valós térbe:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{kr}} d^3k \tag{10.139}$$

Térjünk át gömbi koordinátarendszerre, ahol $d^3k = dk(kd\vartheta)(k\sin\vartheta)d\varphi$. Tehát

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{k^2}e^{ikr\cos\vartheta}\sin\vartheta\ k^2dk\ d\vartheta\ d\varphi = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{k^2}e^{ikr\cos\vartheta}\sin\vartheta\ k^2dk\ d\vartheta = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{ikr}\right)dk = \\
&= \frac{2}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = \\
G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{10.140}$$

Tehát a Laplace-operátor Green-függvénye:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} \tag{10.141}$$

Alkalmazva a ponttöltésre

$$\Delta\phi = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}), \tag{10.142}$$

megkapjuk a ponttöltés potenciálját

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}. \tag{10.143}$$

Tetszőleges $\rho(\mathbf{r})$ töltéseloszlás esetén:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{10.144}$$

10.5. Az elektrosztatika egyértelműsége

A Laplace-egyenlet megoldásakor már beszéltünk arról, hogy miért várjuk azt, hogy az elektrodinamika egyenletei egyértelmű megoldással rendelkeztek. Az érvelésünk bár spekulatív volt, mégis teljes egészében összhangban állt a természettudományos szemléletünkkel. Mindenesetre az elektrodinamika koherenciáját erősítené, ha az állításunkat egzakt matematikai eszközökkel is bizonyítani tudnánk.

A következőkben ezt fogjuk megtenni. Igaz ugyan, hogy most csak az elektrosztatika esetében adunk egy bizonyítást, de hasonló gondolatmenettel (csak több matematikai fáradtsággal) az egész elektrodinamikára is megtehető.

10.1. Tétel *Ha a Laplace-egyenletnek megtaláltuk két $\phi_1(\mathbf{r})$ és $\phi_2(\mathbf{r})$ megoldását amelyek ugyanazoknak a peremfeltételeknek tesznek eleget (vagy ugyanaz a töltéselrendezés hozza létre az elektromos mezőt) , akkor ez a két megoldás egymástól csak egy állandóban térhet el.*

Bizonyítás. Legyen a Laplace-egyenletnek két különböző megoldása ϕ_1 és ϕ_2:

$$\Delta\phi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{és} \quad \Delta\phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \; ! \tag{10.145}$$

A peremfeltételek azonosak, tehát

$$\begin{aligned} \phi_1(\Gamma) &= \phi_2(\Gamma) \\ (\text{grad}\ \phi_1)_n(\Gamma) &= (\text{grad}\ \phi_2)_n(\Gamma), \end{aligned} \tag{10.146}$$

ahol a felső a Dirichlet-, az alsó a Neumann-határfeltétel. Ha kivonjuk egymásból a két Poisson-egyenletet, akkor a jobb oldal kiesik, hiszen ugyanarról a $\rho(\mathbf{r})$ töltéseloszlásról van szó.

$$\Delta(\phi_2 - \phi_1) = 0 \tag{10.147}$$

Vezessünk be egy új jelölést:

$$\phi \equiv \phi_2 - \phi_1 \tag{10.148}$$

Ekkor írható, hogy

$$\Delta\phi = 0. \tag{10.149}$$

A peremfeltétel pedig így alakul:

$$\begin{aligned} \phi(\Gamma) &= \phi_1(\Gamma) - \phi_2(\Gamma) = 0 \\ (\text{grad}\phi)_n(\Gamma) &= (\text{grad}\phi_1)_n(\Gamma) - (\text{grad}\phi_2)_n(\Gamma) = 0. \end{aligned} \tag{10.150}$$

Tudjuk, hogy

$$\Delta\phi = 0. \tag{10.151}$$

Ekkor igaz az is, hogy

$$\phi\Delta\phi = 0. \tag{10.152}$$

Használjuk ki az alábbi azonosságot:

$$\nabla(\phi\nabla\phi) = (\nabla\phi)(\nabla\phi) + \phi\underbrace{\nabla^2\phi}_{=\Delta\phi} \tag{10.153}$$

Azaz

$$0 = \int_V \phi\Delta\phi \; dV = \int_V \nabla(\phi\nabla\phi)dV - \int_V (\text{grad}\phi)^2 dV \tag{10.154}$$

A jobb oldalon az első integrált átírjuk a Gauss-Osztrogradszkij-tétel [8] szerint:

$$0 = \underbrace{\oint_{\Gamma} \phi \mathrm{grad}\phi d\mathbf{A}}_{=0} - \int_V (\mathrm{grad}\phi)^2 dV \tag{10.155}$$

A felületi integrál a (10.150) peremfeltételek miatt zérus, ezért:

$$0 = \int_V (\mathrm{grad}\phi)^2 dV, \tag{10.156}$$

mivel $(\mathrm{grad}\phi)^2 \geq 0$, exért

$$\mathrm{grad}\phi = 0. \tag{10.157}$$

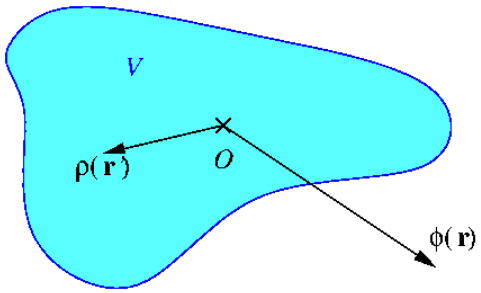
Tehát $\phi =$ állandó.

- Ha Dirichlet határfeltételt használunk, akkor $\phi \equiv 0$, azaz $\phi_1 = \phi_2$
- Ha Neumann határfeltételt, akkor $\phi_2 = \phi_1 + \mathrm{const.}$

Tehát a két potenciál csak egy lényegtelen konstansban tér el egymástól. □

10.6. Multipólus sorfejtés

10.6.1. Potenciál



10.6. ábra. A $\rho(\mathbf{r}')$ töltéseloszlás által létrehozott elektromos potenciált keressük az $\mathbf{r}$ pontban.

Legyen adott egy $\rho(\mathbf{r}')$ töltéseloszlás (lásd 10.6 ábra)! Jelölje V azt a térfogatot, ahol $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ és legyen az origó a V térfogaton belül. Határozzuk meg a $\phi(\mathbf{r})$ potenciált abban az esetben, amikor $r' \ll r$, azaz a töltéseloszlástól távol!

Ekkor a potenciál a következő alakba írható:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{10.158}$$

Fejtsük sorba a $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ kifejezést $\mathbf{r}'=0$ környékén!

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_i \left(\partial'_i \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)_{\mathbf{r}'=0} x'_i + \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\partial'_i\partial'_j \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)_{\mathbf{r}'=0} x'_i x'_j + \cdots \tag{10.159}$$

Vezessük be a $\Delta x_i = x_i - x'_i$ jelölést! A deriváltak a következőképpen alakulnak:

$$\left(\partial'_i \frac{-1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)_{\mathbf{r}'=0} = \left(\partial'_i \frac{-1}{\sqrt{\sum_j \Delta x_j^2}}\right)_{\mathbf{r}'=0} = \left(\frac{\Delta x_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)_{\mathbf{r}'=0} = \frac{x_i}{r^3} \tag{10.160}$$

Illetve

$$\begin{aligned}\left(\partial'_i\partial'_j \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)_{\mathbf{r}'=0} &= \left(\partial'_j \frac{\Delta x_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)_{\mathbf{r}'=0} = \left(\frac{-\delta_{ij}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{3\Delta x_i \Delta x_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}\right)_{\mathbf{r}'=0} = \\ &= \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}\end{aligned} \tag{10.161}$$

Azaz

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \sum_i \frac{x_i}{r^3}x'_i + \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\frac{3x_i x_j}{r^5}x'_i x'_j - \frac{r^2\delta_{ij}}{r^5}x'_i x'_j\right) + \cdots \tag{10.162}$$

Azaz a potenciál nagy távolságokra a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg\{ &\int_V \rho(\mathbf{r}')dV'\frac{1}{r} + \sum_i\left[\int_V \rho(\mathbf{r}')x'_i dV'\right]\frac{x_i}{r^3} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{ij}\left[\int_V \rho(\mathbf{r}')\left(3x'_i x'_j - \delta_{ij}r'^3\right)dV'\right]\frac{x_i x_j}{r^5} + \cdots\Bigg\}\end{aligned} \tag{10.163}$$

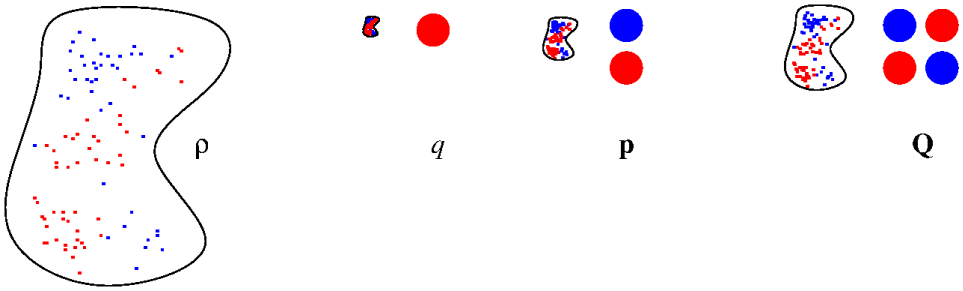
Bevezetjük a következő mennyiségeket:

$$\begin{aligned} q &= \int_V \rho(\mathbf{r}')dV' \\ p_i &= \int_V \rho(\mathbf{r}')x'_i dV' \\ Q_{ij} &= \int_V \rho(\mathbf{r}')\left(3x'_i x'_j - \delta_{ij}r'^3\right)dV' \end{aligned} \tag{10.164}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti definíció szerint $Q_{ij} = Q_{ji}$, ezért $\mathbf{Q}$ szimmetrikus mátrix. A fenti együtthatókkal a (10.163) kifejezés egyszerűbben is átírható:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{pr}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{rQr}}{r^5} + \mathcal{O}(r^{-4})\right], \tag{10.165}$$

ahol q a töltéseloszlás *össztöltése*, $\mathbf{p}$ a *dipólmomentuma*, $\mathbf{Q}$ a *quadrupol* momentuma (10.7 ábra).



10.7. ábra. A multipol sorfejtés elemeinek bemutatása.

Számoljuk ki az elektromos térerősséget! Az alábbiakban kihasználjuk, hogy $\nabla\mathbf{r} = \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\phi &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{pr}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{rQr}}{r^5}\right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(q\nabla\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{p}}{r^3}\nabla\mathbf{r} + \mathbf{pr}\nabla\frac{1}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{r^5}\nabla(\mathbf{rQr}) + \frac{1}{2}\mathbf{rQr}\nabla\frac{1}{r^5}\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} + \frac{5\mathbf{r}(\mathbf{rQr}) - 2r^2(\mathbf{Qr})}{2r^7}\right)\end{aligned} \tag{10.166}$$

Természetesen az első tag ponttöltés tere, a második a dipólusé, a harmadik pedig a quadrupolusé.

10.6.2. Erőhatás

Most határozzuk meg a töltéselrendezésre ható erőt!

A ponttöltésre ható erő a következőképpen írható (9.5) fel:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{10.167}$$

Töltéseloszlásra ez a következőképpen alakul:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dV' \tag{10.168}$$

Az elektromos térerősséget sorba fejtjük az $\mathbf{r}' = 0$ pont körül:

$$E_i(\mathbf{r}') = E_i|_{\mathbf{r}'=0} + \sum_j \left(\partial'_j E_i|_{\mathbf{r}'=0}\right) x_j + \cdots = \quad = E_i|_{\mathbf{r}'=0} + \mathbf{r}(\mathrm{grad}E_i)_{\mathbf{r}'=0} \tag{10.169}$$

Ezt visszahelyettesítve (10.168) egyenletbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_i &\simeq \int_V \rho(\mathbf{r}') \left(E_i|_{\mathbf{r}'=0} + \mathbf{r}(\mathrm{grad}E_i)_{\mathbf{r}'=0}\right) dV' \\ &= E_i|_{\mathbf{r}'=0} \left(\int_V \rho(\mathbf{r}')dV'\right) + (\mathrm{grad}E_i)_{\mathbf{r}'=0} \left(\int_V \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'dV'\right) = \end{aligned} \tag{10.170}$$

Azaz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}|_{\mathbf{r}'=0} + (\mathbf{p}\mathrm{grad}\mathbf{E})_{\mathbf{r}'=0} + \cdots \tag{10.171}$$

Tehát a töltést az elektromos térerősség húzza, a dipólust pedig $\mathbf{E}$ változása!

11. fejezet

Magnetosztatika

Először vizsgáljuk vákuumban a magnetosztatikát! Mint már említettük, statikus esetben a Maxwell-egyenletek mágneses és elektromos része szétcsatolódik. A mágneses rész a következőképpen adódik:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \mathrm{rot}\mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{11.1}$$

11.1. Vektorpotenciál

Az elektromos analógiának megfelelően vezessünk be itt is egy potenciált, ami az első egyenletet automatikusan teljesíti! Mivel tudjuk, hogy $\mathrm{div}\mathrm{rot}\mathbf{A} \equiv 0$, ezért most egy *vektorpotenciál*t fogunk bevezetni, hogy

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}. \tag{11.2}$$

11.1.1. Mértékinvariancia

Az elektrosztatikus potenciál esetében beláttuk, hogy az egy konstanstól eltekintve egyértelműi (lásd 10.5 fejezet). Itt azonban több szabadságunk van, mivel, ha

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\chi, \tag{11.3}$$

akkor

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\mathbf{A}', \tag{11.4}$$

mivel $\mathrm{rotgrad}\chi \equiv 0$. Tehát viszonylag nagy szabadságunk van $\mathbf{A}$ megválasztásában. Szokás azonban egy további kikütést tenni $\mathbf{A}$-ra, egy *mértéket* bevezetni. Ennek hasznát hamarosan meglátjuk. Definiáljuk a *Coulomb-mértéket*!

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \tag{11.5}$$

Kérdés természetesen, hogy mindig tudok-e olyan vektorpotenciált választani, amely eleget tesz a (11.5) Coulomb-mértéknek?

Legyen egy problémának a megoldása az $\mathbf{A}'$ vektorpotenciál, amely nem teljesíti a Coulomb-mértéket, azaz

$$\mathrm{div}\mathbf{A}' \neq 0 \tag{11.6}$$

Keressük azt az $\mathbf{A}$ potenciált, amely szintén megoldása az adott problémának, de kielégíti a Coulomb-mértéket! Már megmutattuk, hogy ha $\mathbf{A}'$ megoldása a problémának, akkor $\mathbf{A}' + \mathrm{grad}\chi$ is. Legyen tehát

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathrm{grad}\chi \tag{11.7}$$

Írjuk fel a Coulomb-mértéket!

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{A} = \mathrm{div}\mathbf{A}' + \Delta\chi = 0 \\ \Delta\chi = -\mathrm{div}\mathbf{A}' \end{aligned} \tag{11.8}$$

Azaz χ meghatározására egy Poisson-egyenletet kaptunk, amiről már tudjuk, hogy megoldható, tehát a $\chi(\mathbf{r})$ függvény megkapható, azaz $\mathbf{A}$ minden esetben előállítható.

11.1.2. Poisson-egyenlet

Írjuk fel a magnetosztatikára vonatkozó Maxwell-egyenleteket a vektorpotenciállal!

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\mathbf{A} = 0 \\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} \end{aligned} \tag{11.9}$$

Az első egyenlet tehát automatikusan teljesül. A második egyenletnél használjuk ki az alábbi azonosságot:

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}, \tag{11.10}$$

mivel a Coulomb-mérték miatt $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, ezért

$$-\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A} = \Delta\mathbf{A}. \tag{11.11}$$

Azaz ismét egy Poisson-egyenletre jutottunk a vektorpotenciál esetében is:

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j} \tag{11.12}$$

Az elektrosztatikához képest mindössze annyi a különbség, hogy most a Poisson-egyenletet vektorokra írtuk fel, azaz mindhárom komponensre külön-külön meg kell oldanunk egy-egy egydimenziós Poisson-egyenletet.

11.2. Biot-Savart-törvény

Oldjuk meg a (11.12) Poisson-egyenletet! A Laplace-operátor Green-függvénye ismert:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}. \tag{11.13}$$

Tehát a megoldás

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \tag{11.14}$$

Ha áramsűrűségről áttérünk vékony vezetékben folyó áramokra

$$\mathbf{j} dV' = I d\mathbf{l}', \tag{11.15}$$

akkor

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\mathbf{r}') d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{11.16}$$

11.2.1. Coulomb-mérték

Most bizonyítsuk be, hogy a (11.14) vektorpotenciál teljesíti a Coulomb-mértéket! Írjuk fel a kontinuitási egyenletet (8.11)!

$$\mathrm{div}\mathbf{j} + \partial_t \rho = 0 \tag{11.17}$$

Mivel magnetosztatikáról beszélünk, ezért $\partial_t \rho = 0$, amiből

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = 0. \tag{11.18}$$

Számoljuk ki a vektorpotenciál divergenciáját:

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = \frac{-\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \tag{11.19}$$

Ahol kihasználtuk, hogy $\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla'(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Parciálisan integrálva és kihasználva a Gauss-Osztrogradszkij-tételt kapjuk, hogy

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_F \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{A}' \tag{11.20}$$

Mivel (11.18) egyenlet alapján $\nabla \mathbf{j} = 0$, ezért a bal oldal első tagja zérus. Mivel a vektorpotenciál meghatározásához a (11.14) képletben az összes áramra szükségünk van, ezért a V térfogatnak tartalmaznia kell az $\mathbf{r}$ helyen hatást kifejtő összes áramot. Ennek a térfogatnak a F felületén tehát nem haladhat át áram, azaz a jobb oldal második tagja is zérus. Tehát kijelenthetjük, hogy $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$.

11.2.2. Mágneses indukció

Írjuk fel az (11.14) vektorpotenciálhoz tartozó mágneses indukciót!

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{rot}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' \tag{11.21}$$

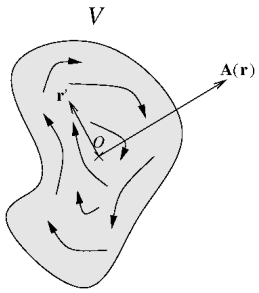
A számolás egyszerűbb komponensenként, fontos szem előtt tartani, hogy a deriválás a vesszőtlen $\mathbf{r}$ szerint történik:

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\mu_0}B_i &= \int_V \sum_{kl}\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{j_l(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' = \int_V \sum_{kl}\varepsilon_{ikl}j_l(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' = \\ &= \int_V \sum_{kl}\varepsilon_{ikl}j_l(\mathbf{r}')\left(\frac{-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)dV' = \int_V \sum_{kl}\varepsilon_{ilk}\left(\frac{j_l(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)dV' = \\ &= \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'\end{aligned} \tag{11.22}$$

Azaz megkaptuk a *Biot-Savart-törvényt*:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV' \tag{11.23}$$

11.3. Lokalizált árameloszlás mágneses momentuma



11.1. ábra. Árameloszlás szemléltetése. Az árameloszlást vesszőssel, a vektorpotenciál helyvektorát vesszőtlen szimbólummal jelöljük.

Vizsgáljuk meg a 11.1 ábrán látható lokalizált árameloszlás mágneses terét a $\mathbf{r}$ pontban! A lokalizált árameloszlás egy V térfogatban található, $\mathbf{r}'$-vel paraméterezzük, és megköveteljük, hogy $r \gg r'$.

A vektorpotenciál általános alakja a következő (11.14)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' \tag{11.24}$$

Mivel a $r \gg r'$ esetet vizsgáljuk, ezért árdemes $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$-t $r'=0$ körül sorba fejteni:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{r} - \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)_{r'=0} \mathbf{r}' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{11.25}$$

Tehát első rendig

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{r}\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')dV' + \frac{1}{r^3}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}\mathbf{r}')dV' \tag{11.26}$$

Mivel áramok csak a V térfogaton belül vannak, azért

$$\oint_F \mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathbf{r}'d\mathbf{A}' \equiv 0 \tag{11.27}$$

Használjuk ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételt:

$$0 = \int_V \nabla' \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\right] dV' = \int_V [\nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}')]\mathbf{r}'dV' + \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')\nabla'\mathbf{r}'dV' \tag{11.28}$$

Mivel már láttuk, hogy div$\mathbf{j}=0$, emellett pedig $\nabla\mathbf{r}=1$ ezért a fenti kifejezés az alábbira egyszerűsödik:

$$0 = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')dV' \tag{11.29}$$

Tehát a (11.26) egyenlet jobb oldalának első tagja zérus.

A második tag tovább alakításához induljunk ki az alábbi azonosságból:

$$\oint_F x_i'x_k'\mathbf{j}(\mathbf{r}')dF' = 0. \tag{11.30}$$

Ez szintén abból következik, hogy az áramok csak a V térfogaton belül vannak. Ismét használva a Gauss-Osztrogradszkij-tételt az kapjuk, hogy

$$0 = \int_V \nabla'[x_i'x_k'\mathbf{j}(\mathbf{r}')]dV' = \int_V [(\underbrace{\nabla'x_i'}_{=e_i})x_k'\mathbf{j} + x_i'(\underbrace{\nabla'x_k'}_{=e_k})\mathbf{j} + x_i'x_k'(\underbrace{\nabla'\mathbf{j}}_{=0})]dV'. \tag{11.31}$$

Tehát az alábbi azonosságot kaptuk:

$$\int_V x_k'j_idV' = -\int_V x_i'j_kdV'. \tag{11.32}$$

Írjuk fel a vektorpotenciál i-edik komponensét, majd használjuk ki a fenti azonosságot!

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\mu_0}A_i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{r^3}\int_V j_i(\mathbf{r}')\left(\sum_k x_kx_k'\right)dV' = \frac{1}{r^3}\sum_k x_k\int_V j_i(\mathbf{r}')x_k'dV' = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\int_V \sum_k x_k(j_ix_k' - j_kx_i')dV' = \frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\int_V [\mathbf{r}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{r}')]_i dV'\end{aligned} \tag{11.33}$$

Az utolsó lépésben kihasználtunk egy vektorszámítási azonosságot, hogy

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{r}') = (\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j} - (\mathbf{r}\mathbf{j})\mathbf{r}' \tag{11.34}$$

Összefoglalva tehát:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{-\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{r}')dV' = \frac{-\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{r} \times \left[\frac{1}{2}\int_V (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})dV'\right]}{r^3} \tag{11.35}$$

Vezessük be a *mégneses momentumot*!

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2}\int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')dV' \tag{11.36}$$

Tehát első rendig egy lokalizált árameloszlás vektorpotenciálja a következő alakot veszi fel:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{11.37}$$

Mivel nincsen mágneses monopólus, ezért egy árameloszlás mágneses tere messziről úgy látszik, mint egy mágneses dipólus tere.

Most számoljuk ki a mágneses indukciót!

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}\right) \tag{11.38}$$

Írjuk fel az i komponenst

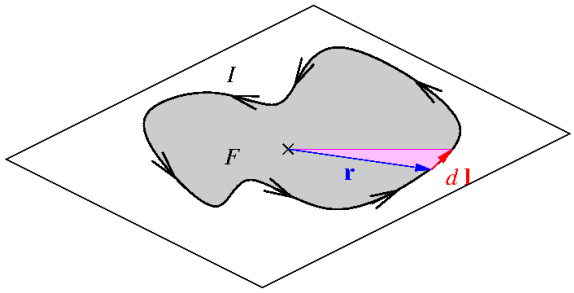
$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\mu_0}B_i(\mathbf{r}) &= \sum_{jklm}\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}m_l\frac{x_m}{r^3}\right) = \sum_{jklm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}m_l\partial_j\frac{x_m}{r^3} = \\
&= \sum_{jlm}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})m_l\partial_j\frac{x_m}{r^3} = \\
&= \sum_{jlm}\delta_{il}\delta_{jm}m_l\partial_j\frac{x_m}{r^3} - \sum_{jlm}\delta_{im}\delta_{jl}m_l\partial_j\frac{x_m}{r^3} = \\
&= \sum_j m_i\partial_j\frac{x_j}{r^3} - \sum_l m_l\partial_l\frac{x_i}{r^3} = \\
&= m_i\sum_j\left(\frac{\delta_{jj}}{r^3} - 3\frac{x_j^2}{r^5}\right) - \sum_l m_l\left(\frac{\delta_{il}}{r^3} - 3\frac{x_i x_l}{r^5}\right) = \\
&= m_i\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right) - \frac{m_i}{r^3} + 3\frac{x_i(\mathbf{m}\mathbf{r})}{r^5}
\end{aligned} \tag{11.39}$$

Az utolsó sorban az első tag zérus, a második tagot viszont már át tudjuk írni vektoriális alakra:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5} \tag{11.40}$$

Fontos megjegyezni, hogy a lokalizált árameloszlások mágneses tere, pont olyan alakot ölt, mint az elektromos dipólus tere (10.166) egy $\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{p}$ és konstans szorzótényező csere után.

11.3.1. Síkbeli áramhurok



11.2. ábra. Síkbeli áramhurok.

Vizsgáljuk meg a síkbeli áramhurok (11.2 ábra) mágneses momentumát!

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{j} dV' = \frac{I}{2}\oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' \tag{11.41}$$

Tudjuk, hogy a keresztszorzat a vektorok által kifeszített paralelogramma területe, azaz:

$$\frac{1}{2}\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = d\mathbf{F}' \tag{11.42}$$

Tehát:

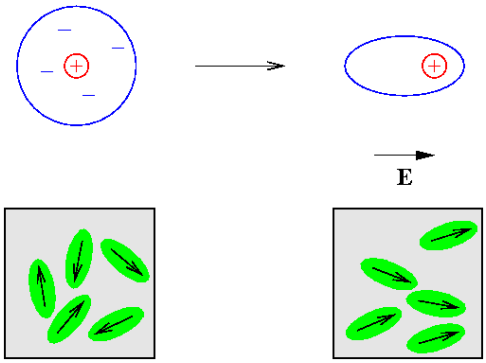
$$\mathbf{m} = I\mathbf{F}, \tag{11.43}$$

ahol $\mathbf{F}$ a hurok felülete irányultsága a jobbkéz szabályt követi.

12. fejezet

Elektormágneses tér anyagi közeg esetén

12.1. Dielektromos polarizáció



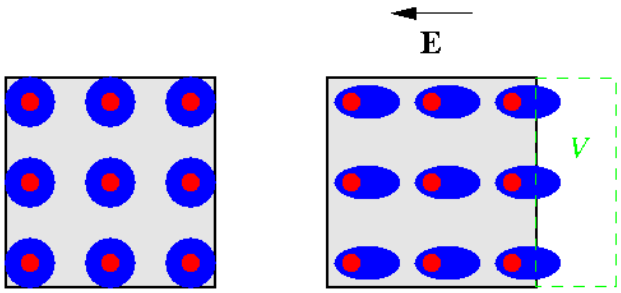
12.1. ábra. A dielektromos polarizáció két alaptípusa: Az indukált dipólus és a poláros molekulák rendeződése.

Elektromos tér hatására a töltésekre erő hat, mely elmozdíthatja azokat. Nyilván való, hogy egy tetszőleges anyagba az elektronok és az atommagok nincsenek "odaszögelve" a helyükre ezért a tér hatására elmozdulnak. Ekkor alakul ki a dielektromos polarizáció, amit a 12.1 ábrán szemléltetünk. A polarizáció létrejöhet a töltések elmozdulásából, de akár az eleve poláros molekulák elfordulásából is. A lényeg, hogy a külső elektromos tér hatására megjelenik egy makroszkopikus polarizáció. Definiáljuk a *térfogati dipólus sűrűséget*!

$$\mathbf{P} \equiv \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{p}_i. \tag{12.1}$$

A térfogati dipólus sűrűség mértékegysége tehát:

$$[\mathbf{P}] = \frac{\mathrm{Cm}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}. \tag{12.2}$$



12.2. ábra. Dielektromos polarizáció hatására létrejövő töltésmozgás.

Vizsgáljuk meg a dielektromos polarizáció hatására létrejövő töltéselmozdulást. Mivel $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, ezért a 12.2 ábrán látható elrendezésben a V térfogatban megjelenő töltésmennyiség a következőképpen írható:

$$\oint_A \mathbf{P} d\mathbf{A} = -\Delta Q \tag{12.3}$$

Használjuk ki a Gauss-Osztrogradszkij tételt:

$$\oint_A \mathbf{P} d\mathbf{A} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{P} dV \tag{12.4}$$

Mivel a (12.3) egyenlet bármely térfogatra igaz, ezért igaz a következő is:

$$-\mathrm{div}\mathbf{P} = \rho_p, \tag{12.5}$$

ahol ρ_p a polarizáció hatására megjelent töltéssűrűség.

Érdemes különválasztani a polarizáció hatására megjelent töltéssűrűséget a szabad töltések sűrűségétől:

$$\rho = \rho_{sz} + \rho_p. \tag{12.6}$$

Praktikusan a szabad töltések azok, amiket mi rakunk a rendszerbe, a polarizációs töltések pedig a kialakult elektromos tér hatására jönnek létre. Írjuk fel az első Maxwell-egyenletet!

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{sz} + \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_p \tag{12.7}$$

használjuk ki (12.5) egyenletet:

$$\mathrm{div}(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{sz}. \tag{12.8}$$

Definiáljuk az *elektromos eltolás*t!

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{12.9}$$

Amivel polarizálható anyagokban a következő Maxwell-egyenletet kapjuk:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho_{sz}. \tag{12.10}$$

A $\mathbf{P}$ polarizáció az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség hatására alakul ki. Az elektromos tér hatása, azaz a $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ függvény azonban nyilván anyagfüggő. Kis elektromos terekre és igen sok anyagra azonban jó közelítést ad a lineáris függés:

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}, \tag{12.11}$$

ahol χ az elektromos szuszceptibilitás. Írjuk fel az elektromos eltolást!

$$\mathbf{D} = \underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r} \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{12.12}$$

ahol ε_r a relatív dielektromos állandó.

12.2. Mágneses tér anyagi közeg esetén

Induljunk el a dielektromos polarizációhoz hasonlóan (12.1 fejezet)! A mágneses tér forrását a negyedik Maxwell-egyenlet (9.4) írja le:

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} \tag{12.13}$$

Itt is célszerű leválasztani a szabad áramokat. A maradék áram, azonban nem csak a polarizáció hatására létrejövő áramokból keletkezhet, hanem az atomok is rendelkezhetnek mágneses momentummal. Ezért célszerű az áramot három részre szétválasztani:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{sz} + \mathbf{j}_M + \mathbf{j}_P, \tag{12.14}$$

ahol

- $\mathbf{j}_{sz}$ a szabad áram
- $\mathbf{j}_M$ az anyag mágnesezettségét okozó mikroszkopikus köráram
- $\mathbf{j}_P$ a polarizációs töltésmozgás által létrehozott áram.

Definiáljuk az anyag mágnesezettségét az elemi mágneses dipólusok térfogatsűrűségével:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V}\sum_i \mathbf{m}_i \tag{12.15}$$

Vizsgáljuk meg a mágnesezettséget! A mágnesezettséget az egész térre kiintegrálva felírjuk a vektorpotenciált (11.37):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' \tag{12.16}$$

A parciális integrálás során a teljes derivált tag eltűnik és marad, hogy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV', \tag{12.17}$$

amit összevetve (11.14) egyenlettel adódik, hogy

$$\mathbf{j}_M = \mathrm{rot}\mathbf{M}. \tag{12.18}$$

A polarizáció a felületegységen áthaladt töltéssel egyenlő. Amikor tehát $\mathbf{P}$ időben megváltozik, töltések mozognak, azaz

$$\mathbf{j}_P = \partial_t\mathbf{P} \tag{12.19}$$

Írjuk be az áramokra kapott (12.18) és (12.19) összefüggéseket a negyedik Maxwell-egyenletbe (9.4)!

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j}_{sz} + \mathrm{rot}\mathbf{M} + \partial_t\mathbf{P} + \varepsilon_0\partial_t\mathbf{E} \tag{12.20}$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}\right) = \mathbf{j}_{sz} + \partial_t(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) \tag{12.21}$$

Definiáljuk a mágneses térerősséget:

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M} \tag{12.22}$$

Ekkor a következő egyenletet kapjuk

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_{sz} + \partial_t\mathbf{D} \tag{12.23}$$

Most már felírhatjuk a Maxwell-egyenleteket anyag jelenlétében:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho_{sz}, \tag{12.24}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{12.25}$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}, \tag{12.26}$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_{sz} + \partial_t\mathbf{D}. \tag{12.27}$$

Olyan egyenleteket kaptunk, ahonnét egyrészt eltűntek a μ_0, ε_0 együtthatók, másrészt viszont teljesen analógok az eredeti Maxwell-egyenletekkel.

A mágnesezettség függ a külső tértől. Sok esetben a $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ összefüggés még kis terekre sem lineáris, sőt vannak olyan anyagok, a ferromágnesek, amiknél külső tér nélkül is lehet maradandó mágnesezettség. Azonban vannak olyan anyagok, ahol a lineáris közelítés mégis használható, ekkor

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_r}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}, \tag{12.28}$$

ahol μ_r a relatív mágneses permeabilitás. Gyakrabban használt mennyiség a mágneses szuszceptibilitás:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \tag{12.29}$$

ahol $\chi_m + 1 = \mu_r$. Ha χ_m pozitív, akkor paramágnesről, ha negatív, akkor diamágnesről beszélhetünk.

13. fejezet

Elektromágneses tér

13.1. Töltésrendszer energiája

Egy töltésrendszer energiáját az jellemzi, hogy mekkora energiabefektetéssel tudjuk a töltéseket a helyükre tenni. A ponttöltés elektromos térerősség $1/r^2$ szerint csökken. Tehát ha végtelen távol visszük őket egymástól, akkor nem hat köztük erő. Az erőhatás ugyanis

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}. \tag{13.1}$$

Most mozgassunk egy töltést az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektromos térben $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ pont között. Mivel az elektromos tér konzervatív ezért a végzett munka a két pontban lévő elektromos potenciál különbségével lesz arányos:

$$W_{\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_2} = -q\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{s} = q[\phi(\mathbf{r}_2)-\phi(\mathbf{r}_1)]. \tag{13.2}$$

Mint már láttuk a végtelenbe a potenciál zérus, ezért vigyük az $\mathbf{r}_1$ pontot oda:

$$W_{\infty\to\mathbf{r}} = q\phi(\mathbf{r}). \tag{13.3}$$

Ez a képlet tehát azt mondja meg, hogy mekkora energiával lehet még egy töltést hozzáadni a rendszerhez. Pakoljuk össze a töltéselrendezésünket egyesével! Legyen N db ponttöltésünk q_i, töltéssel, amelyeket a $\mathbf{r}_i$ helyre szeretnénk mozgatni ($i = 1,\dots N$). A töltéselrendezés összeállításához szükséges munka tehát:

$$W = \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} \tag{13.4}$$

Térjünk át töltéssűrűségre! Helyettesítsük a q_i töltést az $\mathbf{r}_i$ pontot magába foglaló kis dV térfogatban jelenlévő ρ töltéssűrűséggel! Ekkor a (13.4) egyenlet a következőképpen alakul:

$$W = \frac{1}{2}\int dV\rho(\mathbf{r})\int dV'\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{2}\int\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV, \tag{13.5}$$

ahol kihasználtuk (10.144) egyenletet. Most használjuk ki az első Maxwell-egyenletet (9.1):

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \phi(\mathbf{r})[\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r})]dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \nabla(\phi\mathbf{E})dV - \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\nabla\phi)\mathbf{E}dV = \\ = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\oint \phi\mathbf{E}d\mathbf{F}}_{=0} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathbf{E}^2 dV \tag{13.6}$$

A felületi integrál zérus, hiszen az egész világra kell integrálnunk, a végtelenben pedig zérus az elektromos potenciál. A kapott összefüggés tehát:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV, \tag{13.7}$$

illetve definiálható az energiasűrűség is:

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}W^2. \tag{13.8}$$

Ugyanez anyag jelenlétében ugyanígy végigvihető:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV = \frac{1}{2}\int \phi(\nabla\mathbf{D})dV = \frac{1}{2}\int \mathbf{D}\mathbf{E}dV. \tag{13.9}$$

Az energiasűrűség:

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{D}\mathbf{E}. \tag{13.10}$$

13.2. Elektromágneses tér energiája

Ha van mágneses tér is, akkor az indukció is fontos. Egyszerűbb, ha munka helyett az általunk kifejtett teljesítményt vizsgáljuk:

$$P_F = \mathbf{v}\mathbf{F}. \tag{13.11}$$

Írjük be a Lorentz-erőt (9.5)i kontínuum alakban!

$$P_F = \int (\rho\mathbf{E} + j \times \mathbf{B})dV \tag{13.12}$$

mivel $\mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$. A tér teljesítménye tehát:

$$P_T = -P_F = -\int \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})dV \tag{13.13}$$

A teljesítmény-sűrűség pedig:

$$p_T = -\mathbf{Ej}. \tag{13.14}$$

Írjuk fel a teljesítménysűrűséget anyag jelenlétében! Először használjuk ki a 4. Maxwell-egyenletet (12.27):

$$p_T = -\mathbf{Ej} = \mathbf{E}(-\mathrm{rot}\mathbf{H} + \partial_t \mathbf{D}) = \mathbf{E}\partial_t\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathrm{rot}\mathbf{H} + \underbrace{\mathbf{H}\mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{H}\mathrm{rot}\mathbf{E}}_{=0} \tag{13.15}$$

Most Maxwell 3. egyenlete segítségével írjuk át az utolsó tagot:

$$\begin{aligned} -\mathbf{Ej} &= \mathbf{E}\partial_t\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathrm{rot}\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathrm{rot}\mathbf{E} + \mathbf{H}\partial_t\mathbf{B} = \\ &= \mathbf{E}\partial_t\mathbf{D} + \mathbf{H}\partial_t\mathbf{B} - \mathbf{E}\mathrm{rot}\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathrm{rot}\mathbf{E} \end{aligned} \tag{13.16}$$

Az első két tag az elektromágneses energiájának idő szerinti deriváltja:

$$\begin{aligned} \partial_t w = \partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{DE} + \frac{1}{2}\mathbf{BH}) = \frac{1}{2}(\partial_t\mathbf{D})\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{D}(\partial_t\mathbf{E}) + \frac{1}{2}(\partial_t\mathbf{B})\mathbf{H} + \frac{1}{2}\mathbf{B}(\partial_t\mathbf{H}) = \\ = \mathbf{E}\partial_t\mathbf{D} + \mathbf{H}\partial_t\mathbf{B}, \end{aligned} \tag{13.17}$$

mivel $\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E} = \partial_t\mathbf{D}$ és hasonlóképpen $\mu_0\partial_t\mathbf{H} = \partial_t\mathbf{B}$.

Az utolsó két tag pedig teljes divergencia:

$$\nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = (\nabla\mathbf{E})\times\mathbf{H} - (\nabla\mathbf{H})\times\mathbf{E} = (\nabla\times\mathbf{E})\mathbf{H} - (\nabla\times\mathbf{H})\mathbf{E} \tag{13.18}$$

A fenti mennyiséget Poynting-vektornak nevezik:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{13.19}$$

és $[S] = \mathrm{W/m}^2$. Jelentése pedig az energiafluxus-sűrűség.

Az (13.17) egyenlet tehát a következő alakba írható:

$$\partial_t w + \mathrm{div}\mathbf{S} + \mathbf{jE} = 0 \tag{13.20}$$

Ez a Poynting-tétel, amely az elektromágneses tér energiamegmaradását fejezi ki. Az egységnyi térfogatban létrejövő energiaváltozás egyenlő a töltéseken végzett munka és a térfogatot egységnyi idő alatt elhagyó energiafluxus összegével.

A teljes térre integrálva a divergencia nem ad járulékot, tehát

$$\partial_t \int w dV = P = \int -\mathbf{jE} dV \tag{13.21}$$

13.3. Az elektromágneses tér impulzusmérleg-egyenlete

Az impulzusmérleg levezetéséhez induljunk ki a Lorentz-erőből (9.5):

$$\mathbf{F} = \int (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV. \tag{13.22}$$

Amiből a térfogategységre eső erő, azaz az idő- és térfogategységre eső impulzusváltozás:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{13.23}$$

Anyag jelenlétében Maxwell első (12.24) és negyedik (12.27) egyenlete segítségével átírjuk ρ-t és $\mathbf{j}$-t:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{D} - \mathbf{B} \times (\mathrm{rot}\mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D}), \\ \mathbf{f} &= \mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{D} + \mathbf{B} \times \partial_t \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\mathbf{H}. \end{aligned} \tag{13.24}$$

A második tagot átírjuk teljes időderiválttá, és az egész egyenlethez hozzáadunk egy zérus tagot

$$\mathbf{f} = \mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{D} + \underbrace{\partial_t(\mathbf{B} \times \mathbf{D}) - (\partial_t \mathbf{B}) \times \mathbf{D}}_{=\mathbf{B}\times\partial_t\mathbf{D}} + \underbrace{\mathbf{H}\mathrm{div}\mathbf{B}}_{=\mathrm{div}\mathbf{B}=0} - \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\mathbf{H}, \tag{13.25}$$

Ahol kihasználtuk, hogy Maxwell második egyenlete (12.25) miatt $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$. Maxwell harmadik egyenlete (12.26) miatt $\partial_t \mathbf{B} = -\mathrm{rot}\mathbf{E}$, tehát

$$\mathbf{f} = -\partial_t(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{D} - \mathbf{D} \times \underbrace{\mathrm{rot}\mathbf{E}}_{=\partial_t\mathbf{B}} + \mathbf{H}\mathrm{div}\mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\mathbf{H} \tag{13.26}$$

Nézzük meg a második és harmadik tag i komponensét:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{D} - \mathbf{D} \times \mathrm{rot}\mathbf{E})_i &= \sum_j \left(E_i \partial_j D_j - \sum_{jklm} \varepsilon_{ijk} D_j \varepsilon_{klm} \partial_l E_m \right) = \\ &= \sum_j E_i \partial_j D_j - D_j \partial_i E_j + D_j \partial_j E_i = \\ &= \sum_j \partial_j \left(E_i D_j - \frac{1}{2} \mathbf{D}\mathbf{E} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \tag{13.27}$$

ahol kihasználtuk (1.6) azonosságot. Tehát a fenti kifejezés egy teljes divergencia. Ugyanez igaz a $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ tagokra is. Definiáljuk a következő tenzorokat:

$$\begin{aligned} T^E_{ij} &= E_i D_j - \frac{1}{2} \mathbf{D}\mathbf{E} \delta_{ij} \\ T^M_{ij} &= H_i B_j - \frac{1}{2} \mathbf{B}\mathbf{H} \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{13.28}$$

illetve ezek összegét a Maxwell-féle feszültségtenzort:

$$\mathbf{T}^{\mathrm{Max}} = \mathbf{T}^{E} + \mathbf{T}^{M} \tag{13.29}$$

Definiáljuk a kovetkezőt

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}! \tag{13.30}$$

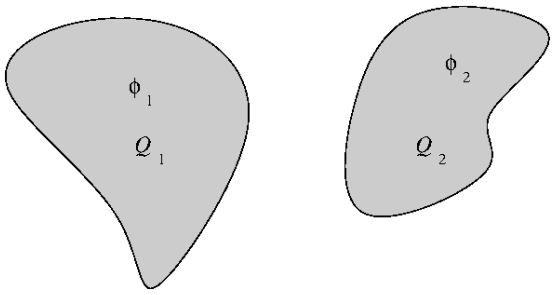
c-ről majd csak később mutatjuk meg, hogy a fénysebesség. Ekkor az impulzus mérleg egyenlet a tér szempontjából következő alakba írható:

$$-\mathbf{f} = \partial_t \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right) + \mathrm{div} \left(-T^{\mathrm{Max}} \right) \tag{13.31}$$

A kapott mérlegegyenletből (8.11) megállapítható, hogy az impulzus forrása az erő, az impulzussűrűség c^2 szerese a Poynting-vektor, illetve a Maxwell-féle feszültségtenzor az impulzus áramsűrűség, vagyis az elektromágneses mező egységnyi felületen egységnyi idő alatt átáramló impulzusát adja meg.

A fenti formalizmus segítségével egyszerűbben kezelhetők bonyolult töltésrendszerek klasszikus mozgása. Vákuumban a Maxwell-féle feszültségtenzor szimmetrikus, tehát $T_{ij}^{\mathrm{Max}} = T_{ji}^{\mathrm{Max}}$.

13.4. Töltések és potenciálok vezetőkön



13.1. ábra. Vezető testek.

Először tisztázzuk a *vezető*k fogalmát! A vezető lehetővé teszi az elektromos töltések mozgását. Ez azt jelenti, hogy ha van elektromos térerősség, azaz elektromos potenciálkülönbség, akkor a töltések addig mozognak, míg ez fenn áll. Ha nincs külső beavatkozás, akkor ez egy idő múlva megtörténik, azaz a vezető felületén eltűnik mindennemű potenciálkülönbség, a felülete *ekvipotenciális* lesz.

Most vizsgáljuk a stacionárius esetet, amikor minden vezetőfelület ekvipotenciális. Ekkor a vezetők jellemezhetők egy potenciállal és a rejtuk lévő töltéssel (lásd 13.1 ábra).

Számoljuk ki egy ilyen elrendezés összenergiáját:

$$W_E = \int w_E dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}\mathbf{E} dV \tag{13.32}$$

Tudjuk, hogy $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$, ezért

$$W_E = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}\text{grad}\phi dV \tag{13.33}$$

Integráljuk parciálisan:

$$W_E = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}\text{grad}\phi dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int \nabla(\mathbf{E}\phi) dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int \phi \nabla \mathbf{E} dV. \tag{13.34}$$

Használjuk a ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételt és, hogy a végtelenben zérus a potenciál:

$$\int \nabla(\mathbf{E}\phi) dV = \oint \mathbf{E}\phi dV = 0 \tag{13.35}$$

Tehát

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \phi \nabla \mathbf{E} dV \tag{13.36}$$

Most Maxwell első egyenletét (9.1) használjuk ki:

$$W_E = \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV \tag{13.37}$$

Mivel töltések csak a vezető testeken vannak, a fenti integrált csak a testekre kell elvégezni. Az általunk vizsgált vezetők felülete ekvipotenciális, tehát a fenti integrálban szereplő ϕ egy-egy vezető felületén állandó:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \int_{V_i} \rho(\mathbf{r}) dV, \tag{13.38}$$

ahol V_i jelöli az i-edik vezető test térfogatát. A töltéssűrűség integrálja a vezető testen a vezetőn lévő össztöltést adja, tehát a rendszer összenergiája a következőképpen alakul:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i Q_i, \tag{13.39}$$

ahol az összegzés a vezető testekre történik.

Egy adott vezetőn lévő Q_i és ϕ_i nem független egymástól. A (10.144) egyenlet alapján látható, hogy ez a kapcsolat lineáris, azaz kétszer akkora töltés (kétszer akkora töltéssűrűség) kétszer akkora potenciált hoz létre. Egy töltéselrendezésnél ezt egy tenzorral lehet kifejezni:

$$\phi_i = \sum_k p_{ik} Q_k, \tag{13.40}$$

illetve

$$Q_i = \sum_k c_{ik}\phi_k, \tag{13.41}$$

ahol p_{ik} a potenciál-, c_{ik} a kapacitás-együtthatók:

$$\mathbf{c}^{-1} = \mathbf{p}. \tag{13.42}$$

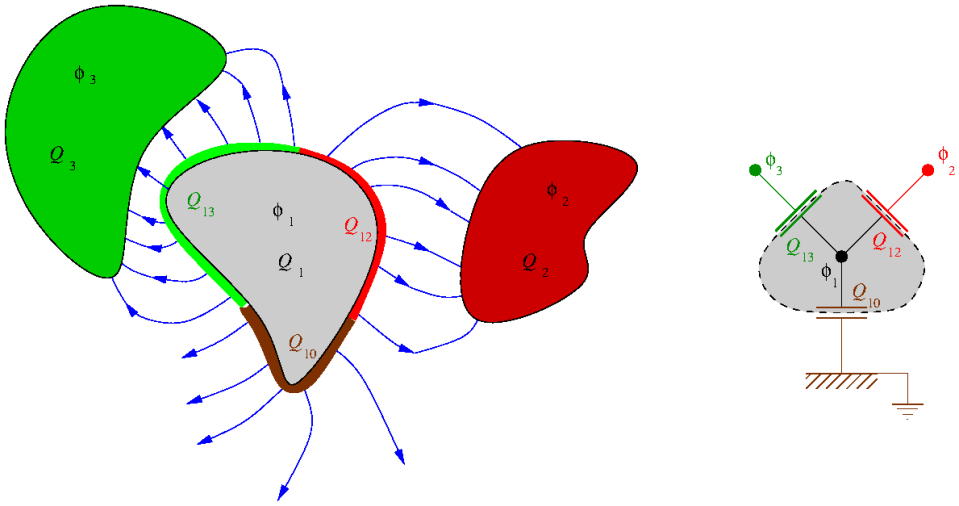
A vezetőrendszer energiája tehát:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{ij} c_{ij}\phi_i\phi_j \tag{13.43}$$

Szokás a kapacitást más formában definiálni. Legyenek

$$\begin{aligned} C_{ik} &= -c_{ik} \\ C_{i0} &= \sum_k c_{ik} \end{aligned} \tag{13.44}$$

A C_{ik} együtthatókat *főkapacitásoknak*, a C_{i0} együtthatókat *földkapacitásoknak* nevezzük.



13.2. ábra. Példa töltésmegosztás vezetőkön.

Ezekkel az együtthatókkal töltést a következőképpen kaphatjuk meg a potenciálokból:

$$Q_i = \sum_k C_{ik}(\phi_i - \phi_k) + C_{i0}(\phi_i - 0), \tag{13.45}$$

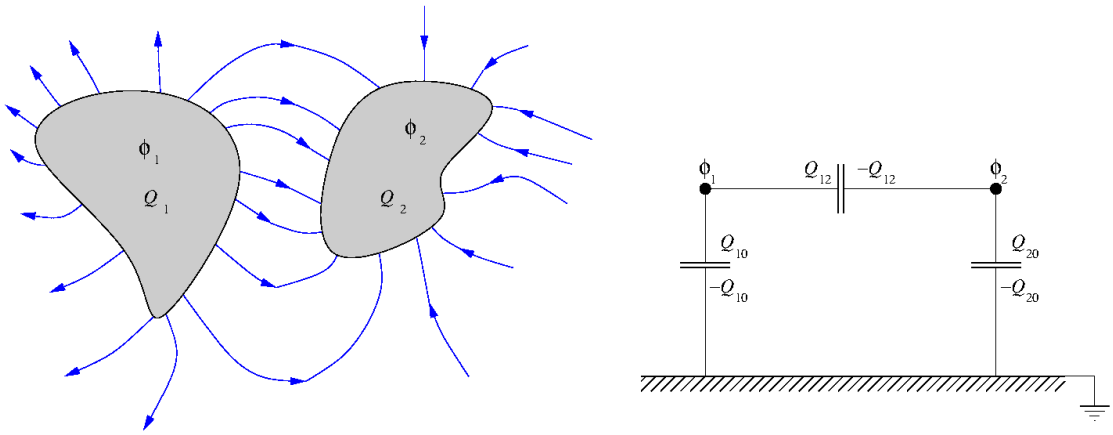
ahol $V = \phi_i - \phi_k$ a két test közötti potenciálkülönbség. Meg lehet mutatni, hogy $C_{ik} = C_{ki}$. Ebből viszont az is következik, hogy a testeken lévő töltéseket szét lehet osztani páronként (lásd 13.2 ábra):

$$Q_i = \sum_k Q_{ik} + Q_{i0}, \tag{13.46}$$

ahol

$$Q_{ik} = C_{ik} V_{ik} = C_{ik}(\phi_i - \phi_k), \tag{13.47}$$

k lehet 0 is. Klasszikus tanulmányaink során tehát ezeket a C_{ik} együtthatókat neveztük kapacitásnak, a C_{i0} együtthatókat pedig önkapacitásnak (lásd 13.3 ábra).



13.3. ábra. Töltött vezető testek átírása fő- és földkapacitások segítségével.

14. fejezet

Elektromágneses hullámok

14.1. Elektromágneses hullámok vákuumban

14.1.1. Forrásmentes hullámegyenlet

Vizsgáljuk meg a Maxwell-egyenleteket (9.1)–(9.4) mindenféle forrás nélkül vákuumban!

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0 \tag{14.1}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{14.2}$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \tag{14.3}$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \tag{14.4}$$

Itt is használni fogjuk a $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ jelölést, azaz a (14.4) egyenlet így is írható:

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} \tag{14.5}$$

Fontos megjegyezni, hogy egy $-1/c^2$ konstanstól eltekintve $\mathbf{B}$ és $\mathbf{E}$ szerepe szimmetrikus az egyenletekben. A (14.4) egyenletnek vegyük a rotációját. Használjuk ki, hogy a parciális deriváltak felcserélhetők:

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathrm{rot}\partial_t \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\partial_t \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{B} \tag{14.6}$$

Az egyenlet bal oldalát alakítsuk tovább, kihasználva (1.6) azonosságot:

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \tag{14.7}$$

Mivel azonban most (14.2) miatt $\nabla\mathbf{B} = 0$, ezért (14.6) egyenlet a következő formába írható

$$\Delta\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{B} = 0 \tag{14.8}$$

A fenti levezetés az elektromos térerősségre ugyanígy végigcsinálható, a végeredmény is ugyanaz:

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{E} = 0 \tag{14.9}$$

Tehát mind a mágneses indukcióra, mind az elektromos térerősségre egy hullámegyenletet kaptunk.

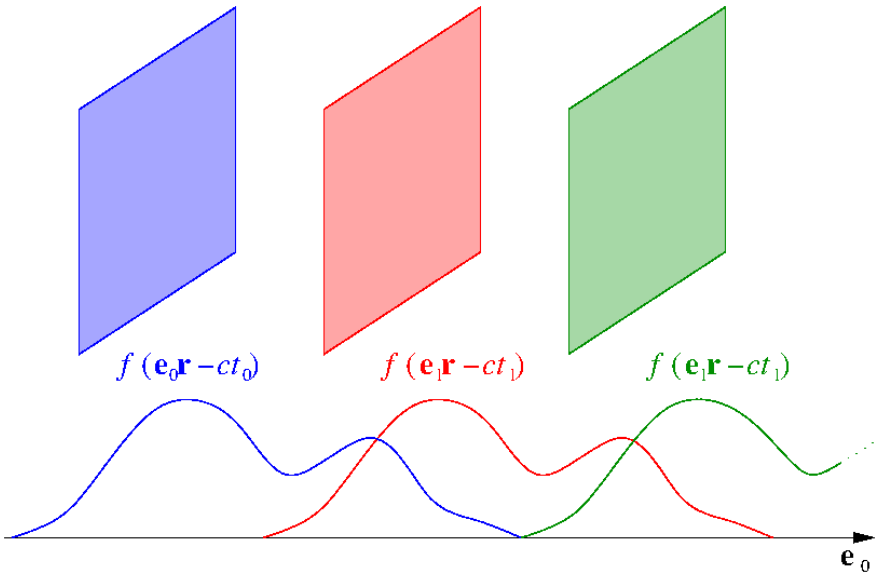
Szokás bevezetni egy szimbólumot, ami a fenti két differenciáloperátort egyesíti magában. Ez a *d'Alambert operátor*:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{14.10}$$

Ekkor a forrásmentes hullámegyenletek a következő egyszerű alakot öltik:

$$\begin{aligned}\Box\mathbf{B} &= 0\\ \Box\mathbf{E} &= 0.\end{aligned} \tag{14.11}$$

14.1.2. Síkhullámok



14.1. ábra. Síkhullámok. $\mathbf{e}_0$ irányú és c sebességű síkhullámok. A sík lapok a hullámfrontokat jelölik. A hullámfrontok azonos fázisú helyek különböző időpontban.

A (14.8) és (14.9) egyenleteknek nagyon sokféle megoldása van, itt most az egyszerűség kedvéért csak a síkhullámokkal fogunk foglalkozni. Először is tegyük fel, hogy

az elektromágneses hullám elektromos és mágneses komponense a következő általános alakot veszi fel:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 f(\mathbf{e}_0\mathbf{r} - ct)\\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 f(\mathbf{e}_0\mathbf{r} - ct)\end{aligned} \tag{14.12}$$

A 14.1 ábra szemlélteti a fenti általános hullámalak terjedését. Először is vizsgáljuk meg, hogy (14.12) valóban megoldása-e a (14.8)-(14.9) egyenleteknek!

Vegyük fel úgy a koordinátarendszerünket, hogy $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_0$. Ekkor az y és z szerinti deriválás a Laplace-operátorból nem ad járulékot. Tehát:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{E} &= \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{E}\\ \partial_x^2\mathbf{E}_0 f(x-ct) &= \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{E}_0 f(x-ct)\\ \mathbf{E}_0 f''(x-ct) &= \mathbf{E}_0\frac{(-c)^2}{c^2}f''(x-ct)\end{aligned} \tag{14.13}$$

Tehát a (14.12) függvények valóban kielégítik a (14.8)-(14.9) hullámegyenleteket.

Most vizsgáljuk meg $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ és $\mathbf{e}_0$ viszonyát! Írjuk be a (14.12) megoldásokat az első két Maxwell-egyenletbe (14.1)-(14.2):

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{E} &= 0\\ \nabla[\mathbf{E}_0 f(\mathbf{e}_0\mathbf{r} - ct)] &= 0\\ \mathbf{E}_0\nabla[f(\mathbf{e}_0\mathbf{r} - ct)] &= 0\\ (\mathbf{E}_0\mathbf{e}_0)f'(\mathbf{e}_0\mathbf{r} - ct) &= 0\end{aligned} \tag{14.14}$$

Mivel $f'(\mathbf{e}_0\mathbf{r} - ct)$ általában nem nulla, ezért

$$\mathbf{E}_0\mathbf{e}_0 = 0 \tag{14.15}$$

Azaz

$$\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{e}_0. \tag{14.16}$$

A mágneses indukcióval hasonlóan végigcsinálható és megkapható, hogy szintén

$$\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{e}_0. \tag{14.17}$$

Az utolsó két Maxwell-egyenletbe (14.3)-(14.4) is helyettesítsük be a síkhullám (14.8)-(14.9) alakot

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\partial_t\mathbf{B}\\ \mathbf{e}_0 \times [\mathbf{E}_0 f'(\mathbf{e}_0\mathbf{r} - ct)] &= c\mathbf{B}f'(\mathbf{e}_0\mathbf{r} - ct)\\ \mathbf{e}_0 \times \mathbf{E}_0 &= c\mathbf{B},\end{aligned} \tag{14.18}$$

hasonlóan

$$\mathbf{e}_0 \times \mathbf{B}_0 = -\frac{1}{c}\mathbf{E}_0 \tag{14.19}$$

Az utóbbi két egyenletből az is következik, hogy

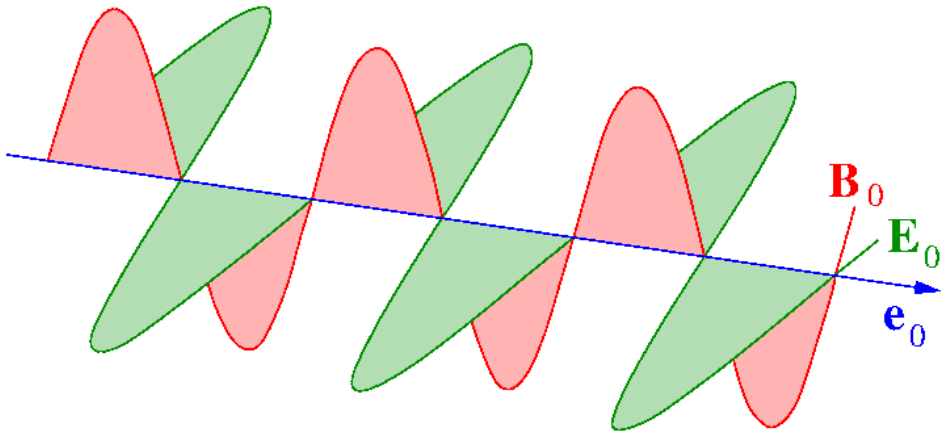
$$\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{E}_0, \tag{14.20}$$

illetve merőleges vektoroknál a keresztszorzat nagysága az abszolút értékek szorzata, azaz

$$|\mathbf{E}_0| = c|\mathbf{B}_0| \tag{14.21}$$

Összefoglalva három dolgot tanultunk:

1. $(\mathbf{e}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ vektorok páronként merőlegesek egymásra, azaz az elektromos térerősség merőleges a mágneses indukcióra és mindketten merőlegesek a haladási irányra.
2. $(\mathbf{e}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak.
3. $|\mathbf{E}_0| = c|\mathbf{B}_0|$, az elektromos térerősség amplitúdója c szerese a mágneses indukciónak.



14.2. ábra. Harmonikus síkhullám.

Fontos alosztályt képeznek a harmonikus síkhullámok (14.2 ábra), amelyeket a mechanikai oszcillátorhoz hasonlóan komplex számok felett vezetünk be:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},\end{aligned} \tag{14.22}$$

ahol a hullámos vonal (˜) arra utal, hogy az az adott kifejezés komplex szám. A fizikai megoldás mindig ennek a valós része. $\mathbf{k}$ a hullámszám és

$$\omega = ck. \tag{14.23}$$

14.1.3. Inhomogén hullámegyenlet, Lorentz-mérték

Most vegyük figyelembe a forrásokat is, és próbáljuk meg így megalkotni a hullámegyenleteket! Ahhoz, hogy a problémát jól tudjuk kezelni, a sztatikához hasonlóan át kell térnünk potenciálokra. A vektorpotenciál (11.2) továbbra is jól működik, hiszen ha

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}, \tag{14.24}$$

akkor (9.2)

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = \mathrm{divrot}\mathbf{A} = 0 \tag{14.25}$$

mindig teljesül. Az elektromos potenciál viszont (10.3) eredeti definíciójában nem jó

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\phi \tag{14.26}$$

amiből (9.3):

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mathrm{rotgrad}\phi = 0 \neq -\partial_t\mathbf{B} \tag{14.27}$$

Keressük meg mivel kell kiegészíteni (10.3)-t, hogy Maxwell 3. egyenlete (9.3) automatikusan teljesüljön! Legyen

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\phi + \mathbf{X} \tag{14.28}$$

Maxwell második egyenlete tehát

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = \underbrace{-\mathrm{rotgrad}\phi}_{=0} + \mathrm{rot}\mathbf{X} = -\partial_t\mathbf{B} = -\partial_t\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}(-\partial_t\mathbf{A}), \tag{14.29}$$

ahol a jobb oldalon behelyettesítettük a vektorpotenciál definícióját. A fenti képletből leolvasható, hogy

$$\mathbf{X} = -\partial_t\mathbf{A} \tag{14.30}$$

megfelelő választás lehet. Az elektromos térerősséget tehát a következőképpen kell meghatározni a potenciálokból:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\phi - \partial_t\mathbf{A} \tag{14.31}$$

Most nézzük meg, hogy sikerül-e hullámegyenletet kapnunk a potenciálokra! Most a forrásos egyenleteket kell vizsgálnunk, hiszen a másik kettő a potenciálok definíciója miatt automatikusan teljesül. Nézzük először a negyedik Maxwell-egyenletet (9.4)

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{E} + \mu_0\mathbf{j} \\
\mathrm{rotrot}\mathbf{A} &= -\frac{1}{c^2}\partial_t\mathrm{grad}\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A} + \mu_0\mathbf{j} \\
\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} &= -\frac{1}{c^2}\mathrm{grad}\partial_t\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A} + \mu_0\mathbf{j} \\
\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi\right) &= \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A} + \mu_0\mathbf{j}
\end{aligned} \tag{14.32}$$

Az egyenlet jobb oldalán megkaptuk a kívánt, immár forrásos hullámegyenletet, de a bal oldalon még van egy plusz tag. Magnetosztatikában a div$\mathbf{A} = 0$ mértéket választottuk, most ezt egészítsük ki úgy, hogy a bal oldal eltűnjön! Ez lesz a *Lorentz-mérték*:

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi = 0 \tag{14.33}$$

Most nézzük meg az első Maxwell-egyenletet (9.1):

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ -\nabla^2\phi - \nabla\partial_t\mathbf{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ -\Delta\phi - \partial_t\nabla\mathbf{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \end{aligned} \tag{14.34}$$

A div$\mathbf{A}$ kifejezés helyére helyettesítsük be a Lorentz-mértékből ϕ-t:

$$-\Delta\phi + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{14.35}$$

Tehát itt is hasznos volt a Lorentz-mérték. Foglaljuk össze a két kapott egyenletet:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{14.36}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j} \tag{14.37}$$

Mielőtt rátérnénk a fenti egyenletek megoldására a Coulomb-mértékhez hasonlóan most is megvizsgáljuk, hogy mindig teljesíthető-e a Lorentz-mérték. Ehhez először meg kell határoznunk, milyen szabadsággal rendelkezünk a potenciálok kiválasztásánál. Könnyen belátható, hogy egy skalármezőnyi szabadsággal rendelkezünk a következő formában:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \mathrm{grad}\chi \\ \phi' &= \phi - \partial_t\chi, \end{aligned} \tag{14.38}$$

ugyanis

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \mathrm{rot}\mathbf{A}' = \mathrm{rot}\mathbf{A} + \underbrace{\mathrm{rotgrad}\chi}_{=0} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \mathbf{E}' &= -\nabla\phi' - \partial_t\mathbf{A}' = -\nabla\phi \underbrace{+\nabla\partial_t\chi}_{+\mathbf{X}} - \partial_t\mathbf{A} \underbrace{-\partial_t\nabla\chi}_{-\mathbf{X}} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A} = \mathbf{E}, \end{aligned} \tag{14.39}$$

ahol a második egyenletben a két jelölt tag kiejti egymást.

Most nézzük meg azt is, hogy ha van egy olyan $\{\mathbf{A}, \phi\}$ potenciálpárunk, amelyik nem teljesíti a Lorentz-mértéket, akkor ahhoz választható-e olyan χ skalármező, aminek segítségével megkonstruált $\{\mathbf{A}', \phi'\}$ potenciálpár már teljesíti a Lorentz-mértéket, azaz

$$\mathrm{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi' = 0 \tag{14.40}$$

Beírva (14.38) egyenleteket:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{A} + \Delta\chi + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\chi = 0 \\ \Delta\chi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\chi = -\left[\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\chi\right] \end{aligned} \tag{14.41}$$

Tehát a vektorpotenciálhoz hasonlóan a feladat itt is megoldható, a Lorentz-mértéktől való eltérés lesz a χ skalármező forrása.

Megjegyezzük, hogy a Lorentz-mérték nem definiálja egyértelműen a potenciált, hiszen (14.41) egyenlet alapján bármilyen χ skalármezővel, amelyik teljesíti a

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\chi = 0 \tag{14.42}$$

egyenletet módosíthatjuk a potenciálokat és azok továbbra is teljesíteni fogják a Lorentz-mértéket. Ezért szokás a Lorentz-mértéket korlátozott mértékinvarianciának is nevezni.

14.1.4. Az inhomogén hullámegyenlet megoldása

Összesen négy darab hullámegyenletünk van ϕ, A_1, A_2, A_3 potenciálokra. Ezek mind a következő alakúak:

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi = -f(\mathbf{r}, t) \tag{14.43}$$

Térjünk át Fourier-térbe $t \to \omega$ transzformációval:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega)e^{i\omega t}d\omega \\ f(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\mathbf{r}, \omega)e^{i\omega t}d\omega. \end{aligned} \tag{14.44}$$

Illetve

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega t}dt \\ \tilde{f}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega t}dt \end{aligned} \tag{14.45}$$

Ekkor (14.43) a következő alaköt ölti:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Delta\tilde{\psi}(\mathbf{r},\omega)-\frac{(i\omega)^2}{c^2}\tilde{\psi}(\mathbf{r},\omega)\right)e^{i\omega t}d\omega=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\mathbf{r},\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{14.46}$$

Amiből

$$\Delta\tilde{\psi}(\mathbf{r},\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\psi}(\mathbf{r},\omega)=-\tilde{f}(\mathbf{r},\omega) \tag{14.47}$$

Vezessük be a már ismert jelölést, miszerint

$$k=\omega/c \tag{14.48}$$

Ekkor minden ω-ra egy lineáris differenciálegyenletet kapunk

$$(\Delta+k^2)\tilde{\psi}(\mathbf{r},\omega)=-\tilde{f}(\mathbf{r},\omega) \tag{14.49}$$

Mivel (14.49) egyenlet lineáris, ezért próbálkozzunk Green-függvény technikával!

$$(\Delta+k^2)G_k(\mathbf{r})=-\delta(\mathbf{r}) \tag{14.50}$$

Az egyenletünk gömbszimmetrikus, tehát

$$G_k(\mathbf{r})=G_k(r) \tag{14.51}$$

Vizsgáljuk a $r>0$ esetet gömbi koordinátarendszerben! Először nézzük meg a Laplace-operátort

$$\Delta G_k(r)=\frac{1}{r^2}\partial_r[r^2\partial_r G_k(r)]=\frac{1}{r}\partial_r^2[rG_k(r)] \tag{14.52}$$

Most a teljes (14.50) differenciálegyenletet $r>0$ esetre:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\partial_r^2[rG_k(r)]+\frac{1}{r}k^2[rG_k(r)]&=0\\ \partial_r^2[rG_k(r)]+k^2[rG_k(r)]&=0\\ \partial_r^2 g(r)+k^2g(r)&=0,\end{aligned} \tag{14.53}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\delta(r)=0$, ha $r>0$, illetve bevezettük a $g(r)=rG_k(r)$ jelölést. Az utolsó differenciálegyenletnek ismerjük a megoldását:

$$g(r)=ae^{\pm ikr}, \tag{14.54}$$

amiből

$$G_k(r)=\frac{a}{r}e^{\pm ikr}. \tag{14.55}$$

Az a együtthatót az $r = 0$ pont körüli integrálásból lehet megkapni, értéke $1/(4\pi)$. Tehát

$$G_k(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{\pm ikr} \tag{14.56}$$

Ebből már tetszőleges $\tilde{f}$ bemenetre meg tudjuk határozni a megoldást:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) = \int \tilde{f}(\mathbf{r}', \omega) \frac{e^{\pm ik(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \tag{14.57}$$

Minket $\psi(\mathbf{r}, t)$ érdekel, tehát visszatranszformáljuk $\tilde{f}$-t:

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
\psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \int \tilde{f}(\mathbf{r}', \omega) e^{-i\omega t \pm ik(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\omega dV' \\
\psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \int \tilde{f}(\mathbf{r}', \omega) e^{-i\omega(t \mp (\mathbf{r}-\mathbf{r}')/c)} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\omega dV'
\end{aligned} \tag{14.58}$$

Itt felismerhetjük $f(\mathbf{r}', t \mp (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/c)$ Fourier-transzformáltját. Vezessük be a következő jelölést:

$$[t] = t \mp \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c} \tag{14.59}$$

ahol $t - (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/c$ jelöli a *retardált* időt, $t + (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/c$ az *avanzsált* időt. Ezzel a jelöléssel:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{r}', [t])}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{14.60}$$

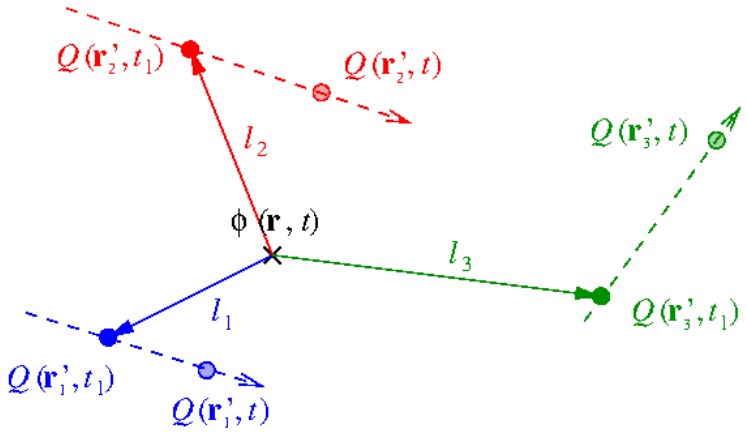
Visszatérve a potenciálokra:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', [t])}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', [t])}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'
\end{aligned} \tag{14.61}$$

Természeteren ehhez még hozzá kell venni a kezdeti- és peremfeltételeket, a töltésmegmaradást és a Lorentz-mértéket, csak ekkor kapjuk meg az igazi potenciálokat.

Most vizsgáljuk meg az eredményeket. Ahhoz, hogy egy $(\mathbf{r}, t)$ pontban kiszámítsuk a potenciált, retardált idő esetén a töltések és áramoknak egy korábbi pozíciójára van szükségünk. Az időkülönbség pont az az idő, ami alatt a fény megteszi az adott távolságot. Ez teljesen összhangban van az Einstein-féle speciális relativitáselmélettel, hogy semmilyen hatás nem haladhat gyorsabban a fénysebességnél.

Azonban nehéz mit kezdeni az avanzsált potenciálokkal, amik azt jelentenék, hogy a töltések jövőbeli pozíciója is éppolyan hatással van a potenciálra, mint a múltbeli.



14.3. ábra. Retardált potenciál. Az $(\mathbf{r}, t)$ pontban a potenciál kiszámításához korábbi időpillanatokban kell tudnunk a többi töltés helyét. A szaggatott nyilak a töltések pályáját jelölik.

Ennek a problémának a pragmatikus feloldása, hogy bár a Maxwell-egyenletek időben szimmetrikusak, de a mi világunkban csak retardált kölcsönhatások fordulnak elő.

Voltak próbálkozások arra, hogy figyelembe vegyék az avanzsált potenciálokat is. Ilyen például a Wheeler–Feynman-elmélet [10]. Az elmélet szerint egy töltés fele részben avanzsált, fele részben retardált hullámokat bocsát ki. Az idők kezdete (big bang) egy tökéletes tükör, míg az idők végezete egy tökéletes nyelő. Az idők kezdetéről visszavert hullám a retardált hullámokkal együtt pont a helyes eredményt adja. Sajnos a modellel vannak problémák, a kiterjesztése a kvantummechanikára problematikus. Ezért egyszerűen a következőkben csak retardált potenciálokkal fogunk foglalkozni, azaz amikor

$$[t] = t - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c}. \tag{14.62}$$

14.1.5. Hertz-dipólus

Az előző fejezetben meghatároztuk a potenciálokat. Azonban azok kiszámítása igen körülményes, mivel a négy egyenlet mellett bizonyos megszorításoknak is eleget kell tennie, ezek a töltésmegmaradás és a Lorentz-mérték. Most megalkotunk egy olyan formalizmust, ami ezeket automatikusan teljesíti. Ez a Hertz-formalizmus.

Először definiáljuk a $\mathbf{P}_H(\mathbf{r}, t)$ Hertz-dipólust:

$$\begin{aligned} \rho &= -\mathrm{div}\mathbf{P}_H, \\ \mathbf{j} &= \partial_t \mathbf{P}_H. \end{aligned} \tag{14.63}$$

Nézzük meg, hogy ez teljesíti-e a töltésmegmaradást:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \mathrm{div}\mathbf{j} &= 0 \\ -\partial_t \mathrm{div}\mathbf{P}_H + \mathrm{div}\partial_t \mathbf{P}_H &= 0, \end{aligned} \tag{14.64}$$

ami mindenképpen teljesül a parciális deriváltak felcserélhetősége miatt. A potenciálok helyett bevezetjük a Hertz-vektort $\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{Z} \\ \phi &= -\mathrm{div}\mathbf{Z} \end{aligned} \tag{14.65}$$

Nézzük meg a Lorentz-mértéket:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi &= 0 \\ \frac{1}{c^2}\mathrm{div}\partial_t \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\partial_t \mathrm{div}\mathbf{Z} &= 0, \end{aligned} \tag{14.66}$$

ami szintén teljesül.

Tehát a $(\rho, \mathbf{j})$ források helyett bevezettük a $\mathbf{P}_H$ Hertz-dipólust, a $(\mathbf{A}, \phi)$ potenciálok helyett pedig a $\mathbf{Z}$ Hertz-vektort. Azaz négy komponens helyett csak három van, miközben megszabadultunk egy kényszerfeltételtől.

Most nézzük meg, hogy milyen egyenleteket kapunk a hullámegyenletekből! Először tekintsük a vektorpotenciálra vonatkozót (14.37):

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j} \\ \frac{1}{c^2}\partial_t \left(\Delta\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{Z} \right) &= -\mu_0 \partial_t \mathbf{P}_H \end{aligned} \tag{14.67}$$

Integráljuk a fenti egyenletet idő szerint:

$$\Delta\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{Z} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}_H + C. \tag{14.68}$$

Mivel C szabadon választható, az egyszerűség kedvéért legyen zérus. Tehát ugyanolyan hullámegyenletet kaptunk a Hertz-vektorra is, mint a vektorpotenciálra:

$$\Delta\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{Z} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}_H \tag{14.69}$$

Most vizsgáljuk meg az elektromos potenciálra vonatkozó hullámegyenletet (14.36):

$$\begin{aligned} \Delta\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \Delta(-\mathrm{div}\mathbf{Z}) + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 (\mathrm{div}\mathbf{Z}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\mathbf{P}_H \\ \mathrm{div}\left(\Delta\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{Z} + \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}_H \right) &= 0, \end{aligned} \tag{14.70}$$

ami (14.69) esetén autómatikusan teljesül. Azaz az elektromos potenciálra vonatkozó hullámegyenlet nem ad új egyenletet.

A (14.69) egyenlet megoldását már ismerjük:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathbf{P}_H(\mathbf{r}',[t])}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV', \tag{14.71}$$

ahol $[t]$ a retardált idő.

Megvan tehát a program, amit végre kell hajtani:

- $\mathbf{Z}$ meghatározása
- $(\mathbf{A},\phi)$ meghatározása
- $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ meghatározása

Azaz

$$\begin{aligned}\mathbf{B}&=\mathrm{rot}\mathbf{A}=\frac{1}{c^2}\partial_t\mathrm{rot}\mathbf{Z}\\ \mathbf{E}&=-\mathrm{grad}\phi-\partial_t\mathbf{A}=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{Z})-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{Z}\\ \mathbf{E}&=\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}-\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}_H\end{aligned} \tag{14.72}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk a (1.6) tételt és a (14.69) egyenletet.

14.1. Feladat (Pontszerű dipólus) *Számoljuk ki egy időben változó pontszerű dipólus terét! Legyen a dipólusunk az origóban:*

$$\mathbf{P}_H(\mathbf{r},[t])=\mathbf{p}([t])\delta(\mathbf{r}) \tag{14.73}$$

A Hertz-vektor (14.71) általános megoldása ismert:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathbf{P}_H(\mathbf{r}',[t])}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'=\frac{\mathbf{p}([t])}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{14.74}$$

Számoljuk ki a mágneses indukciót!

$$\begin{aligned}B_i&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\partial_t\left[\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\frac{\mathbf{p}([t])_k}{r}\right)\right]=\\ &=\frac{\mu_0}{4\pi}\partial_t\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial_j\mathbf{p}([t])_k}{r}+\left(\partial_j\frac{1}{r}\right)\mathbf{p}([t])_k\right\}.\end{aligned} \tag{14.75}$$

A retardált idő miatt $\mathbf{p}([t])$*-nak nem zérus a hely szerinti deriváltja, hiába van az origóban:*

$$\partial_j \mathbf{p}([t])_k = \partial_j \mathbf{p}(t - r/c)_k = -\dot{\mathbf{p}}([t])_k \frac{x_j}{cr}. \tag{14.76}$$

A másik derivált egyszerűbb:

$$\partial_j \frac{1}{r} = -\frac{x_j}{r^3} \tag{14.77}$$

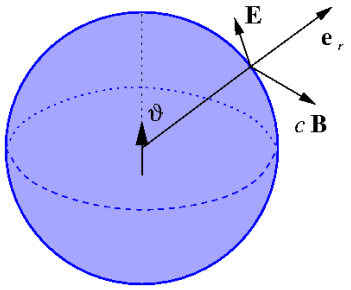
Visszatérve a mágneses indukcióra, miközben a megfelelő tagokat átírjuk keresztszorzatra (1.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \partial_t \left\{ -\frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}([t])}{cr^2} - \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{P}_H(\mathbf{r}, [t])}{r^3} \right\}, \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}([t])}{cr^2} - \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}([t])}{r^3} \right\}. \end{aligned} \tag{14.78}$$

A második tag a szokásos Biot-Savart-tér (11.16). Az első tag viszont egy sugárzási tag, ami a dipólus „gyorsulásából" adódik. Mivel a Biot-Savart tag r^{-2}*-tel cseng le, míg a sugárzásos tag csak* r^{-1}*-gyel ezért a dipólustól távol ez a tag fog dominálni.*

Ez a dipólussugárzás a jól ismert antenna-sugárzás. A mindennapi életben ezt használjuk mindenféle jelek (TV, rádió, internet, telefon, stb.) továbbítására.

14.1.6. Antenna teljesítménye



14.4. ábra. Egy időben változó dipólus által kisugárzott elektromágneses tér komponenseinek ábrázolása.

Vizsgáljuk meg az változó dipólus, azaz az antenna által kisugárzott teljesítményt! A (13.20) egyenletből tudjuk, hogy ehhez a Poynting-vektort kell kiszámolnunk:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{14.79}$$

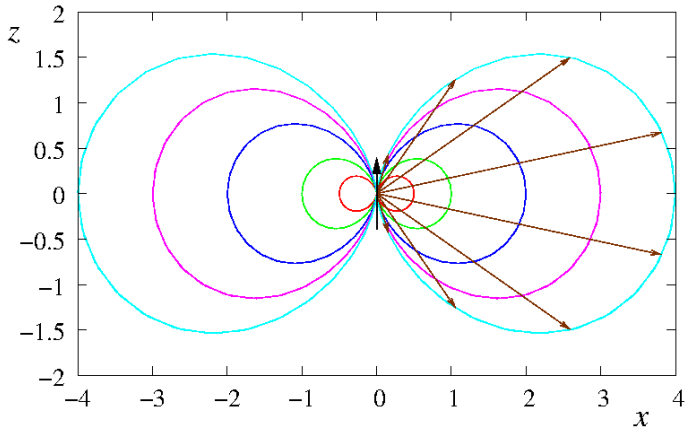
A tudjuk, hogy

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r \tag{14.80}$$

amiből következik (14.4 ábra), hogy $\mathbf{S}||\mathbf{e}_r$. Tehát

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_0} c |\mathbf{B}|^2 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{\mathbf{p}}([t])^2 \sin^2\vartheta \frac{1}{r^2} \tag{14.81}$$

A kisugárzott teljesítmény tehát nem gömbszimmetrikus eloszlású, az antennára merőlegesen nagyobb, míg azzal párhuzamosan nulla (lásd 14.5 ábra).



14.5. ábra. Antenna sugárzási mintázata. A barna nyilak 20 fokos szögenként követik egymást.

A teljes felületen egységnyi idő alatt kisugárzott energiát megkapjuk, ha a Poynting-vektort az egész gömbfelületre integráljuk:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \oint_F \mathbf{S} d\mathbf{F} = \int_0^\pi |\mathbf{S}| 2\pi R^2 \sin\vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi c} \ddot{\mathbf{p}}([t])^2 \int_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{p}}([t])^2 \end{aligned} \tag{14.82}$$

Ez utóbbi kifejezést nevezik a Larmor-formulának.

Fontos speciális alosztály, harmonikusan változó dipólusnál, amikor:

$$\mathbf{p}(t) = \sin(\omega t)\mathbf{p}_0, \tag{14.83}$$

ekkor

$$\ddot{\mathbf{p}}(t)^2 = p_0^2 \omega^4 \sin^2(\omega t) \tag{14.84}$$

Az átlagos kisugárzott teljesítmény (mivel a $\sin^2(\omega t)$ pont 1/2 időátlagban) tehát

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}. \tag{14.85}$$

Tehát a kisugárzott teljesítmény a körfrekvencia negyedik hatványával arányos.

14.2. Elektromágneses hullámok anyagokban

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk az anyag hatását az elektromágneses hullámokra. Csak olyan anyagokkal fogunk foglalkozni, ahol lineáris összefüggéssel le lehet írni az anyag hatását. Az anyagot tehát a következő paraméterekkel jellemezzük:

- vezetőképesség σ:

$$\mathbf{j}_{sz} = \sigma \mathbf{E} \tag{14.86}$$

- relatív dielektromos állandó ε_r:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{14.87}$$

- relatív mágneses permeabilitás μ_r:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \tag{14.88}$$

Forrásmentes esetre írjuk fel a Maxwell-egyenleteket figyelembe véve a fenti összefüggéseket:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{E} &= 0, \\ \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, \\ \mathrm{rot}\mathbf{B} &= \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\varepsilon\partial_t \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{14.89}$$

A szokásos módon vezessük le a hullámegyenleteket:

$$\begin{aligned} \mathrm{rotrot}\mathbf{E} &= -\mathrm{rot}\partial_t \mathbf{B} \\ \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E} &= -\mu\sigma\partial_t \mathbf{E} - \mu\varepsilon\partial_t^2 \mathbf{E} \\ \Delta\mathbf{E} &= \mu\varepsilon\partial_t^2 \mathbf{E} + \mu\sigma\partial_t \mathbf{E} \end{aligned} \tag{14.90}$$

Most tehát egy olyan hullámegyenletet kaptunk, amiben megjelent egy elsőrendű időderivált is. A mágneses indukcióra hasonló adódik:

$$\begin{aligned} \mathrm{rotrot}\mathbf{B} &= \mu\sigma\mathrm{rot}\mathbf{E} + \mu\varepsilon\partial_t \mathrm{rot}\mathbf{E} \\ \Delta\mathbf{B} &= \mu\varepsilon\partial_t^2 \mathbf{B} + \mu\sigma\partial_t \mathbf{B} \end{aligned} \tag{14.91}$$

Azaz a mágneses indukcióra és az elektromos térerősségre ugyanazt az egyenletet kaptuk.

14.2.1. Elektromágneses hullám szigetelőben

Vizsgáljuk meg először a $\sigma = 0$ esetet, azaz az ideális szigetelő esetét, amikor az anyagban nincs semmilyen áram! Ebben az esetben az egyszeres időderiváltat tartalmazó tag eltűnik az egyenletekből:

$$\begin{aligned} \varepsilon\mu\partial_t^2\mathbf{E} &= \Delta\mathbf{E} \\ \frac{1}{c'^2}\partial_t^2\mathbf{E} &= \Delta\mathbf{E}, \end{aligned} \tag{14.92}$$

amiből

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}. \tag{14.93}$$

Általánosságban mind ε_r, és μ_r is frekvenciafüggő, azaz a fény sebessége anyagban függ a frekvenciától is, ami megmagyarázza a fénydiszperzió jelenségét. A valóságban leggyakrabban előforduló anyagok relatív permeabilitása látható fény tartományban 1 körül van, ezért a gyakorlatban legtöbbször elég a dielektromos állandó hatását figyelembe venni.

14.2.2. Síkhullámok anyagban

Írjuk fel még egyszer a csillapított hullámegyenleteket!

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{E} &= \mu\varepsilon\partial_t^2\mathbf{E} + \mu\sigma\partial_t\mathbf{E} \\ \Delta\mathbf{B} &= \mu\varepsilon\partial_t^2\mathbf{B} + \mu\sigma\partial_t\mathbf{B} \end{aligned} \tag{14.94}$$

A csillapított oszcillátornál (6.2.3 fejezet) már használtuk azt a módszert, hogy komplex számok felett kerestük a megoldást, aminek a valós része a mérhető fizikai mennyiség. Mivel a két egyenlet teljesen azonos ezért a számolást csak az elektromos térerősségre fogjuk végigvinni. A komplex elektromos téresősség tehát:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = (\tilde{E}_1(\mathbf{r},t), \tilde{E}_2(\mathbf{r},t), \tilde{E}_3(\mathbf{r},t)) \tag{14.95}$$

Próbálkozzunk szorzat alakban keresni a megoldást:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\tilde{\theta}_E(t) \tag{14.96}$$

Könnyen belátható, hogy

$$\tilde{\theta}_E(t) = e^{-i\omega t} \tag{14.97}$$

megoldása (14.94) egyenletnek:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t} &= -\mu\varepsilon\omega^2\tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t} - i\omega\mu\sigma\tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t} \\ \Delta\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= -(\underbrace{\mu\varepsilon\omega^2 + i\omega\mu\sigma}_{=\tilde{\mathbf{k}}^2})\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{14.98}$$

Itt bevezettük a komplex hullámszámot. Ezt úgy kell tekinteni, mint egy irány-egységvektor, aminek van egy komplex szorzója. A fenti egyenletből megkapjuk a síkhullám megoldást, de most komplex hullámszámmal:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{\mathbf{k}}\mathbf{r}-\omega t)} \tag{14.99}$$

Hasonló alakot vesz fel a mégneses indukció is

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{\mathbf{k}}\mathbf{r}-\omega t)} \tag{14.100}$$

A vákuumos esethez hasonlóan itt is vizsgáljuk meg a különböző vektorok egymáshoz képesti viszonyát, úgy hogy a komplex hullámszámos síkhullám megoldás beírjuk a (14.89) forrásmentes anyagi Maxwell-egyenletekbe! Az első Maxwell-egyenlet

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\tilde{\mathbf{E}} &= 0 \\ i\tilde{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{E}}_0 &= 0, \end{aligned} \tag{14.101}$$

amiből megkapjuk a hullámszám (terjedési irány) és az elektromos téresősség merőlegességét. Tehát

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 \perp \tilde{\mathbf{k}} \tag{14.102}$$

A második Maxwell-egyenletből hasonlóan megkapjuk, hogy

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 \perp \tilde{\mathbf{k}} \tag{14.103}$$

Most harmadik Maxwell-egyenletet vizsgáljuk meg

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\tilde{\mathbf{E}} &= -\partial_t \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 &= \omega \tilde{\mathbf{B}}_0 \end{aligned} \tag{14.104}$$

A negyedik Maxwell-egyenletből pedig

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\tilde{\mathbf{B}} &= \mu\sigma\tilde{\mathbf{E}} + \mu\varepsilon\partial_t\tilde{\mathbf{E}} \\ i\tilde{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{B}}_0 &= (\mu\sigma - i\omega\mu\varepsilon)\tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \omega\tilde{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{B}}_0 &= (\omega^2\mu\varepsilon - i\mu\sigma\omega)\tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \omega\tilde{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{B}}_0 &= \tilde{\mathbf{k}}^2\tilde{\mathbf{E}}_0 \end{aligned} \tag{14.105}$$

Tehát most is megkaptuk, hogy a $(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{B}}_0)$ merőlegesek egymásra, jobbsodrású rendszert alkotnak egymással, a mágneses indukció és az elektromos térerősségének nagysága közötti összefüggés pedig:

$$|\tilde{\mathbf{k}}||\tilde{\mathbf{E}}_0| = \omega|\tilde{\mathbf{B}}| \tag{14.106}$$

14.2.3. Komplex hullámszám

Vizsgáljuk meg a komplex hullámszámvektort!

$$\tilde{k} = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - i\mu\sigma\omega} \tag{14.107}$$

Szokás még a következő alakba is írni:

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}} \tag{14.108}$$

Bontsuk fel a hullámszámvektort valós és képzetes részre:

$$\tilde{k} = k' + ik'' \tag{14.109}$$

Válasszuk a következő koordinátarendszert:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_E &= \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_B &= \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_k &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{14.110}$$

Ekkor az elektromos térerősség (14.99) a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r},t)e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \\ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r},t)e^{i(k'z-\omega t)}e^{-k''z} \end{aligned} \tag{14.111}$$

A fizikailag releváns mennyiség ennek valós része. Az $\exp(-k''z)$ tag miatt ez exponenciálisan csökken (lásd 14.6). Azaz ha a vezetőképesség nem zérus, akkor az anyagban gyengül az elektromágneses hullám. Erre a gyengülésre még majd visszatérünk.

A komplex számokat lehet Euler-alakba is írni:

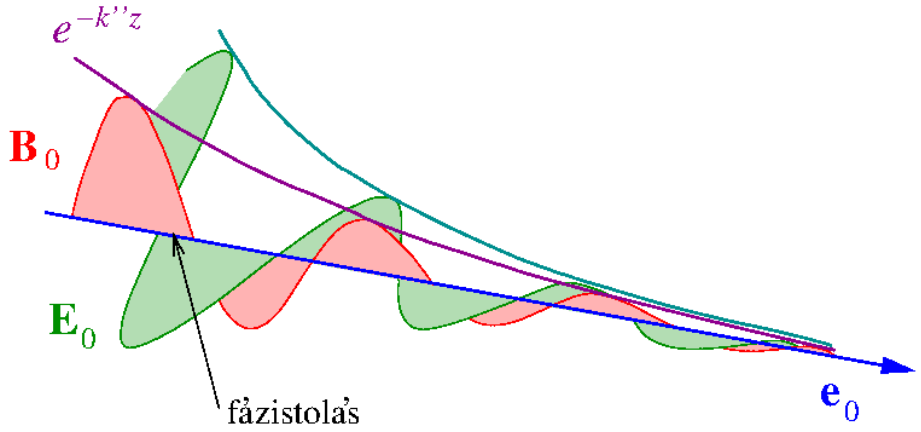
$$\tilde{k} = |k|e^{i\delta} \tag{14.112}$$

Megtatározható k és δ (a részleteket most nem közöljük):

$$\begin{aligned} k &= \frac{\omega}{c}\sqrt[4]{\varepsilon_r^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}} \\ \delta &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0\omega}\right) \end{aligned} \tag{14.113}$$

Vizsgáljuk meg δ hatását! Tudjuk, hogy

$$\tilde{k}\tilde{E}_0 = \omega\tilde{B}_0 \tag{14.114}$$



14.6. ábra. Síkhullám anyagban.

Amiből

$$\tilde{E}_0 \frac{|\tilde{k}|}{\omega} e^{i\delta} = \tilde{B}_0 \tag{14.115}$$

Tehát a δ a mágneses indukció és az elektromos térerősség közötti fázistolást jellemzi. A 14.6 ábrán bemutatjuk a fázistolást is.

Fontos megjegyezni, hogy ha az anyag nem vezető, akkor nincs fázistolás.

Szokás definiálni a törésmutatót, ami az anyagbeli és a vákuumbeli fénysebesség hányadosa. Ha $\sigma = 0$, akkor

$$n = \frac{c'}{c} = \frac{k}{\omega} c = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \tag{14.116}$$

Azonban ha $\sigma > 0$, akkor a törésmutató is komplex lesz:

$$\tilde{n} = \frac{\tilde{k}}{\omega} c = \sqrt[4]{\varepsilon_r^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}}\, e^{i\delta} \tag{14.117}$$

14.2.4. Behatolási mélység

Bármilyen vezető anyagban ($\sigma > 0$) az elektromágneses hullám amplitúdója exponenciálisan csillapodik. Az exponenciális lecsengés egy hosszat definiál, amit behatolási mélységnek nevezünk. A (14.111) egyenlet alapján az exponenciális lecsengésből megkapható a behatolási mélység:

$$d = 1/k'' \tag{14.118}$$

Bár k'' meghatározható, de bonyolult. Érdemes viszont a két határesetet megvizsgálni: a rossz és jó vezető határesetet.

Behatolási mélység: Rossz vezető

Rossz vezetőről akkor beszélünk, ha

$$\sigma \ll \varepsilon_0 \omega \tag{14.119}$$

Ekkor (14.108) egyenet alapján

$$k'' = \mathrm{Im}\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1+i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}}\right) \simeq \mathrm{Im}\left[\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\left(1+i\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)\right] =$$
$$= \frac{\sigma\sqrt{\varepsilon_r}}{2c\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \tag{14.120}$$

Tehát a behatolási mélység:

$$d = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \tag{14.121}$$

Behatolási mélység: Jó vezető

Jó vezetőről akkor beszélünk, ha

$$\sigma \gg \varepsilon_0 \omega \tag{14.122}$$

Ekkor (14.108) egyenlet alapján

$$k'' = \mathrm{Im}\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1+i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}}\right) \simeq \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\sigma\mu_0} \tag{14.123}$$

Amiből a behatolási mélység:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu_0}} \tag{14.124}$$

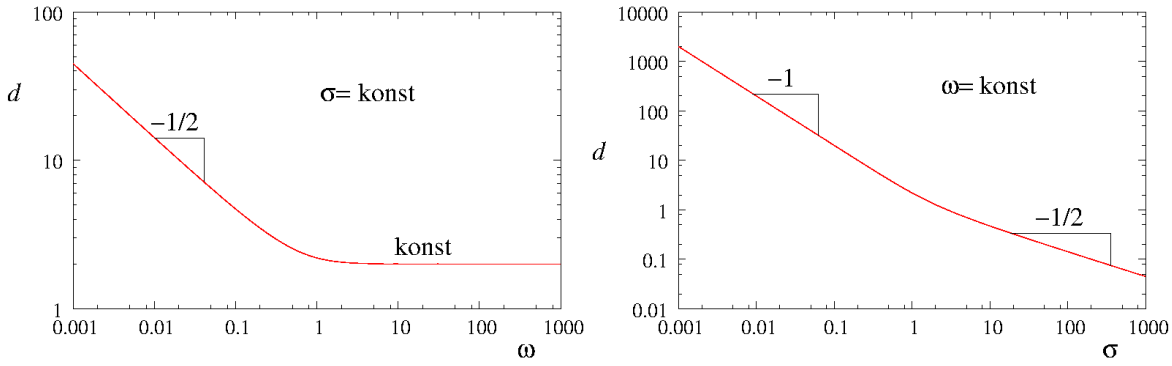
Ha a vezetőképesség nagy, akkor a behatolási mélység nagyon kicsi is lehet. Ezt hívjuk skin-effektusnak. A két határesetet a 14.7 ábrán ábrázoljuk.

14.3. Szórás

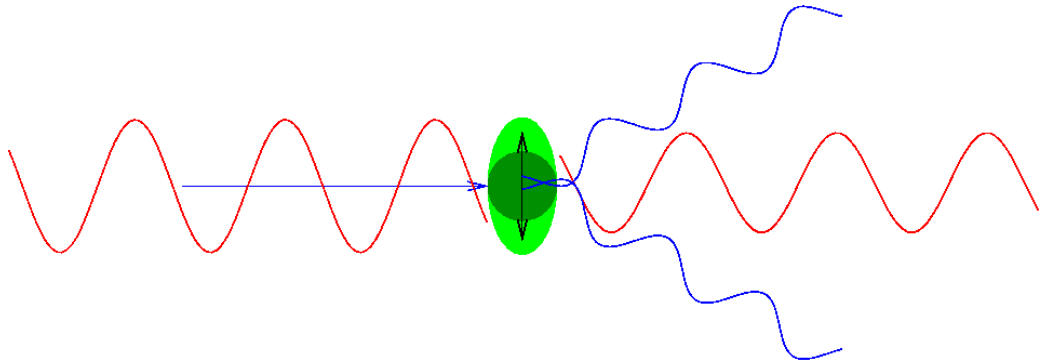
Eddig kontínuum anyagokkal foglalkoztunk, most megvizsgáljuk milyen hatással van egy klasszikusan leírt atomra az elektromágneses hullám. Az elektromágneses hullám elektromos tere ugyanis kölcsönhat a töltésekkel, azokra erőt fejt ki. A periodikus amplitúdóváltozás miatt a töltés rezegni kezd, azaz gyorsulással fog rendelkezni (lásd 14.8 ábra). A Hertz-sugárzásból tudjuk, hogy ilyenkor energiájának egy részét a rezgő töltés kisugározza (14.85):

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{14.125}$$

A következőkben megvizsgáljuk a szabad és kötött elektronok szórását. Analízisünk során a mágneses kölcsönhatásoktól eltekintünk, hiszen azok mindig sokkal gyengébbek.



14.7. ábra. A behatolási mélység ω és σ függvényében. A görbék az egzakt alakot mutatják.



14.8. ábra. Elektromágneses hullám szórása töltött részecskén.

14.3.1. Szabad elektron szórás: Thomson-hatáskeresztmetszet

Vizsgáljunk egy szabad elektront egy ω körfrekvenciájú harmonikus síkhullámban. Írjuk fel az elektron gyorsulását az elektromos erő hatására:

$$m\ddot{x} = -eE_0 \cos(kx - \omega t) \tag{14.126}$$

Amiből

$$x = \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(kx - \omega t) \tag{14.127}$$

Ebből megkaphatjuk a rezgő elektron dipolmomentumának nagyságát:

$$p_0 = -ex_0 = -\frac{e^2 E_0}{m\omega^2} \tag{14.128}$$

Tehát a kisugárzott teljesítmény (14.85):

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 m^2} \tag{14.129}$$

Ahol a körfrekvencia kiesett így a kisugárzott teljesítmény frekvenciafüggetlen.

A besugárzott teljesítményt meg lehet kapni, ha kiszámoljuk egy elektromágneses hullám Poynting-vektorát:

$$\langle \mathbf{S}_{\mathrm{be}} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \tag{14.130}$$

A hatáskeresztmetszet a kisugárzott és a bejövő teljesítmény hányadosa:

$$\sigma_T = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\langle \mathbf{S}_{\mathrm{be}} \rangle} = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 m^2} \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2} \right)^2 \tag{14.131}$$

Ez a Thomson-hatáskeresztmetszet.

Érdemes néhány megjegyzést tenni a fenti eredményről.

- A kapott hatáskeresztmetszet frekvenciafüggetlen. A környező világban az elektronok szinte mindig kötöttek, és jól láthatóan frekvenciafüggő a szórás (pl. kék ég)
- A zárójelben lévő tagot klasszikus elektronsugárnak hívjuk:

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m} \tag{14.132}$$

  Alakítsuk tá a fenti kifejezést!

$$r_0 = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \right) \left(\frac{1}{c^2 m} \right) \tag{14.133}$$

  Jól láthatóan ez két tagból áll az egyik egy elektromos energia, a másik a jól ismert mc^2:

$$mc^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{r_0} E^2 dV', \tag{14.134}$$

  azaz a klasszikus elektronsugár az a távolság, amin belül az elektromos tér energiája egyenlő az elektron tömegéből származó energiával.

14.3.2. Kötött elektron szórás: Rayleigh-hatáskeresztmetszet

A szabad elektron szórás sajnos nem írja le jól az atomokon szóródott elektromágneses hullám hatáskeresztmetszetét. Írjuk le a pályán mozgó elektront csillapított rezgőmozgással:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 = -\frac{e}{m} E_x(t) \tag{14.135}$$

Ismét harmonikus elektromágneses síkhullámot feltételezve:

$$E_x(t) = E_0 e^{i\omega t} \tag{14.136}$$

A megoldást ismerjük (6.2.3 fejezet):

$$x(t) = \tilde{x}_0 e^{i\omega t} \tag{14.137}$$

Amiből

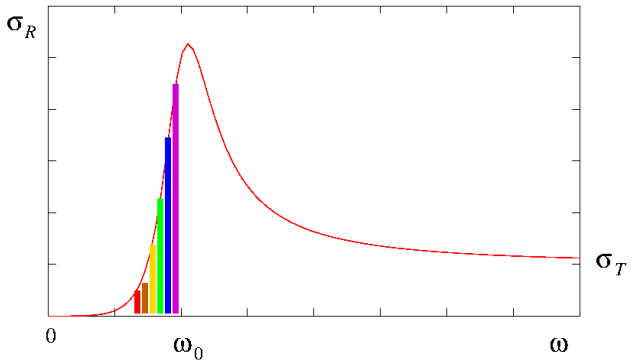
$$\tilde{x}_0(-\omega^2 + \omega_0^2 + i2\alpha\omega) = -\frac{e}{m}E_0 \tag{14.138}$$

Azaz

$$\tilde{x}_0 = -\frac{E_0 e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\alpha\omega} = x_0 e^{-i\delta} \tag{14.139}$$

Amiből az előzőekhez hasonlóan meghatározzuk a dipólmomentum amplitúdóját, kihasználva a 6.2.3 fejezet eredményeit:

$$p_0 = -\underbrace{\frac{e^2 E_0}{m\omega^2}}_{\text{korábbi eredmény}} \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \tag{14.140}$$



14.9. ábra. A Rayleigh-hatáskeresztmetszet frekvenciafüggése. A színes csíkok a látható fény körülbelüli helyét mutatják.

Jól megfigyelhető, hogy a négyzetgyökjel alatti tag miatt most megjelenik a frekvenciafüggés. A hatáskeresztmetszet tehát:

$$\sigma_R = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\langle \mathbf{S}_{\text{be}} \rangle} = \underbrace{\frac{8\pi}{r} r_0^2}_{=\sigma_T} \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \tag{14.141}$$

A 14.9 ábrán megmutatjuk a fenti formulát. A Thomson-hatáskeresztmetszet $\omega \to \infty$ határesetben kapjuk vissza. Nagy frekvenciákon tehát nem látszik a pálya hatása. A fenti

képlet megmagyarázza a látható fényben létrejövő szórásjelenségeket is, mint például a kék eget. A látható fény a görbe emelkedő szakaszára esik, azaz a nagyobb frekvenciájú (kék) fény szóródik jobban.

Tárgymutató

centripetális gyorsulás, 18, 19

dinamika, 21
Dirac-delta, 7, 56, 57
divergencia, 7, 75

egyensúlyi helyzet, 26
energia
    kinetikus, 24, 43, 44, 64
    mechanikai, 26, 53
    megmaradás, 24, 26
    potenciális, 25, 30, 43, 44
erőtér, 23

főtengely-rendszer, 67, 81, 84
feszültség
    húzó, 83
    nyíró, 83
    tenzor, 82
forgatónyomaték, 28
Fourier-transzformáció, 9

görbületi sugár, 19
gradiens, 7, 25
Green-függvény, 54

Harmónikus oszcillátor, 47
    alulcsillapítás, 50
    gerjesztett, 53
    határcsillapítás, 50
    túlcsillapítás, 49
helyvektor, 16, 78
Hooke-törvény, 84

idő, 16

kinematika, 16, 77
klasszikusan megengedett tartomány, 26
konvolúció, 14, 56
konzervatív erőtér, 26

Levi-Civita szimbólum, 6, 64
lineáris, 48
    függvény, 47
    rendszer, 47, 54

mérlegegyenlet, 73, 89
merev test, 60
munka, 24
munkatétel, 24, 53

Newton törvények
    I, 22, 33
    II, 17, 22, 23, 28, 29, 48, 86
    III, 22, 36
    IV, 22

pörgettyű, 61
perdület, 28, 62

rotáció, 7

sajátérték, 66, 69
szögsebesség, 18
    vektor, 18, 62
szubsztanciális derivált, 77, 89, 92

tömegpont, 22, 36
    perdület, 28
    rendszer, 60
tenzor, 6, 63, 84

deformáció, 80, 84
derivált, 78
feszültség, 82, 84
tehetetlenségi, 63, 67
torzió, 20

Irodalomjegyzék

[1] Wikipedia, *Kúpszelet*, http://hu.wikipedia.org/wiki/Kúpszelet.

[2] Wikipedia, *Molecular dynamics*, http://en.wikipedia.org/wiki/Molecular_dynamics.

[3] Wikipedia, *Convolution*, http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution.

[4] Wikipedia, *Euler-képlet*, http://hu.wikipedia.org/wiki/Euler-képlet.

[5] Wikipedia, *Tacoma Narrows Bridge (1940)*, http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940).

[6] Wikipedia, *Euler angles*, http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles.

[7] Mike Birse *Stability of free rotation* http://www.ph.man.ac.uk/~mikeb/lecture/pc167/rigidbody/stability.html

[8] Wikipedia, *Gauss–Osztrogradszkij-tétel*, http://hu.wikipedia.org/wiki/Gauss\T1\textendashOsztrogradszkij-tétel.

[9] Wikipedia, *Diffusion equation*, http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_equation.

[10] Wikipedia, *Wheeler–Feynman absorber theory*, http://en.wikipedia.org/wiki/Wheeler\T1\textendashFeynman_absorber_theory.