

Mechanika

előadásjegyzet

1. Alapfogalmak

Tekintsünk egy A pontsokaságot és tételezzük fel, hogy létezik egy n -dimenziós V_n vektortér úgy, hogy minden $(M, N) \in A \times A$ rendezett pontpárnak megfeleltethetünk egy, a V_n vektortérbeli $\mathbf{v} = \overrightarrow{MN}$ vektort a következő feltételekkel

1. $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$
2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$ minden $P \in A$ esetén
3. Minden rögzített $O \in A$ esetén, minden $\mathbf{v} \in V_n$ vektorhoz létezik egy és csak egy $M \in A$ úgy, hogy $\overrightarrow{OM} = \mathbf{v}$

A felsorolt tulajdonságokkal bíró A pontsokaságot n -dimenziós affin térnek hívjuk és A_n -nel jelöljük. Ha a megfeleltetett vektortér E_n euklideszi tér, a megfelelő affin teret R_n euklideszi ponttérnek nevezzük. Az R_n euklideszi ponttérben értelmezhetjük két, M és N pont távolságát úgy mint a két ponthoz rendelt E_n térbeli \overrightarrow{MN} vektor $|\overrightarrow{MN}|$ normáját, amit az E_n térben definiált skalárszorzattal definiálunk: $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN}}$

A klasszikus, nem relativisztikus mechanika tanítása szerint világunk eseményei egy egydimenziós R_1 és egy háromdimenziós R_3 euklideszi ponttér $R = R_1 \times R_3$ direkt szorzatterében (világ) írható le. Egy $O_1 \in R_1$ (kezdő) időpont és az R_1 térhez rendelt E_1 vektortér \mathbf{e}_t báziselemének, valamint egy $O_3 \in R_3$ pont (origó), és az R_3 térhez rendelt E_3 vektortér egy $\{\mathbf{e}_i\}$, ($i = 1, 2, 3$) bázisrendszerének rögzítésével egy ún. vonatkoztatási rendszert vezetünk be. A vonatkoztatási rendszer bevezetése minden $P \in R$ ponthoz (világpont, esemény) négy számot: t, x^1, x^2, x^3 (egy idő és három térkoordinátát) rendel.

Azt mondjuk, hogy két olyan esemény, amelynek t koordinátája megegyezik egyidejű. Beszélhetünk két egyidejű esemény (világpont) egymástól mért távolságáról, amit a megfelelő R_3 térbeli pontok távolságaként értelmezünk.

Alapfogalomnak tekintjük a tömegpont vagy másnéven anyagi pont fogalmát, ami a fizikai testek mozgásáról szerzett tapasztalatok közül kettőt jelenít meg: a tömegpontnak helye és tömege van. Az első tulajdonság szerint minden tömegponthoz hozzárendelhető egy $P(t) : R_1 \mapsto R$, ($t \in (-\infty, +\infty)$) folytonos leképezés, azaz létezik a $P(t)$ görbe (világvonal) az R térben.

A második tulajdonság szerint a tömegponthoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy $m (> 0)$ valós számot (tömeg), amelynek értéke a más testekkel, erőtterekkel történő kölcsönhatásokban nyilvánul meg.

A $P(t)$ görbe rögzített vonatkoztatási rendszerben egyben kijelöl egy $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r} \in E_3$, ($\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3$) függvényt az E_3 térben is. Az \mathbf{r} vektort szokás a tömegpont helyvektorának nevezni, ami nyilvánvalóan függ a vonatkoztatási rendszertől. Az

$\mathbf{r}(t)$ függvény ugyanakkor kijelöl egy $P_3(t)$ görbét az R_3 térben is, amit a tömegpont pályájának nevezünk. A $P_3(t)$ pont deriváltját az $\mathbf{r}(t)$ vektor $\mathbf{v}(t) \in E_3$ deriváltjaként definiáljuk, ha létezik. Ezt a tömegpont sebességvektorának nevezzük. Jelölésben:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t).$$

A \mathbf{v} sebességvektor deriváltja az \mathbf{a} gyorsulásvektor:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Bevezetjük a tömegpont impulzusának vagy mozgásmennyiségének a vektorát:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Newton első törvénye azt a tapasztalatot rögzíti, hogy mindig lehet találni olyan vonatkoztatási rendszert, amelyben a más objektumokkal kölcsönhatásban nem álló tömegpontok \mathbf{p} impulzusa állandó. Mivel a kölcsönhatásban nem álló tömegpontok m tömege állandó, ez azt jelenti, hogy a sebességvektorok értéke állandó. Az ilyen vonatkoztatási rendszert Galilei-féle vagy inercia rendszernek nevezzük. Ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ állandó, akkor az \mathbf{r} helyvektor a t időnek lineáris függvénye kell legyen:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

A szokásos megfogalmazás szerint, inercia rendszerben a magára hagyott tömegpontok egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek, gyorsulásvektoruk nullvektor.

Ha egy tömegpont kölcsönhatásba lép más tömegpontokkal (fizikai objektumokkal), azt mondjuk, hogy erők hatnak rá, aminek következtében az \mathbf{a} gyorsulásvektor nem tűnik el. Az erők a tapasztalatok szerint, szintén E_3 térbeli vektorok és ha pl. egy tömegpontra egyidőben több erő hat, azok hatása a tömegpont mozgására olyan mint a vektori összegükből képzett erő hatása.

Newton második törvénye szerint inercia rendszerben a tömegpontra ható erők \mathbf{F} eredő vektorára fennáll az általában Newton-egyenletnek, vagy mozgásegyenletnek nevezett összefüggés:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \text{ azaz } \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}).$$

Ha a tömegpont m tömege állandó, amit a nemrelativisztikus mechanikában feltételezünk, akkor

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a}. \quad (1)$$

A tapasztalatok szerint a tömegpontra ható \mathbf{F} erő csak a helytől, sebességtől és az időtől függő, kísérleti úton meghatározandó függvény: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, aminek következtében a mozgásegyenlet közönséges, másodrendű differenciálegyenlet.

A differenciálegyenletek elmélete szerint az ilyen egyenletek általános megoldása mindig tartalmaz két szabadon választható konstans vektort, amelyek az \mathbf{r}_0 kezdeti hely- és a \mathbf{v}_0 kezdeti sebességvektorral hozhatók összefüggésbe.

Elemi példa a homogén (pl. gravitációs) erőtér esete, ahol $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ konstans. A mozgásegyenlet megoldása:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0,$$

ahol \mathbf{v}_0 és \mathbf{r}_0 a kezdeti ($t = 0$ időpontbeli) sebesség- és helyvektorok.

Másik fontos példa az ún. centrális erőtér esete, amelyben az \mathbf{F} erőfüggvény $\mathbf{F} = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ alakú, azaz az erő támadásvonala átmegy az O_3 origón és nagysága csak az origótól mért $r = |\mathbf{r}|$ távolságtól függ. A megoldás, az $F(r)$ függvény több speciális alakjánál, ebben az esetben is előállítható. A részletesebb számításokra a bolygómozgás tárgyalásánál térünk vissza.

2. Mozgás egy dimenzióban

Ha a tömegpont mozgása egy egyenes mentén történik, elegendő az R_3 tér helyett egy, a mozgás egyenesére illesztett egydimenziós R_1 teret használnunk és a mozgást egy $R = R_1 \times R_1$ alakú ponttérben leírunk. A tömegpont helyét a t időpontban az x koordináta segítségével adjuk meg. A mozgásegyenlet ebben az esetben:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t),$$

aminek a megoldása általában nem adható meg zárt alakban. Vannak azonban olyan speciális esetek, amelyekben az egyenlet kvadratúrával megoldható.

1. Fontos esete az egydimenziós mozgásnak, amikor az erőfüggvény csak az időtől függ. Ekkor a mozgásegyenlet kétszeri integrálással oldható meg:

$$m\ddot{x} = F(t).$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') dt' + v_0,$$

$$x = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t''} F(t') dt' dt'' + v_0(t - t_0) + x_0.$$

Erre az esetre egyszerű példa a függőleges hajítás, amikor $F = mg$ és így

$$x = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0.$$

2. Ha az erőfüggvény csak a $v = \dot{x}$ sebességtől függ, azaz $F = F(v)$, akkor a mozgásegyenlet $v(t)$ -re nézve elsőrendű szeparábilis differenciálegyenletté válik:

$$m\dot{v} = F(v).$$

A megoldás a szokásos módon történhet, azaz átrendezve

$$1 = \frac{m\dot{v}}{F(v)}$$

és integrálva t_0 -tól t -ig kapjuk, hogy

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t \frac{m \dot{v}(t') dt'}{F(v(t'))},$$

azaz ha v_0 jelöli a sebesség értékét t_0 -ban,

$$t = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{m dv'}{F(v')}.$$

Az erőfüggvény ismeretében az integrálás elvégezhető, ami a sebesség idő szerinti függvényének inverz függvényét eredményezi. A hely a sebességfüggvény további integrálásával áll elő, ahol x_0 jelöli a hely értékét t_0 -ban:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt'.$$

Példaként vizsgáljuk meg a ρ sűrűségű viszkózus közegben saját G súlya hatása alatt eső gömb mozgását. A Stokes-féle hidrodinamikai ellenállástörvény szerint az r sugarú gömbre ható súrlódási erő arányos a sebességgel: $F_S = -kv$, ahol $k = 6\pi\eta r$ és η a közeg belső súrlódási együtthatója. Ha G' -vel az állandó $G = mg$ súlyerő és $F_f = \frac{4r^3\pi\rho g}{3}$ felhajtó erő $G' = G - F_f$ különbségét jelöljük, akkor az F eredő erő:

$$F(v) = G' - kv.$$

A megoldás a fenti recept szerint:

$$t = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{m dv'}{G' - kv'}.$$

Elvégezve az integrálást

$$t = t_0 - \frac{m}{k} \ln \left(\frac{G' - kv}{G' - kv_0} \right).$$

Fejezzük ki a sebességet

$$v = \frac{G'}{k} + \left(v_0 - \frac{G'}{k} \right) \exp \left(\frac{k}{m} (t_0 - t) \right),$$

amit az idő szerint integrálhatunk. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a $t_0 = 0$ időpontban a kezdősebesség $v_0 = 0$, ekkor

$$v = \frac{G'}{k} \left(1 - \exp \left(-\frac{k}{m} t \right) \right).$$

Idő szerint integrálva $t_0 = 0$ -tól t -ig

$$x = x_0 + \frac{G'}{k} t + \frac{G' m}{k^2} \exp \left(-\frac{k}{m} t \right) - \frac{G' m}{k^2},$$

ahol x_0 a kezdeti helykoordináta.

3. Az egydimenziós mozgás talán legfontosabb speciális esete, amikor az erőfüggvény csak az x helykoordinátától függ, tehát $F = F(x)$. Ekkor a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Szorozzuk meg az egyenlet két oldalát \dot{x} -tal és vegyük észre, hogy a bal oldalon teljes derivált áll:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = \dot{x} F(x).$$

Állítsuk elő az erőfüggvény primitív függvényét, ami a fizikailag előforduló esetek modelljeinél mindig létezik. A fizikában használatos konvenció szerint ennek ellenétjét jelöljük U -val:

$$U(x) = - \int_{x'}^x F(y) dy.$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy az erőfüggvény előállítható az U függvényből:

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx}.$$

Az U primitív függvény csak egy konstans erejéig van meghatározva, ami az x' értékének megválasztásától függ. Ennek a konstansnak a megválasztása lényegében tetszőleges lehet, mivel a deriválás során az erőfüggvényből kiesik, így nem befolyásolja a megoldást. Értékét általában a számítások egyszerűsítését célzó módon szokás rögzíteni.

A fenti egyenlet jobb oldalán álló $\dot{x}F(x)$ tag egyenlő $-\frac{d}{dt}U$ -val és így a két deriváltat egy oldalra rendezve és közös deriválás alá hozva kapjuk, hogy:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \right) = 0.$$

A zárójelben álló kifejezés ezek szerint egy időtől nem függő E konstanssal egyenlő:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E.$$

Az első tagot kinetikus (mozgási), a másodikat potenciális (helyzeti) energiának hívjuk. Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a kinetikus és potenciális energia összege, amit a tömegpont teljes E energiájának hívunk, a mozgás során állandó, ún. megmaradó mennyiség.

Az utóbbi egyenlet ugyanakkor a helykoordinátára nézve egy elsőrendű, szeparábilis differenciálegyenlet, ami megfelelő átrendezés után látszik:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))},$$

azaz

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} = 1.$$

Integrálva a két oldalt t_0 -tól t -ig

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x} dt'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x(t')))}} = t - t_0.$$

Elvégezve a helyettesítéssel integrálást, a megoldást implicit alakban kapjuk, ahol x_0 a tömegpont helye a t_0 időpontban:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\xi))}}.$$

Példaként oldjuk meg a D direkción erejű rugóra erősített m tömegű tömegpont mozgásegyenletét:

$$m\ddot{x} = -Dx.$$

A potenciális energia:

$$U(x) = \int_{x'}^x D\xi d\xi = \frac{1}{2}Dx^2 - \frac{1}{2}Dx'^2.$$

A potenciális energia definíciójában szerepelő x' integrálási határt válasszuk $x' = 0$ -nak, azaz a potenciális energia értékét $x = 0$ -nál választjuk nullának:

$$U(x) = \frac{1}{2}Dx^2.$$

A mozgásegyenlet megoldása:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2}D\xi^2)}}.$$

Az integrál a $\zeta = \sqrt{\frac{D}{2E}}\xi$ helyettesítéssel az alábbi alakra hozható

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{D}} \int_{\sqrt{\frac{D}{2E}}x_0}^{\sqrt{\frac{D}{2E}}x} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Elvégezve az integrálást:

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{D}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{D}{2E}}x \right) - \arcsin \left(\sqrt{\frac{D}{2E}}x_0 \right) \right],$$

x kifejezhető:

$$x = A \sin(\omega t + \delta),$$

ahol az amplitúdó $A = \sqrt{\frac{2E}{D}}$, a körfrekvencia $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ és a kezdő fázisszög $\delta = -\omega t_0 + \arcsin \left(\sqrt{\frac{D}{2E}}x_0 \right)$.

3. Rezgések egy dimenzióban

Az előző fejezetben láttuk az ideális rugóra erősített tömegpont mozgásegyenletének megoldását, amikor semmi más hatás nem zavarta meg a mozgást. A reális helyzetekben azonban, a rugó erején kívül más, általában a mozgást akadályozó, csillapító erők is fellépnek, amit a legegyszerűbben úgy vehetünk figyelembe ha a sebességgel arányos nagyságú, azzal ellentétes irányú $-k\dot{x}$ erőt alkalmazunk. Szintén fontos lehetőség, hogy egy külső, időfüggő $F(t)$ erő is hathat a tömegpontra, amely folyamatos gerjesztést jelent a mozgás számára. Ennek a két további erőnek a figyelembe vételéhez a mozgásegyenletet az alábbi módon kell kiegészíteni:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F(t).$$

Az egyenlet megoldásának első lépéseként azt a differenciálegyenletek elméletében szokásos alakra rendezzük:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (2)$$

ahol a következő jelöléseket vezettük be: $2\alpha = \frac{k}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$, $f(t) = \frac{F(t)}{m}$.

A (2) egyenlet közönséges, másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, aminek általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként kapjuk meg. Keressük meg először a homogén egyenlet általános megoldását:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3)$$

A matematikai analízis tanítása szerint az ilyen típusú egyenlet megoldásait exponenciális függvények formájában kell keresni: $x = A \exp(\lambda t)$, ahol A és λ két konstans. Behelyettesítve a próbafüggvényt azt kapjuk, hogy

$$\lambda^2 A \exp(\lambda t) + 2\alpha\lambda A \exp(\lambda t) + \omega_0^2 A \exp(\lambda t) = 0.$$

Kiemelve a közös tényezőket a

$$(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2) A \exp(\lambda t) = 0$$

alakra jutunk. Az exponenciális függvény sehol nem tűnik el, ezért a szorzat akkor lehet csak nulla, ha az első tényező nulla, vagyis:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (4)$$

Ez a feltétel a λ ismeretlen paraméter számára egy másodfokú egyenletet jelent, aminek a megoldásai:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

A mozgásegyenletnek tehát általában két független, partikuláris megoldása van, amik az egyenlet ún. alaprendszerét képezik:

$$x_1(t) = \exp(\lambda_1 t), \quad x_2(t) = \exp(\lambda_2 t).$$

Az alaprendszer függvényeinek lineáris kombinációja adja az általános megoldást:

$$x(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (5)$$

ahol A_1 és A_2 állandók. Az $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ kezdeti feltételekhez történő illesztés feltétele, a következő egyenletrendszer kielégítését teszi szükségessé:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= x_0, \\ A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 &= v_0, \end{aligned}$$

aminek megoldása:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ A_2 &= \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned}$$

A (3) differenciálegyenletnek a fenti kezdeti feltételekhez illesztett partikuláris megoldása így:

$$x(t) = \frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(\lambda_1 t) + \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_2 t). \quad (6)$$

A csillapodást jellemző α értéke soha nem lehet negatív, így $\lambda_{1,2}$ első tagjának értéke soha sem pozitív. A diszkrimináns előjele attól függ, hogy az α és a rugót jellemző, szintén pozitív ω_0 értéke hogyan viszonylik egymáshoz.

1. Ha a csillapítás kicsi, azaz $\alpha < \omega_0$, a (4) egyenlet megoldásai komplex számok lesznek:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\omega,$$

ahol bevezettük az $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ jelölést. Mivel λ_1 és λ_2 egymás komplex konjugáltjai, a (6)-ben megjelenő két tag is egymás komplex konjugáltja, amivel

$$x(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(\lambda_1 t) \right].$$

Bevezetve a $2 \frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = A \exp(i\delta)$ jelölést, ahol A és δ valós, azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = \operatorname{Re} [A \exp(-\alpha t + i\omega t + i\delta)] = A \exp(-\alpha t) \cos(\omega t + \delta).$$

A kapott mozgás harmonikus rezgés, aminek az amplitúdója exponenciálisan csökken. A T rezgésidőt úgy állapíthatjuk meg, hogy megnézzük, mennyi idő alatt változik a fázis 2π értékkel:

$$\omega t + \delta + 2\pi = \omega(t + T) + \delta,$$

amiből

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

és a rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Egy t időpontbeli és egy $-T$ rezgésidővel későbbi $-t + T$ időpontbeli kitérések hányadosa:

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \exp(\alpha T).$$

Ezt az értéket csillapodási hányadosnak nevezzük. Szokás a csillapodási hányados logaritmusát használni a csillapodás jellemzésére:

$$\ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \alpha T,$$

aminek a neve logaritmikus dekrementum.

2. Ha a csillapítás nagy, azaz $\alpha > \omega_0$, a λ_1 és λ_2 megoldások értéke két különböző negatív valós szám, ami azt jelenti, hogy a megoldásfüggvény két, időben csökkenő exponenciális függvény összege, ami nem mutat periodikus viselkedés. A kezdő feltételektől függő első kilendülés után a tömegpont az origóhoz közeledik.

Speciálisan, ha $x(0) = 0$, a $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \omega$ jelölés bevezetése után a megoldás

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{2\omega} \exp(-\alpha t) [\exp(t\omega) - \exp(-t\omega)] \\ &= \frac{v_0}{\omega} \exp(-\alpha t) \sinh(t\omega). \end{aligned}$$

3. A fenti két eset határán helyezkedik el az az eset, amikor $\alpha = \omega_0$. Ekkor λ_1 és λ_2 értéke egybeesik:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$$

és a differenciálegyenletnek látszólag csak egy független megoldása van:

$$x_1(t) = \exp(-\alpha t). \quad (7)$$

A (6) "általános" megoldásban a nevezőkben zérus áll, ami kiértékelhetetlenné teszi a képletet. Tekintsük azonban (6) határétékét midőn $\alpha \rightarrow \omega_0$, azaz a $\lambda_1 \rightarrow -\alpha$ és $\lambda_2 \rightarrow -\alpha$ határmenetben.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow -\alpha \\ \lambda_2 \rightarrow -\alpha}} x(t) &= \lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow -\alpha \\ \lambda_2 \rightarrow -\alpha}} \left[\frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(\lambda_1 t) + \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_2 t) \right] \\ &= \lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow -\alpha \\ \lambda_2 \rightarrow -\alpha}} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ v_0 [\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)] - x_0 \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{\exp(\lambda_1 t)}{\lambda_1} - \frac{\exp(\lambda_2 t)}{\lambda_2} \right] \right\} \\ &= v_0 \left. \frac{\partial \exp(\lambda t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=-\alpha} - x_0 \lambda^2 \left. \frac{\partial \frac{\exp(\lambda t)}{\lambda}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=-\alpha} \\ &= v_0 t \exp(-\alpha t) + x_0 [\alpha t \exp(-\alpha t) + \exp(-\alpha t)] \\ &= [(v_0 + \alpha x_0) t + x_0] \exp(-\alpha t). \end{aligned}$$

A kapott függvény valóban megoldás lesz, amiről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk. Ez a függvény megfelel a differenciálegyenletek elméletéből ismert állításnak mely szerint, kétszeres gyök esetén az alaprendszerben az (7) alakú megoldás mellett megjelenik egy

$$x(t) = t \exp(-\alpha t)$$

alakú megoldás is, amivel az általános megoldás:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) \exp(-\alpha t),$$

ami hasonlóan a második esethez, nem mutat periodikus jelleget.

Az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldásához most meg kell keresnünk az inhomogén egyenletnek egy partikuláris megoldását. A differenciálegyenletek elmélete szerint többféle módszerrel is találhatunk partikuláris megoldást. Ezek egyike az állandók variálásának módszere, amely szerint az inhomogén egyenlet megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának alakjában keressük úgy hogy a kombinációs együtthatókat időfüggővé tesszük:

$$x_p(t) = A_1(t) \exp(\lambda_1 t) + A_2(t) \exp(\lambda_2 t).$$

A módszer szerint, ha a másodrendű egyenlet alaprendszerének két függvénye $x_1(t)$ és $x_2(t)$, akkor az $A_1(t)$ és $A_2(t)$ együtthatóknak a következő lineáris egyenletrendszert kell kielégíteniük:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1(t) x_1(t) + \dot{A}_2(t) x_2(t) &= 0, \\ \dot{A}_1(t) \dot{x}_1(t) + \dot{A}_2(t) \dot{x}_2(t) &= f(t). \end{aligned}$$

A fenti alaprendszer esetén ez a következő egyenletrendszert eredményezi:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1(t) \exp(\lambda_1 t) + \dot{A}_2(t) \exp(\lambda_2 t) &= 0, \\ \dot{A}_1(t) \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + \dot{A}_2(t) \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) &= f(t), \end{aligned}$$

aminek megoldása:

$$\dot{A}_1 = \frac{f(t) \exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \dot{A}_2 = \frac{f(t) \exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$x_p(t) = \exp(\lambda_1 t) \int_{t_0}^t \frac{f(t') \exp(-\lambda_1 t')}{\lambda_1 - \lambda_2} dt' + \exp(\lambda_2 t) \int_{t_0}^t \frac{f(t') \exp(-\lambda_2 t')}{\lambda_2 - \lambda_1} dt'.$$

A kapott megoldás az $x(t_0) = 0$ és $\dot{x}(t_0) = 0$ kezdeti feltételekhez illeszkedik, így az $x(t_0) = x_0$ és $\dot{x}(t_0) = v_0$ általános kezdeti feltételeknek megfelelő megoldást úgy kapjuk meg, hogy a homogén egyenletnek megkeressük az ezekhez a kezdeti feltételekhez illeszkedő megoldását és hozzáadjuk a fent kapott partikuláris megoldást.

Érdemes külön megvizsgálni az $\alpha < \omega_0$ esetét, amikor $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ és $\lambda_1 - \lambda_2 = 2i\omega$. Mivel az $f(t)$ függvény valós, a megoldásfüggvény két tagja egymásnak komplex konjugáltja és így a függvény értéke egyenlő az egyik tag reális részének kétszeresével:

$$x_p(t) = \operatorname{Re} \left[\exp(\lambda_1 t) \int_{t_0}^t \frac{f(t') \exp(-\lambda_1 t')}{i\omega} dt' \right].$$

A konkrét alak kiszámításához $f(t)$ ismerete szükséges.

Fizikailag nagyon fontos eset, amikor a külső erő periodikus,

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

alakú. Bevezetve az $f_0 = F_0/m$ jelölést, $f(t) = f_0 \cos(\Omega t)$ lesz. A megoldásfüggvény:

$$x_p(t) = f_0 \exp(-\alpha t) \operatorname{Re} \left[\frac{\exp(i\omega t)}{i\omega} \int_{t_0}^t \exp(\alpha t' - i\omega t') \cos(\Omega t') dt' \right].$$

Ha nem ragaszkodunk a fenti kezdőfeltételt kielégítő partikuláris megoldáshoz, az integrál kiszámítása helyett gyorsabban érünk célba, ha a megoldás alakjára fizikai alapon teszünk feltevést. Tétélezzük fel ugyanis, hogy van olyan megoldása az egyenletnek, amely a külső erőt követő, periodikus mozgásnak felel meg:

$$x_p(t) = \operatorname{Re} [A \exp(i\Omega t)].$$

Az f erőt szintén írjuk fel komplex alakban:

$$f(t) = \operatorname{Re} [f_0 \exp(i\Omega t)].$$

Mivel a (2) mozgásegyenlet valós együtthatókat tartalmaz, érdemes mindjárt a komplex megoldását keresni, hiszen annak valós része külön is megoldás lesz. Behelyettesítve a komplex alakot:

$$A(i\Omega)^2 \exp(i\Omega t) + 2\alpha A i\Omega \exp(i\Omega t) + \omega_0^2 A \exp(i\Omega t) = f_0 \exp(i\Omega t).$$

Az egyenletet egy oldalra rendezve és kiemelve az $\exp(i\Omega t)$ közös tényezőt:

$$[A((i\Omega)^2 + 2\alpha i\Omega + \omega_0^2) - f_0] \exp(i\Omega t) = 0.$$

Az egyenlőség fennállásának szükséges és elégséges feltétele, hogy az első tényező legyen nulla:

$$A((i\Omega)^2 + 2\alpha i\Omega + \omega_0^2) - f_0 = 0,$$

amiből

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\alpha i\Omega}.$$

Szétválasztva az $|A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega)^2}}$ abszolút értékét és $\delta = -\arctan \frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ komplex fázisát, az eredmény:

$$x_p(t) = \operatorname{Re} [|A| \exp(i(\Omega t + \delta))] = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega)^2}} \cos(\Omega t + \delta).$$

Az általános megoldás a kapott partikuláris megoldás és a homogén egyenlet fent leírt általános megoldásának összege. Láttuk, hogy a homogén egyenlet általános megoldása időben exponenciálisan nullához tart, így a rendszer egy idő múlva mintegy "megfeledkezik" a kezdeti feltételekről és a mozgás a fenti partikuláris megoldásba megy át.

4. Anharmonikus rezgések

Valódi rendszerek esetén, különösen nagyobb kitéréseknél a visszatérítő erő már nem lesz arányos a kitéréssel és a megoldandó mozgásegyenlet elveszti lineáris jellegét:

$$m\ddot{x} = R(x) - k\dot{x} + F(t),$$

ahol $-Dx$ helyébe az általánosabb $R(x)$ alak került. Az egyenlet megoldásának egyik lehetséges módszere szerint az $R(x)$ függvényt Taylor-sorba fejtjük:

$$R(x) = R_0 + R_1x + R_2x^2 + \dots.$$

Összehasonlítva a lineáris esetre kapott egyenlettel látjuk, hogy R_0 elhagyható, ha az origót olyan helyen választjuk, ahol az erő eltűnik. Az R_1 együttható felel meg a lineáris erejű rugó jelenlétének, $R_1 = -D$. Az első olyan tag, amely a nemlinearitással függ össze az R_2x^2 tag. Az egyszerűség kedvéért a megoldási módszer bemutatásánál a további tagokat nem vesszük figyelembe. Természetesen ha $R_2 = 0$, újabb el nem tűnő tagig kell elmenni a sorfejtésben.

Az egyszerűség kedvéért a súrlódás és külső kényszer nélküli rendszer egyenletének a megoldását keressük, ahol alkalmazzuk az $\omega_0^2 = -R_1/m$ és az $\varepsilon = R_2/m$ jelölést:

$$\ddot{x} + \omega_0^2x - \varepsilon x^2 = 0.$$

A kapott egyenlet egy másodrendű, nemlineáris differenciálegyenlet, aminek megoldása analitikus módszerrel nem lehetséges, ezért egy olyan közelítő eljárást alkalmazunk, aminek alap gondolata sok fizikai probléma megoldásánál használható eljárást eredményez.

Vezessünk be egy határozatlan értékű, a $[0, 1]$ intervallumban folytonosan változtatható λ paramétert és tekintsük az

$$\ddot{x} + \omega_0^2x - \lambda\varepsilon x^2 = 0$$

egyenletet, amely $\lambda = 1$ esetén átmegy a megoldandó egyenletbe. Keressük ennek a megoldását λ szerinti hatványsor alakjában:

$$x(t) = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots.$$

Behelyettesítve az egyenletbe,

$$(\ddot{x}_0 + \lambda\ddot{x}_1 + \lambda^2\ddot{x}_2 + \dots) + \omega_0^2(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots) - \lambda\varepsilon(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots)^2 = 0.$$

Elvégezve a négyzetre emelést, és λ hatványai szerint rendezve,

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \lambda (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \varepsilon x_0^2) + \lambda^2 (\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - 2\varepsilon x_0 x_1) + \lambda^3 (\dots) + \dots = 0.$$

Az egyenlet minden λ értékre akkor oldódik meg, ha a λ hatványai szerinti együtthatók eltűnnek:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \varepsilon x_0^2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - 2\varepsilon x_0 x_1 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{8}$$

A végtelen sok egyenletből álló rendszer szerkezetén látszik, hogy a megoldásfüggvény tagjai egyenként lépnek be az újabb egyenletekbe és így a rendszer lépésenként megoldható. Az első egyenlet a harmonikus rezgőmozgás egyenlete, aminek a megoldása

$$x_0 = A \cos(\omega_0 t + \delta).$$

Ha kezdeti feltételként az $x_0(0) = a$ és $\dot{x}_0(0) = 0$ értékeket választjuk, a megoldás

$$x_0 = a \cos(\omega_0 t).$$

A (8) rendszer második egyenletébe helyettesítve

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \varepsilon a^2 \cos^2(\omega_0 t) = 0.$$

Használjuk fel a

$$\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}$$

azonosságot és vezessük be a $\xi = x_1 - \frac{\varepsilon a^2}{2\omega_0^2}$ új változót, amivel az egyenlet új alakja

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi - \frac{\varepsilon a^2}{2} \cos(2\omega_0 t) = 0.$$

A nyert egyenlet a kényszerrezgés egyenlete, aminek partikuláris megoldását korábban láttuk:

$$\xi = B \cos(2\omega_0 t + \delta).$$

Vegyük észre, hogy a kapott megoldásfüggvény szintén harmonikus rezgőmozgásnak felel meg, aminek a körfrekvenciája $2\omega_0$. Az erőfüggvényben fellépő négyzetes tag ezek szerint az ω_0 alapfrekvencia kétszeresének a megjelenéséhez vezet. Hasonló módon tovább lépve, a (8) egyenletrendszer harmadik egyenletének megoldásával megjelenik ω_0 háromszorosa is. A további egyenletek megoldása magasabb felharmonikusok megjelenéséhez vezet.

5. Mozgás három dimenzióban

Ha a tömegpont mozgása nem egy egyenes mentén zajlik, az általános, háromdimenziós térben felírt (1) mozgásegyenletet kell megoldanunk:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

Szorozzuk meg az egyenletet skalárisan $\dot{\mathbf{r}}$ -tal:

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}$$

és vegyük észre, hogy a jobb oldalon teljes időderivált áll:

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}\right).$$

Integráljuk az egyenlet két oldalát t_1 -től t_2 -ig:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} dt = \left.\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}\right|_{t_1}^{t_2} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2(t_2)}{2} - \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2(t_1)}{2}. \quad (9)$$

A jobb oldalon a kezdeti és végső időpontban mért $K = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}$ mennyiség különbsége áll. K -t, aminek értéke a tömegpont pillanatnyi mozgásállapotától függ, kinetikus, vagy mozgási energiának nevezzük.

A bal oldalon álló integrál értékét az \mathbf{F} erő által az $\mathbf{r}(t)$ pályán történő mozgást végző tömegponton végzett W munkájának, az $\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}$ szorzatot az erő (pillanatnyi) teljesítményének hívjuk. Az egyenlet alapján kimondhatjuk az ún. munkatételt. A tömegpont mozgási energiájának megváltozása egyenlő a rá ható erők eredőjének munkájával:

$$W = K_2 - K_1,$$

ahol $K_1 = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2(t_1)}{2}$ és $K_2 = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2(t_2)}{2}$.

Ha az \mathbf{F} erő csak az \mathbf{r} helytől függ és nem függ a t időtől valamint az $\dot{\mathbf{r}}(t)$ sebességtől, statikus erőtérrel beszélünk. Ebben az esetben a bal oldalon álló integrál a mozgás pályájára vett vonalmenti integrállal is kifejezhető:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \dot{\mathbf{r}} dt = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Az integrálási határokra az $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ és $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ jelölést vezettük be.

Ha a statikus erőtér olyan, hogy \mathbf{F} minden zárt görbére vett integrálja nulla:

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az erő(tér) konzervatív. Ilyen erőtér esetén a rögzített \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 pontok között végzett munka nem függ a pályától. Írjuk ugyanis fel két különböző pályára vonatkozóan a munkát:

$$I_1 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \text{és} \quad I_2 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}''.$$

Készítjük el azt, a zárt pályára vett integrált, amit az \mathbf{r}_1 pontból az \mathbf{r}_2 pontba az első görbén, majd az \mathbf{r}_2 pontból az \mathbf{r}_1 pontba a második görbén haladva kapunk. A második görbeszakaszra vett integrál értéke egyenlő $-I_2$ -vel, mivel a határok fordított sorrendben vannak megadva. A tér konzervatív, ezért

$$I_1 + (-I_2) = 0,$$

azaz

$$I_1 = I_2.$$

Ha az integrál értéke nem függ az úttól, az \mathbf{r}_0 alsó határ rögzítése után az

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

függvény egyértelműen meghatározott függvénye az \mathbf{r} helynek. A fizikában ennek (-1) -szeresét hívjuk potenciális energiának:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

A potenciális energia függvényéből az \mathbf{F} erő gradiensképzéssel áll elő:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad}_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0).$$

Ezt az állítást a gradiens definíciójának alkalmazásával bizonyíthatjuk. Írjuk fel a gradiens i -edik komponensét úgy hogy az i -edik irányba mutató egységvektort jelöljük \mathbf{e}_i -vel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x^i} &= - \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r} + \Delta x^i \mathbf{e}_i} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)}{\Delta x^i} = - \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \Delta x^i \mathbf{e}_i} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{\Delta x^i} \\ &= - \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \frac{\hat{\mathbf{F}} \Delta x^i \mathbf{e}_i}{\Delta x^i} = - \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \hat{\mathbf{F}} \mathbf{e}_i = - \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \hat{F}_i = -F_i(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

ahol $\hat{\mathbf{F}}$ -pal jelöltük az \mathbf{F} erő \mathbf{r} és $\mathbf{r} + \Delta x^i \mathbf{e}_i$ közötti integrálközepét és \hat{F}_i -vel annak i -edik komponensét.

Annak eldöntése, hogy egy adott \mathbf{F} erőtér konzervatív-e, a Stokes-tétel alkalmazásával történhet. Ennek alapján egy egyszeresen összefüggő tartományon egy erőtér konzervatív, ha a rotációja eltűnik. A tétel szerint ui.

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_A \text{rot} \mathbf{F} d\mathbf{A},$$

ahol az A felület peremére hajtottuk végre a vonalmenti integrálást. A felületi integrál akkor tűnik el tetszőleges hurokra illeszkedő felületre, ha $\text{rot} \mathbf{F} = 0$. Tehát \mathbf{F} akkor konzervatív, ha $\text{rot} \mathbf{F} = 0$.

Írjuk fel a munkatételt konzervatív erőter esetére:

$$K_2 - K_1 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F} d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0).$$

Átrendezve:

$$K_2 + U(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) = K_1 + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0),$$

azaz szavakban, a K kinetikus és U potenciális energia $E = K + U$ összege a mozgás során állandó. E a teljes energia.

A potenciális energiát definiáló integrál értéke függ az \mathbf{r}_0 integrálási határ megválasztásától. Ha megváltoztatjuk \mathbf{r}_0 értékét, megváltozik a potenciális energia értéke is. Ez azonban nem okoz problémát, mivel a mozgást meghatározó erő értéke ettől nem változik.

Speciális eset a homogén erőter, amikor $\mathbf{F} = \text{állandó}$ vektor, amire példa a Föld felszínén lokálisan mért súlyerő:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} = m\mathbf{g},$$

ahol $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. A potenciális energia:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{G} d\mathbf{r}' = mg(z - z_0),$$

ahol z és z_0 rendre az \mathbf{r} és \mathbf{r}_0 helyvektorok harmadik komponensét jelentik.

Háromdimenziós térbeli mozgás esetén definiálni lehet az impulzusmomentumot:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Az időbeli változás vizsgálatához készítsük el az idő szerinti deriváltat:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Az első tag azonosan nulla, mivel $\dot{\mathbf{r}} \parallel \mathbf{p}$. A második tagban a Newton-egyenlet szerint $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$. Ennek megfelelően az egyenlet átírható:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

A jobb oldalon szereplő kifejezés neve forgatónyomaték $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, amivel végül is:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}.$$

Az eredmény alapján kimondhatunk egy új megmaradási tételt. Egy tömegpont impulzusmomentuma állandó, ha a rá ható forgatónyomaték nulla.

A forgatónyomaték definíciója szerint lehet nulla, ha az erő nulla vagy ha az erő párhuzamos a helyvektorral. Ilyen, utóbbi tulajdonsággal bírnak, többek között, a centrális erőterek.

6. Centrális erőter

Sokszor előforduló speciális erőter az ún. centrális erőter. Ilyen erőterben az erő az erőcentrumból húzott sugár irányában hat és nagysága csak a centrumtól mért távolságtól függ.

$$\mathbf{F} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

ahol $r = |\mathbf{r}|$ és $F(r) = |\mathbf{F}|$.

Centrális erőter forgatónyomatéka eltűnik, mivel $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$. Ekkor a fenti megfontolások alapján \mathbf{L} állandó vektor.

Vegyük az $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ impulzusmomentum és a \mathbf{p} impulzus skaláris szorzatát.

$$\mathbf{L}\mathbf{p} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})\mathbf{p} = 0,$$

mivel $(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \perp \mathbf{p}$. Ez azt jelenti, hogy a \mathbf{v} sebességvektor mindig merőleges az \mathbf{L} impulzusmomentum vektorra és így a mozgás \mathbf{L} -re merőleges síkban zajlik le. Célszerű a mozgás síkjában polárkoordinátákat felvenni, azaz a részecske helyét az erőcentrumtól mért r távolsággal és egy kijelölt féltengellyel bezárt φ azimuttszöggel jellemezni. Ekkor az impulzusmomentumot is kifejtethetjük a lokális \mathbf{e}_r és \mathbf{e}_φ bázisban, ahol \mathbf{e}_r jelöli az \mathbf{r} irányába eső és \mathbf{e}_φ a rá merőleges egységvektort:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = mr\mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi).$$

A két egységvektor egymásra merőleges, ezért az impulzusmomentum L nagyságára kapjuk, hogy

$$L = mr^2\dot{\varphi}. \quad (10)$$

Szokás bevezetni a területi sebességet, ami egyenlő a centrumtól a részecskéhez húzott ún. vezérsugár által időegység alatt sírolt terület nagyságával.

$$\dot{f} = \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Legyen $\Delta\varphi$ a Δt idő alatt létrejött azimuttszögváltozás. Ekkor $\Delta\varphi \approx \dot{\varphi}\Delta t$, és a sírolt terület $\Delta f \approx \Delta\varphi r^2/2 \approx \dot{\varphi}\Delta t r^2/2$. A területi sebesség így:

$$\dot{f} = \dot{\varphi}r^2/2.$$

Az impulzusmomentummal kifejezve

$$\dot{f} = \frac{L}{2m}.$$

A területi sebesség tehát állandó. A Nap gravitációs terében keringő bolygókra vonatkozóan ez Kepler második törvénye.

Egyszerű behelyettesítéssel belátható, hogy a centrális erőter mindig konzervatív. Vegyük ui. az \mathbf{F} erőter rotációját. A koordináták szimmetrikus szerepe miatt elég az

egyik, pl. x komponensre számolni:

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{F(r)}{r} z \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{F(r)}{r} y \right] \\ &= \frac{d}{dr} \left[\frac{F(r)}{r} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial y} z - \frac{\partial r}{\partial z} y \right). \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a második tényező, függetlenül $F(r)$ alakjától, azonosan nulla.

Írjuk fel a potenciális energiát:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} F(r') \frac{\mathbf{r}'}{r'} d\mathbf{r}'.$$

Mivel az integrálást tetszőleges vonal mentén végezhetjük, célszerű az integrálási utat két részre bontani. Integráljunk először az \mathbf{r}_0 ponttól az r sugarú gömb felületéig tartó, az \mathbf{r}_0 sugár irányába eső egyenes mentén, majd folytassuk az r sugarú gömb felületén az \mathbf{r} pontig. A gömb felületén integrálva $d\mathbf{r}'$ mindig merőleges \mathbf{r}' -re, és így az integrál értéke a második szakaszon nulla.

Az első szakasz mentén történő integrálásnál $d\mathbf{r}'$ párhuzamos \mathbf{r}' -vel, úgy hogy a $\mathbf{r}' d\mathbf{r}'$ skaláris szorzat értéke $r' dr'$ -vel lesz egyenlő. Az integrál ennek alapján:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = - \int_{r_0}^r F(r') dr'.$$

Ezek szerint az U potenciális energia függvény az \mathbf{r} helytől csak a centrumtól mért r távolságon keresztül függ.

Ha a centrális erőter potenciális energiájának r -függését $V(r, r_0)$ -lal jelöljük, felírhatjuk az állandó E összenergiát:

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V(r, r_0) = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2] + V(r, r_0).$$

Fejezzük ki a (10) egyenletből $r\dot{\varphi}$ értékét és helyettesítsük be:

$$E = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + \left(\frac{L}{mr} \right)^2 \right] + V(r, r_0).$$

Vegyük észre, hogy a második tag szintén csak r -től függ és ezért érdemes összevonni a harmadik taggal. Az összeadás eredménye az ún. effektív potenciális energia

$$V(r, r_0)_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r, r_0),$$

amivel az energia:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r, r_0).$$

A nyert egyenlet az egydimenziós mozgásra kapott egyenlettel azonos, így a mozgásegyenlet megoldásának módszere hasonló lehet. Fejezzük ki \dot{r} -ot:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{eff}(r, r_0)]}. \quad (11)$$

A szeparálható differenciálegyenlet megoldása:

$$t - t^* = \int_{r^*}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{L^2}{2mr'^2} - V(r', r_0) \right]}}.$$

Az integrál kiszámítását $V(r, r_0)$ konkrét ismeretében kísérelhetjük meg.

Jól ismert példa az M tömegű gömbszimmetrikus tömegeloszlású anyagi test gravitációs erőterének hatása egy tőle távol lévő m tömegű tömegpontra:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

ahol γ az ún gravitációs állandó ($\gamma = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$) Vezessük be a $\gamma mM = \alpha$ jelölést, a potenciális energia függvény ekkor:

$$V(r, r_0) = - \int_{r_0}^r \frac{-\alpha}{r'^2} dr' = -\alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Sokszor célszerű r_0 értékét végtelen nagynak választani, ami azt jelenti, hogy a potenciális energia értéke a végtelenben válik nullává. Ekkor ($r_0 \rightarrow \infty$)

$$V(r) = \frac{-\alpha}{r}. \quad (12)$$

A Nap gravitációs terének hatása alatt lévő bolygó mozgásának felírásához a $V(r)$ potenciális energia függvény helyébe a (12) egyenletben adott függvényt kell helyettesítenünk. Az így kapott integrál azonban nem végezhető el kvadratura segítségével. Ezért a továbbiakban nem a hely időfüggését próbáljuk meghatározni, hanem a pálya egyenletét. Polárkoordinátákban keressük a $\varphi = \varphi(r)$ függvényt.

Ehhez készítsük el a $\dot{\varphi}$ deriváltat úgy hogy a láncszabályt alkalmazzuk:

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dr} \dot{r}.$$

Fejezzük ki $\frac{d\varphi}{dr}$ -et és helyettesítsük be $\dot{\varphi}$ -ot (10)-ből, valamint \dot{r} -ot (11)-ből:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} \right]}}.$$

A szeparábilis differenciálegyenlet megoldása, ha φ^* jelöli az r^* sugárhoz tartozó szöveget $\varphi^* = \varphi(r^*)$:

$$\varphi - \varphi^* = \int_{r^*}^r \frac{L dr'}{r'^2 \sqrt{2m \left[E - \frac{L^2}{2mr'^2} + \frac{\alpha}{r'} \right]}}.$$

A kapott integrál elvégezhető a következő változóhelyettesítéssel

$$x' = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r'} - 1 \right), \text{ azaz } r' = \frac{p}{ex' + 1}$$

ahol a következő jelöléseket vezettük be:

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} \text{ és } e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad (13)$$

Elvégezve a helyettesítést

$$\varphi - \varphi^* = \int_{x^*}^x \frac{-dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \arccos x'|_{x^*}^x = \arccos \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \Big|_{r^*}^r.$$

Rendezzük át úgy az egyenletet, hogy a jobb oldalon álló $-\arccos \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right)$ konstansát átvisszük balra és összevonva a bal oldalon álló φ^* -gal β -val jelöljük.

$$\varphi + \beta = \arccos \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right).$$

Kifejezve r -et:

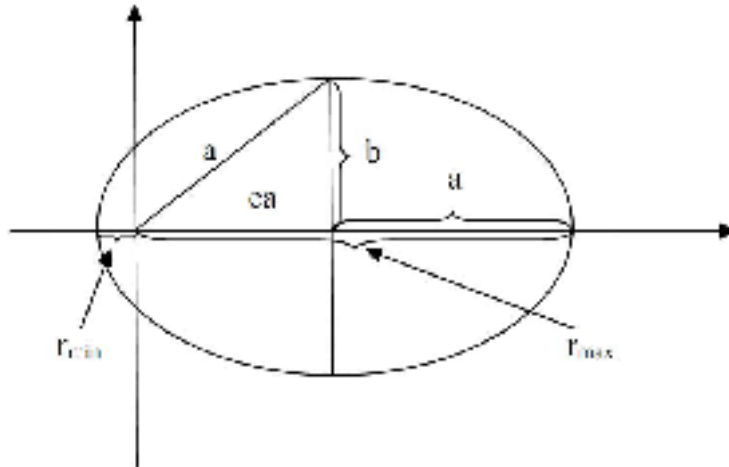
$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \beta)}. \quad (14)$$

A nyert összefüggés olyan kúpszelet egyenlete polárkoordinátákban, amelynek egyik fókuszpontja az origóban van és főtengelye β szöget zár be a polártengellyel. Az egyenletben szereplő e neve numerikus excentricitás és p a paraméter.

A kúpszelet jellege e értékétől függ. A pálya

1. ellipszis ha $e < 1$, azaz $E < 0$,
2. parabola ha $e = 1$, azaz $E = 0$,
3. hiperbola ha $e > 1$, azaz $E > 0$.

Az első eset Kepler első törvénye. Vizsgáljuk meg az ellipszis geometriai paramétereit. Az egyszerűség kedvéért válasszuk a polártengelyt úgy, hogy egybe essen a nagytengellyel, ekkor $\beta = 0$.



Mivel a (14) függvényben a cosinus függvény értéke $+1$ és -1 között változik, r maximumát és minimumát könnyű felírni:

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e}, \quad r_{\min} = \frac{p}{1+e}.$$

A nagytengely hossza r_{\min} és r_{\max} számtani közepe

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} \right) = \frac{p}{1-e^2}, \quad (15)$$

A fókuszok centrumtól mért távolsága

$$a - r_{\min} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e} \right) = \frac{ep}{1-e^2} = ea.$$

A b kistengely ezek után Pitagorasz tételével felírható:

$$b^2 + (ea)^2 = a^2,$$

amiből

$$b = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{ap}.$$

Az ellipszis területe:

$$A = \pi ab = \pi\sqrt{a^3p},$$

amit szintén fel tudunk írni a $\frac{\dot{\varphi}r^2}{2}$ (állandó) területi sebesség és a keringési idő szorzataként:

$$A = T \frac{\dot{\varphi}r^2}{2} = T \frac{L}{2m},$$

amiből

$$T \frac{L}{2m} = \pi\sqrt{a^3p}.$$

Emeljünk négyzetre, rendezzünk át és használjuk ki, hogy $p = \frac{L^2}{m\alpha}$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha}. \quad (16)$$

Ha a bolygómozgásnál figyelembe vesszük, hogy $\alpha = \gamma m M$ az kapjuk, hogy

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M},$$

ami Kepler harmadik törvénye.

Az a nagytengely (15) alakjába helyettesítsük be a (13) egyenletekkel definiált paramétereket:

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{-\alpha}{2E}.$$

Az eredmény alapján a T keringési idő az energia segítségével is kifejezhető

$$T = \gamma M m \pi \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}.$$

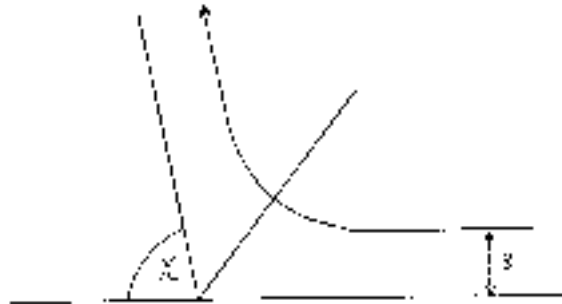
7. Részecskék szórása

Ha a centrális erőtér hatása alatt mozgó tömegpontnak pozitív a teljes energiája, a pálya általában nem korlátozódik véges tartományokra, a tömegpontok ún. szórási folyamatban vesznek részt. A viszonylag nagy távolságban – ún. asszimptotikusan – egyenesnek tekinthető pálya mentén közeledő részecskék az erőtér hatása alatt eredeti mozgásirányuktól eltérnek és a szórócentrumtól eltávolodva az eredeti iránytól eltérő egyenes pályán haladnak tovább.

A részecskeszórási kísérletekben a különböző irányokba eltérülő részecskék relatív arányát mérik meg és ennek eredményéből következtetnek a szórócentrum tulajdonságaira.

Tételezzük fel, hogy az x tengellyel párhuzamosan, nagy távolságban egyforma v_∞ sebességgel indított m tömegű tömegpontok közelednek az origóban található szórócentrumhoz, amit centrális erőtérként kezelünk. Az x tengely neve ebben a helyzetben ütközési tengely.

Legyen egy nagyon távol lévő kiszemelt részecske távolsága az ütközési tengelytől ρ , amit ütközési paraméternek hívunk. Ezekkel az adatokkal a részecske teljes energiája $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$ és a szórócentrumra vonatkoztatott impulzusmomentumának nagysága $L = \rho mv_\infty$. Jelöljük az eredeti iránytól való eltérés szögét χ -vel (szórási szög). A részecske mozgásegyenletének megoldása egyértelmű kapcsolatot teremt ρ és χ között, azaz létezik a $\rho = \rho(\chi)$ függvény.



A közeledő részecskék fluxusa egy távoli, az ütközési tengelyre merőleges síkban mérve legyen n . Ekkor egy infinitezimális $d\sigma$ területű felületelemen időegység alatt áthaladó részecskék száma ("árama")

$$dN = n d\sigma.$$

Az adott helyzetű $d\sigma$ felületelemen át beáramló részecskék a szórócentrumtól nagy távolságban mérve a megfelelő helyzetű $d\Omega$ elemi térszögben fogják elhagyni a szórócentrumot. Az egységnyi térszögben kirepülő részecskék száma így $dN/d\Omega$, amiből az egységnyi beáramló fluxus esetén adott irány körül egységnyi térszögben kirepülő részecskék száma az ún. (felület dimenzójú) differenciális hatáskeresztmetszet:

$$\frac{1}{n} \frac{dN}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Ha az erőtér centrálszimmetrikus, a szórási folyamat az ütközési tengelyre nézve hengersizimetriát mutat, és a $\rho = \rho(\chi)$ függvény nem függ az x tengely körüli elforgatástól. A $d\sigma$ elemi felületnek ekkor érdemes az ütközési tengely körüli $|d\rho|$ vastagságú és ρ sugarú körgyűrűt választani

$$d\sigma = 2\pi\rho |d\rho|.$$

A ρ és $\rho + d\rho$ ütközési paraméter között érkező részecskék a $\rho(\chi)$ függvény által meghatározott χ és $\chi + d\chi$ nyílásszögű kúpok között repülnek ki, aminek megfelelő térszög

$$d\Omega = 2\pi \sin \chi |d\chi|.$$

Figyelembe véve, hogy $|d\rho| = \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| |d\chi|$ ahol $\frac{d\rho}{d\chi}$ a $\rho(\chi)$ függvény deriváltja, a differenciális hatáskeresztmetszetre azt kapjuk, hogy

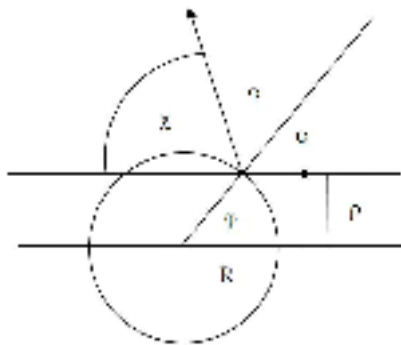
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right|. \quad (17)$$

Számítsuk ki egy R sugarú merev gömb differenciális hatáskeresztmetszetét. Ha az ütközési paraméter $\rho (\leq R)$, az ütköző részecske a gömböt olyan φ nyílásszögű sugárnál találja el amire:

$$\rho = R \sin \varphi.$$

A φ nyílásszögű sugár egyben a lokális beesési merőleges is, így a szórási szög

$$\chi = \pi - 2\varphi.$$



Behelyettesítve kapjuk a szükséges $\rho(\chi)$ függvényt:

$$\rho = R \sin \left(\frac{\pi - \chi}{2} \right) = R \cos \left(\frac{\chi}{2} \right).$$

A differenciális hatáskeresztmetszet ezzel, a (17) előállítás szerint:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2 \cos \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2}}{2 \sin \chi} = \frac{R^2}{4}. \quad (18)$$

A merev gömb tehát izotrop módon szór.

Nevezetes szórási probléma az ún. Coulomb-szórás: rögzített q_1 nagyságú ponttöltés terében szórátunk q_2 töltésű tömegpontokat, pl. elektronokat. A potenciáltér ugyanolyan, mint a tömegpont gravitációs terének a potenciáltere, csak $\alpha = -q_1 q_2 k$, ($k = 8.98755 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$) ezért a mozgásegyenlet megoldása ugyanazokkal a lépésekkel történhet, mint a bolygómozgás esetén. Ha a két töltés egyenlő előjelű, az erőtér taszító jellegű. A mozgás pályája hiperbola, amelynek polárkoordinátákban megadott alakja (14) szerint a következő (α negatív):

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos(\varphi + \beta)}, \quad (19)$$

ahol (13) alapján $p = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{mv_\infty^2 \rho^2}{\alpha}$, és $e = \sqrt{1 + \left(\frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{m\rho v_\infty^2}{\alpha}\right)^2}$.

Válasszuk a polártengelyt úgy hogy $\beta = 0$ legyen. Ekkor a bejövő és kirepülő részecske pályájának megfelelő asszimptoták távoli pontjainak ϕ_1 és ϕ_2 polárszögére, amikor (19)-ben $r \rightarrow \infty$, fennáll, hogy:

$$e \cos \phi_{1,2} = 1,$$

azaz

$$\phi_{1,2} = \pm \arccos \frac{1}{e}. \quad (20)$$

A szórási szög a két asszimptota által bezárt külső szög:

$$\chi = \pi - (\phi_1 - \phi_2)$$

Mivel (20) szerint $\phi_2 = -\phi_1$

$$\chi = \pi - 2\phi_1,$$

azaz

$$\chi = \pi - 2 \arccos \frac{1}{e}.$$

Osszuk az egyenletet 2-vel

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{e} = \arcsin \frac{1}{e}$$

és helyettesítsük be e -t:

$$\sin \frac{\chi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m\rho v_\infty^2}{\alpha}\right)^2}}.$$

Átrendezve kapjuk a $\rho(\chi)$ függvényt

$$\rho = \frac{|\alpha|}{mv_\infty^2} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} - 1} = \frac{|\alpha|}{mv_\infty^2} \cot \frac{\chi}{2}.$$

Számítsuk ki (17) alapján a differenciális hatáskeresztmetszetet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}.$$

A kapott eredmény az ún. Rutherford-féle szórási formula.

Szokás definiálni a σ ún. totális szórási hatáskeresztmetszetet, ami a differenciális hatáskeresztmetszet integrálja a teljes 4π térszögre:

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega.$$

Számítsuk ki (18) felhasználásával az R sugarú merev gömb totális hatáskeresztmetszetét:

$$\sigma = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = \int \frac{R^2}{4} 4\pi = R^2\pi.$$

Az eredmény szemléletesen megfelel annak a területnek, amelyen a gömb kiszórja a részecskéket az eredeti mozgási irányukból.

A Rutherford-féle szórás ettől erősen eltérő eredményt ad. A hengerszimmetria miatt az integrálást először egy χ nyílásszűg $d\chi$ vastagságú gömbövre végezzük, azaz elvégezzük a $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ helyettesítést, majd χ szerint integrálunk 0 és π között:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} d\Omega = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \right)^2 \int_0^\pi \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} 2\pi \sin \chi d\chi \\ &= \pi \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi. \end{aligned}$$

Az integrandus primitív függvénye $\frac{-1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}}$, ami az integrálási határok behelyettesítése esetén divergens kifejezést eredményez! A totális hatáskeresztmetszet a klasszikus Coulomb-szórás esetén végtelen.

8. Pontrendszerek

Tömegpontokból álló rendszer (pontrendszer) mozgásának vizsgálatához az egy tömegpont esetére definiált fogalmakat általánosítjuk. Az n anyagi pontból álló rendszer \mathbf{P} impulzusát a rendszert alkotó tömegpontok impulzusának vektori összegeként értelmezzük. Legyen az i -edik tömegpont tömege m_i , helyvektora pedig \mathbf{r}_i , amivel

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \text{ ahol } \mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Vizsgáljuk meg \mathbf{P} időbeli változását. Galilei-rendszerben írjuk fel az i -edik tömegpontra a Newton egyenletet:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij},$$

Az i -edik tömegpontra a rendszeren kívülről ható erőt \mathbf{F}_i -vel és a j -edik tömegpont részéről ható erőt \mathbf{F}_{ij} -vel jelöltük. Az előbbi ún. külső erő, az utóbbit pedig belső erőnek hívjuk. Megjegyzendő, hogy $\mathbf{F}_{ii} = 0$, mivel a tömegpontok nem hatnak önmagukra.

Adjuk össze az egyenleteket $i = 1$ -től n -ig:

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij}.$$

A bal oldalon álló összeg egyenlő a teljes impulzus idő szerinti $\dot{\mathbf{P}}$ deriváltjával. A jobb oldalon álló első összeg a külső erők \mathbf{F} eredője. A második összegben minden belső erő szerepel, aminek értelmében minden $i - j$ párosításához találunk egy $j - i$ párt, úgy hogy az akció-reakció elve szerint $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Az összeg értéke ennek megfelelően nulla és így pontrendszerre kapjuk a Newton-egyenletet:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}.$$

Vezessük be a pontrendszer tömegközéppontjának fogalmát, amelynek \mathbf{R} helyvektora:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (21)$$

A kifejezés nevezőjében a rendszert alkotó pontok tömegeinek összege szerepel, amit jelöljünk m -mel. A tömegközéppont definíciója korrekt, ami alatt azt értjük, hogy független a vonatkoztatási rendszer megválasztásától. Tételezzük fel ui., hogy megváltoztatjuk a vonatkoztatási rendszert és az új origó helye az \mathbf{r}_0 helyvektorral megadott helyen lesz. Ekkor minden helyhez az $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ helyvektort rendeljük és így a tömegközéppont helyvektora a definíció szerint

$$\mathbf{R}' = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i}{m}$$

lesz. Végezzük el a behelyettesítést:

$$\mathbf{R}' = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)}{m} = \mathbf{R} - \mathbf{r}_0,$$

ami éppen megfelel a tömegközéppont új rendszerbeli helyének.

A tömegközéppont definíciós egyenletét szorozzuk be m -mel és deriváljuk idő szerint. A jobb oldal a rendszer összipulzusával egyenlő, tehát:

$$m\dot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{P}. \quad (22)$$

A rendszer tömegközéppontjának $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ sebességére tehát fennáll, hogy

$$m\mathbf{V} = \mathbf{P}.$$

Az egyenlet újabb, idő szerinti deriválása pedig a Newton-egyenlethez vezet a tömegközéppont mozgására nézve, hiszen:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}.$$

Ha a külső erők \mathbf{F} eredője zérus, \mathbf{V} állandó lesz, azaz a tömegközéppont egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez.

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \mathbf{R}_0$$

Ez az állítás az ún. tömegközéppontmegmaradás tétele.

A tömegközéppont ezen fontos tulajdonsága miatt szokás bevezetni az ún. tömegközépponti (TK) rendszer fogalmát, ami olyan vonatkoztatási rendszert jelent, amelynek origója a tömegközéppont. Az a külső vonatkoztatási rendszer, amelyben megfigyeléseinket végezzük, ezzel szemben az ún. laboratóriumi rendszer (L).

Az i -edik tömegpont L-rendszerbeli helyvektorára fennáll, hogy

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i^{TK},$$

ahol \mathbf{r}_i^{TK} jelöli a tömegpont TK-rendszerbeli helyvektorát.

Szorozzuk meg az egyenletet m_i -vel és adjuk össze az egyenleteket i index minden értékére

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^{TK}.$$

Mivel a (21) egyenlet szerint a bal oldal egyenlő a jobb oldalon álló első taggal,

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^{TK} = 0.$$

A kapott összefüggés megfelel annak, hogy a TK-rendszerben a tömegközéppont az origóban helyezkedik el. Deriváljuk az egyenletet idő szerint:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^{TK} = 0.$$

TK-rendszerben tehát a rendszer összipulzusa mindig zérus, ami megfelel a szemléletnek is, hiszen a tömegközéppont sebessége ebben a rendszerben zérus. TK-rendszert sokszor előnyös használni, pl. a részecskeszórási folyamatok tanulmányozásánál, vagy az ún. kéttest probléma vizsgálata esetén.

9. Kéttestprobléma

A pontrendszer fontos speciális esete a két tömegpontból álló rendszer, aminek mozgása jól tanulmányozható.

Tételezzük fel, hogy \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 helyvektorokkal adott helyeken m_1 és m_2 tömegű tömegpontok zárt rendszert alkotnak, azaz csak egymásra hatnak. Az első pontra a második részéről ható erőt jelöljük \mathbf{F}_{12} -vel, ennek reakcióerejét pedig \mathbf{F}_{21} -gyel. Ekkor a mozgásegyenletek a következőképpen alakulnak:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \tag{23}$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}. \quad (24)$$

Adjuk össze a két egyenletet és vegyük figyelembe, hogy a két erő egymás ellentéte:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0.$$

A nyert összefüggés nem más mint a tömegközéppont megmaradás tétele két tömeg-pont esetére, hiszen ebből

$$\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{V}t + \mathbf{R}_0.$$

Célszerű ezért a rendszert TK-rendszerben vizsgálni, ahol $\mathbf{V} = 0$ és $\mathbf{R}_0 = 0$ s így a két helyvektorra fennáll, hogy:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0.$$

Most szorozzuk be a (23) egyenletet m_2 -vel és a (24) egyenletet m_1 -gyel, majd vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1) = (m_1 + m_2) \mathbf{F}_{21},$$

ahol kihasználtuk, hogy $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. A két helyvektor különbségét jelöljük \mathbf{r} -rel ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$) és osszuk el az egyenletet a két tömeg összegével. A kapott egyenlet:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}, \quad (25)$$

ahol bevezettük az ún. redukált tömeget:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Az egyenlet megegyezik az egy tömegpontra felírt mozgásegyenlettel, ami az ott leírt módszerekkel oldható meg. Ha az \mathbf{r} relatív helyvektorra megoldottuk az egyenletet az \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 helyvektorok kifejezhetőek:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= -\mathbf{r} \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r} \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ezek a megoldások arányosak az \mathbf{r} vektorra nyert megoldással.

A bolygók mozgására kapott eredményünket így pontosíthatjuk. A Nap-bolygó rendszert kéttestproblémaként kezeljük és így figyelembe vehetjük, hogy a Nap is elmozdulhat. Legyen a Nap helye \mathbf{r}_1 és a bolygó helye \mathbf{r}_2 . A fenti megjegyzés értelmében a bolygó és a Nap \mathbf{r} relatív helyvektora és így a bolygó helyét megadó \mathbf{r}_2 vektor is ellipszispályát ír le.

A keringési időre a bolygómozgás vizsgálatánál a (16) összefüggést nyertük:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha}.$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy a (25) mozgásegyenletben az m tömeg szerepét a redukált tömeg játssza, valamint, hogy $\alpha = \gamma m_1 m_2$, akkor Kepler harmadik törvényének a következő módosított formáját nyerjük:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1 + m_2)} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1 (1 + m_2/m_1)},$$

ahol m_1 a Nap, m_2 a bolygó tömege és a a bolygónak a Naptól mért relatív helyvektora által leírt ellipszispályának a nagytengelye.

10. Pontrendszer impulzusmomentuma, energiája

Pontrendszer impulzusmomentumát a rendszert alkotó tömegpontok impulzusmomentumainak összegeként definiáljuk:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

Vizsgáljuk meg ennek idő szerinti deriváltját:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i).$$

Az első tag nulla, mivel $\dot{\mathbf{r}}_i$ és \mathbf{p}_i párhuzamosak. A második tagban az impulzus deriváltja a tömegpontra ható erővel egyenlő, amiben újra kettéválasztjuk a külső és belső erőket:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}.$$

Az első tag az \mathbf{F}_i külső erők forgatónyomatékának eredője:

$$\mathbf{M}^k = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

A második tag a belső erőktől származó forgatónyomaték:

$$\mathbf{M}^b = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij},$$

amivel

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}^k + \mathbf{M}^b.$$

A belső erők forgatónyomatéka az akció-reakció "gyenge" elve értelmében, ($\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$) átírható a következő alakra:

$$\mathbf{M}^b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}.$$

Ha a tömegpontok között ható erő centrális, azaz $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ párhuzamos az \mathbf{F}_{ij} erővel, a belső erők forgatónyomatéka zérus. Ez a feltevés az akció-reakció elvének "erős" változata, ami "tisztán mechanikai jellegű" erők esetén általában fenáll. (Az, hogy milyen erők tartoznak ebbe a kategóriába, függ az alkalmazott elmélettől. Az adott modell keretében kapott eredmények alapján lehet eldönteni, hogy a feltételezés helyes volt-e. A gravitációs kölcsönhatás Newton-féle elmélete szerint pl. a gravitációs erő eleget tesz az akció-reakció erős elvének. Ha egy pontrendszerben elektromágneses erők is hatnak a részek között, az elv nem tartható fenn.)

Ha a belső erők forgatónyomatéka eltűnik:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}^k.$$

Ha külső erők nem hatnak (pl. zárt rendszer esetén), vagy eredő forgatónyomatékuk zérus, a rendszer impulzusmomentuma megmaradó mennyiség lesz:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}.$$

Olyan belső erők fellépése esetén, amelyeknek a forgatónyomatéka nem tűnik el, a mechanikai impulzusmomentum nem lesz megmaradó mennyiség. Ilyen esetben mindig meg lehet találni azt, az erőhatást közvetítő "közeget", fizikai objektumot (pl. elektromágneses tér), amivel a rendszert ki kell egészíteni, hogy zárt rendszert kaphassunk. Ezeknek az objektumoknak szintén van saját impulzusmomentumuk, amit a mechanikai rendszer momentumával együtt kell vizsgálni. A teljes rendszer impulzusmomentuma már megmaradó mennyiség lesz.

Írjuk fel az impulzusmomentumot a TK-rendszerbeli helyvektorokkal:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i^{TK}) \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{R} \times \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \mathbf{p}_i. \quad (26)$$

Az első tagban \mathbf{R} kiemelése után a teljes impulzust kapjuk a szumma jel mögött, tehát:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \mathbf{p}_i.$$

A második tagban szereplő impulzus kifejezhető a TK-rendszerben definiált helyvektorral:

$$\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m_i \dot{\mathbf{R}} + m_i \dot{\mathbf{r}}_i^{TK}. \quad (27)$$

Behelyettesítve, (26) második tagja így alakul:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^{TK} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \mathbf{p}_i^{TK},$$

ahol bevezettük a TK-rendszerbeli $\mathbf{p}_i^{TK} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i^{TK}$ impulzust. Az első tagban $\dot{\mathbf{R}}$ jobbról kiemelhető. A szorzó összeg viszont nulla, mivel az nem más mint a tömegközéppontnak a TK-rendszerben definiált helyvektora szorozva m -mel. Így végül az impulzusmomentumra kapjuk, hogy

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \mathbf{p}_i^{TK}.$$

A felbontásnak szemléletes jelentése van: az első tag egy olyan tömegpont impulzusmomentuma, amelyik a tömegközéppontban a rendszer impulzusával mozog. A második tag pedig, a rendszernek a TK-rendszerben a tömegközéppontra vonatkoztatott \mathbf{L}^{TK} impulzusmomentumával egyenlő:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}^{TK}.$$

Vizsgáljuk meg \mathbf{L} időbeli változását ebben az alakban:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{P} + \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} + \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i^{TK} \times \mathbf{p}_i^{TK} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \dot{\mathbf{p}}_i^{TK}.$$

Az első tag nulla, mivel a két tényező párhuzamos. A második tagban az impulzus deriváltja a rendszerre ható erők \mathbf{F} eredőjével egyenlő. A harmadik tag szintén nulla, mivel a szumma minden tagjában a tényezők párhuzamosak:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \dot{\mathbf{p}}_i^{TK}.$$

A második tagban szereplő $\dot{\mathbf{p}}_i^{TK}$ tényező a (27) egyenlet deriválása után kifejezhető:

$$\dot{\mathbf{p}}_i^{TK} = \dot{\mathbf{p}}_i - \frac{m_i}{m} \dot{\mathbf{P}}$$

alakban, ahol viszont $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij}$. Behelyettesítve nyerjük, hogy

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} - \frac{m_i}{m} \dot{\mathbf{P}} \right).$$

Elvégezve a szorzást, az utolsó tag, ami $\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \frac{m_i}{m} \dot{\mathbf{P}}$, értéke nulla lesz, mivel ez arányos a tömegközéppontnak a TK-rendszerben megadott helyvektorával. Így végeredményben nyerjük, hogy:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} \right).$$

Feltételezve, hogy a belső erők centrálisak, a korábbi gondolatmenet értelmében, a vektori szorzás a belső erőkkel nullát eredményez. Ilyenkor:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{TK} \times \mathbf{F}_i.$$

Az egyenlet szemléletes tartalma szerint, az impulzusmomentum időszerinti deriváltja két tagból álló forgatónyomatékkal egyenlő: az első olyan forgatónyomaték, amelyet akkor kapunk, ha a külső erők eredőjét úgy tekintjük, mintha a tömegközéppontra

hatna, a második pedig a külső erőknek a tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomatéka. Ez a felbontás különösen a merev testek mozgásának vizsgálatánál játszik fontos szerepet.

Pontrendszer kinetikus energiáját a rendszert alkotó tömegpontok kinetikus energiájának összegeként definiáljuk:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2.$$

Idő szerinti deriváltja:

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

a tömegpontokra ható erők teljesítményével egyenlő. Integráljunk idő szerint a t_1 és t_2 időpont között:

$$K(t_2) - K(t_1) = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i dt.$$

Ha az erők csak a helytől függenek, minden integrál vonalmenti integrállá alakítható:

$$K(t_2) - K(t_1) = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i.$$

A jobb oldalon álló kifejezés a rendszerre ható erők munkája, amelyben mind a külső, mind a belső erők szerepelnek.

Ha az erőtér konzervatív és létezik az n db helyvektortól függő $U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ potenciálfüggvény, amelynek negatív gradiense az alábbi módon előállítja az erőket

$$\mathbf{F}_i = -\text{grad}_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n),$$

a teljesítmény is időszerinti deriváltként állítható elő:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{i=1}^n \text{grad}_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \dot{\mathbf{r}}_i = - \frac{dU}{dt}.$$

Ennek megfelelően

$$\frac{d}{dt} (K + U) = 0,$$

amiből következik, hogy

$$K + U = \text{állandó}.$$

Érdeemes a pontrendszer kinetikus energiáját is felírni a TK-rendszerbeli helyvektorokkal:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}_i^{TK} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{R}}^2 + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{r}}_i^{TK} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\dot{\mathbf{r}}_i^{TK} \right)^2.$$

Az első tagban $\dot{\mathbf{R}}^2$ kiemelhető és a szumma értéke a teljes tömeggel lesz egyenlő. A második tagban $\dot{\mathbf{R}}$ emelhető ki, ami után a szumma a tömegközéppont definíciója szerint egyenlő lesz nullával. Így a kinetikus energia a

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{r}}_i^{TK})^2$$

alakot veszi fel, aminek szemléletes a jelentése. Az első tag a tömegközéppontban elhelyezkedő m össztömegű tömegpont kinetikus energiájával egyenlő, míg a második szumma a pontoknak a TK-rendszerhez képes bekövetkező mozgásából származó energiájárulékát adja. Az utóbbi pl. egy merev test mozgása esetén a forgásból származó energiával egyezik meg.

A konzervatív rendszer esetén definiálható az összenergia:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{r}}_i^{TK})^2 + U.$$

11. Gyorsuló vonatkoztatási rendszerek

A Newton-egyenlet eredeti formájában csak Galilei-rendszerben használható, gyorsuló rendszerekben további megfontolásokat kell tenni.

Tételezzük fel, hogy a K Galilei-rendszerhez képest tetszőlegesen mozgó K' rendszerben szeretnénk leírni egy tömegpont mozgását. Az egyszerűség kedvéért elfogadjuk, hogy a K' rendszer merev, azaz a bázisvektorok skaláris szorzatai állandók maradnak. Az ilyen tulajdonságú K' rendszer legáltalánosabb mozgása, Euler tétele szerint, egy merev test eltolásból és merev test pillanatnyi tengely körüli elforgásából tevődik össze. A tétel bizonyítása pl. az ortogonális transzformációk alaptulajdonságainak kihasználásával történhet.

Tekintsük először egy, a két rendszer közös origóján átmenő tengely körüli elfordulást és vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik egy tetszőleges, a K' rendszerben rögzített \mathbf{A} vektor a K rendszerből nézve. Tegyük fel, hogy a K' rendszer dt idő alatt $d\varphi$ szöggel fordul el. Érdekes bevezetni az elemi elfordulás $d\vec{\varphi}$ vektorát, aminek iránya, definíció szerint egybe esik a tengely irányával és nagysága egyenlő $d\varphi$ -vel. Ekkor az \mathbf{A} vektor változása első rendben $d\mathbf{A} = d\vec{\varphi} \times \mathbf{A}$ -val lesz egyenlő. A változás sebessége ennek megfelelően $\dot{\mathbf{A}} = \vec{\omega} \times \mathbf{A}$ lesz, ahol bevezettük a szögsebesség $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ vektorát. Ha az \mathbf{A} vektor a K' rendszerben is változik, a K rendszerbeli változási sebessége a két változás összege lesz

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{A}, \quad (28)$$

ahol $\frac{d'\mathbf{A}}{dt}$ jelöli a K' rendszerbeli változási sebességet.

Speciálisan a szögsebesség vektor deriváltjára fennáll, hogy

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}. \quad (29)$$

A fenti megfontolások alapján egy K' rendszerben felvett \mathbf{r}' helyvektor változási sebessége

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Itt $\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}'$ a K' rendszerben mért sebesség. Végül, ha K' rendszer origója \mathbf{v}_0 sebességgel mozog K origójához képest, a megfelelő pont K -ban mért sebessége

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}'$$

lesz.

Vegyük az egyenlőség idő szerinti deriváltját:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt}.$$

Az első tag az origó \mathbf{a}_0 gyorsulásával egyenlő. A második és harmadik tagban használjuk fel a (28) összefüggést:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \frac{d'}{dt}\mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \frac{d'(\vec{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}').$$

Elvégezve a szorzat deriválását:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \frac{d'\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}').$$

Figyelembe véve a (29) összefüggést, az egyenlet végül a következő alakot veszi fel:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \vec{\beta} \times \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'),$$

ahol a bevezettük a $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ szöggyorsulás vektorát.

Ha most a K' rendszerben vizsgáljuk a pont mozgását, ki kell fejeznünk a K' -ben mért gyorsulást:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 - 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' - \vec{\beta} \times \mathbf{r}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (30)$$

A jobb oldalon álló $-2\vec{\omega} \times \mathbf{v}'$ tagot Coriolis-gyorsulásnak, a $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}')$ tagot pedig centrifugális gyorsulásnak hívjuk. A centrifugális gyorsulást áttekinthetőbb alakra hozhatjuk az alábbi vektoralgebrai azonosság alkalmazásával:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (31)$$

Tehát

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'\vec{\omega}^2.$$

Ha \mathbf{u} -val jelöljük az \mathbf{r}' vektornak az $\vec{\omega}$ vektor irányába eső komponensét, az első tag az

$$\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}') = \vec{\omega}^2 \mathbf{u}$$

alakot ölti, amivel a centrifugális gyorsulás

$$-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') = \vec{\omega}^2 (\mathbf{r}' - \mathbf{u}).$$

Az $\mathbf{s} = \mathbf{r}' - \mathbf{u}$ vektor a tömegpontnak a forgástengelytől mért irányított távolsága, amivel a centrifugális gyorsulás végül az $\vec{\omega}^2 \mathbf{s}$ alakot ölti.

Szorozzuk be a gyorsulásra kapott (30) összefüggést a tömegpont m tömegével:

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_0 - m2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' - m\vec{\beta} \times \mathbf{r}' + m\vec{\omega}^2 \mathbf{s}$$

és vegyük észre, hogy a jobb oldal első tagja a Newton-egyenletnek megfelelően a pontra ható \mathbf{F} erővel egyenlő:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 - m2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' - m\vec{\beta} \times \mathbf{r}' + m\vec{\omega}^2 \mathbf{s}. \quad (32)$$

A kapott egyenlet a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben érvényes mozgásegyenletnek tekinthető. A valódi \mathbf{F} fizikai erőn kívül ún. fiktív, vagy tehetetlenségi erők is fellépnek, amiket a fizikai erőhöz kell adnunk. A jobb oldalon álló tagok közül a harmadik neve Coriolis-erő, az ötödiké pedig centrifugális erő.

Egyszerű példaként vizsgáljuk meg a K Galilei-rendszerben álló tömegpont mozgásegyenletét egy állandó $\vec{\omega}$ szögsebességgel forgó K' vonatkoztatási rendszerből nézve. A K rendszerben a test nem gyorsul, rá erő nem hat, a mozgásegyenlet trivialisitást fejez ki. A forgó K' rendszerben a (32) korrigált mozgásegyenletet kell alkalmaznunk. A jobb oldal első két és negyedik tagja nulla, amiből a mozgásegyenlet:

$$m\mathbf{a}' = -m2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' + m\vec{\omega}^2 \mathbf{s}.$$

A bal oldalon álló $m\mathbf{a}'$ kifejezés a forgó rendszerben körmozgást végző tömegpont $\mathbf{a}' = -\vec{\omega}^2 \mathbf{s}$ centripetális gyorsulásának és m tömegének a szorzatával, azaz a centripetális erővel kell megegyeznie. Nézzük meg a jobb oldalon szereplő fiktív erőket. A \mathbf{v}' sebesség a K' forgó rendszerhez viszonyított sebesség, ami esetünkben a K' rendszernek a K rendszerhez viszonyított $\vec{\omega}$ szögsebességgel történő forgása miatt lép fel, mivel a test K -ban áll. Így $\mathbf{v}' = -\vec{\omega} \times \mathbf{s}$. Ennek eredményeként a (31) összefüggést újra felhasználva és figyelembe véve, hogy \mathbf{s} és $\vec{\omega}$ merőlegesek egymásra

$$-m2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' = m2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{s}) = 2m [\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \mathbf{s}) - \mathbf{s} \vec{\omega}^2] = -2m\mathbf{s}\vec{\omega}^2.$$

Összeadva a jobb oldali tagokat végeredményben valóban a megfelelő

$$m\mathbf{a}' = -m\vec{\omega}^2 \mathbf{s}$$

egyenletet nyerjük, ami szerint a centripetális erőt ténylegesen a fiktív erők eredője szolgáltatja.

Amennyiben a Föld felszínén végzünk mechanikai kísérleteket, pontosabb mérések esetén szintén figyelembe kell vennünk, hogy a földgolyó forgó rendszer. Vizsgáljuk meg, hogy ebben a forgó rendszerben egy szabadon eső tömegpont milyen mozgást végez.

Tartózkodjunk a Föld valamely ϕ földrajzi szélességű pontján és vegyünk fel egy olyan Descartes-rendszert, amelyben a z tengely mutat a lokális, függőőnnal definiált függőleges irányban felfelé, az x tengely mutat a lokálisan vízszintes déli irányba és az y tengely mutat keletre.

Legyenek a tömegpont \mathbf{r} helyvektorának koordinátái $\mathbf{r} = (x, y, z)$, a \mathbf{v} sebességvektor koordinátái $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$. A tömegpontra fizikai erővel hat a nehézségi erőtér, ami arányos az m tömeggel. A fiktív erők között a mozgástól függetlenül mindig fellép a tömeggel szintén arányos centrifugális erő, ami lokálisan állandónak vehető. Ezek eredője fogja kijelölni a helyi függőleges és vízszintes irányt és ezért ezek eredőjét fogjuk a számolásban a pontra ható nehézségi erőnek tekinteni, aminek vektora így $\mathbf{G} = m\mathbf{g} = (0, 0, -mg)$. A Föld forgása miatt egyéb fiktív erők is fellépnek, amelyek kiszámításához feltételezzük, hogy a Föld állandó $\vec{\omega}$ szögsebességvektorral jellemezhető forgást végez az inerciarendszerhez képest. Ennek a szögsebességvektorának a komponensei a lokális Descartes-rendszerben

$$\vec{\omega} = (-\omega \cos \phi, 0, \omega \sin \phi),$$

ahol ω jelöli a forgás szögsebességének nagyságát ($\omega = 2\pi/24 \text{ h}^{-1} = \pi/43200 \text{ s}^{-1}$).

A (32) mozgásegyenlet ennek alapján

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v},$$

ami a tömeggel osztva az alábbi differenciálegyenlet-rendszerre vezet:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Írjuk fel az egyenleteket komponensenként:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y}\omega \sin \phi, \\ \ddot{y} &= -2\dot{z}\omega \cos \phi - 2\dot{x}\omega \sin \phi, \\ \ddot{z} &= -g + 2\dot{y}\omega \cos \phi.\end{aligned}$$

Integráljuk az első és harmadik egyenletet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y\omega \sin \phi + C_1, \\ \dot{z} &= -gt + 2y\omega \cos \phi + C_2.\end{aligned}\tag{33}$$

Ha olyan ejtési kísérletet hajtunk végre, amelynél a kezdeti hely- és sebességérték nulla, C_1 és C_2 nulla kell legyen. Helyettesítsük a két deriváltat a középső egyenletbe:

$$\ddot{y} = 2gt\omega \cos \phi - 4y\omega^2 \cos^2 \phi - 4y\omega^2 \sin^2 \phi$$

és rendezzük át

$$\ddot{y} + 4y\omega^2 = 2gt\omega \cos \phi.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_p = \frac{g \cos \phi}{2\omega} t,$$

a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_0(t) = A \sin 2\omega t + B \cos 2\omega t,$$

ahol A és B állandók. Az inhomogén egyenlet általános megoldása ezekkel

$$y(t) = A \sin 2\omega t + B \cos 2\omega t + \frac{g \cos \phi}{2\omega} t.$$

A kezdeti feltételek szerint $t = 0$ -ban a koordináták és a sebesség is nulla. Ebből következik, hogy $B = 0$ valamint, hogy $A = \frac{-g \cos \phi}{4\omega^2}$, amiből:

$$y(t) = \frac{g \cos \phi}{2\omega} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right).$$

Visszahelyettesítve (33)-be, integrálás után kapjuk meg az $x(t)$ és $z(t)$ megoldásokat is:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{g \sin 2\phi}{4} \left(t^2 + \frac{\cos 2\omega t - 1}{2\omega^2} \right), \\ z(t) &= -g \frac{t^2}{2} + \frac{g \cos^2 \phi}{2} \left(t^2 + \frac{\cos 2\omega t - 1}{2\omega^2} \right). \end{aligned}$$

Az effektus nagyságrendjének érzékeltetéséhez helyettesítsünk be $t = 10$ s értéket. Legyen a földrajzi szélesség $\phi = \pi/4$ és $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$\begin{aligned} x(10 \text{ s}) &= 0,024 \text{ m}, \\ y(10 \text{ s}) &= 0,171 \text{ m}, \\ z(10 \text{ s}) &= -499,98 \text{ m}, \end{aligned}$$

Tehát egy 500 m magasból történő esés esetén a függőlegestől való eltérés néhány cm nagyságrendű.

12. Merev test mozgása, impulzusmomentuma, energiája

Euler tétele szerint egy merev test elemi elmozdulása egy tetszőleges pontjának translációjából és a ponton átmenő, pillanatnyi tengely körüli elfordulásból állítható elő. Ennek értelmében, ha kiválasztunk egy \mathbf{r}_0 helyvektorral jellemzett pontot, akkor a merev test i -edik tömegpontjának sebessége az alábbi módon adható meg:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \vec{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0),$$

ahol $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$, $\vec{\omega}$ a pillanatnyi szögsebesség vektora és \mathbf{r}_i az i -edik tömegpont helyvektora. Az egyszerűség kedvéért a vonatkoztatási pontot az origónak választva ($\mathbf{r}_0 = 0$), a sebességvektor a

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad (34)$$

alakot ölti. Írjuk fel a q tömegpontot tartalmazó merev test impulzusmomentum vektorát:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_{i=1}^q \mathbf{r}_i \times m_i (\mathbf{v}_0 + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^q m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^q m_i \mathbf{r}_i \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= m\mathbf{R} \times \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^q m_i \mathbf{r}_i \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i).\end{aligned}$$

Az első tag a translációs mozgással kapcsolatos és értéke nulla ha:

1. a vonatkoztatási pont nem mozog: $\mathbf{v}_0 = 0$,
2. a vonatkoztatási pont (origo) a tömegközépponttal egyezik meg (TK-rendszer):

$\mathbf{R} = 0$.

A második kifejezés tartalmának megvilágításához használjuk ismét a (31) azonosságot:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^q m_i \mathbf{r}_i \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^q m_i [\mathbf{r}_i^2 \vec{\omega} - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \vec{\omega})]. \quad (35)$$

Áttekinthetőbb képet kapunk, ha indexes írásmódra térünk át. Az \mathbf{L} vektor n -edik komponense $L_n = \sum_{i=1}^q \sum_{p=1}^3 m_i (x_{ip} x_{ip} \omega_n - x_{in} x_{ip} \omega_p)$, ahol x_{ip} jelöli az \mathbf{r}_i vektor p -edik komponensét. Az első tagban az $\omega_n = \sum_{k=1}^3 \delta_{nk} \omega_k$ azonosság alkalmazása után cseréljük fel a p és k összegző indexet, ami után ω_p kiemelhető: $L_n = \sum_{i=1}^q \sum_{p=1}^3 m_i (\delta_{np} \sum_{k=1}^3 x_{ik} x_{ik} - x_{in} x_{ip}) \omega_p$. A két szumma jel felcserélése után látjuk, hogy a szögsebesség ω_p komponensei egy

$$\Theta_{np} = \sum_{i=1}^q m_i \left(\delta_{np} \sum_{k=1}^3 x_{ik} x_{ik} - x_{in} x_{ip} \right) \quad (36)$$

alakú kétindexes (n, p) kifejezéssel (mátrixszal) vannak megszorozva, azaz:

$$L_n = \sum_{p=1}^3 \Theta_{np} \omega_p.$$

A Θ_{np} mátrix a Θ -val jelölt, ún. tehetetlenségi nyomaték tenzor mátrixa.

Az impulzusmomentum \mathbf{L} vektora tehát általában nem párhuzamos az $\vec{\omega}$ szögsebesség vektorával. Mivel az előállításból látszik, hogy a Θ_{np} mátrix szimmetrikus, kell legyen olyan koordinátarendszer, amelyben diagonális alakot vesz fel (főtengelyrendszer). Ha az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor iránya egybe esik valamelyik főtengely irányával, akkor viszont \mathbf{L} és $\vec{\omega}$ egyirányú.

Érdeemes Θ komponenseit részletesen is, mátrix alakban kiírni, úgy hogy a Descartes-koordinátáknál szokásos jelölést használjuk, azaz $x_i = x_{i1}$, $y_i = x_{i2}$, $z_i = x_{i3}$:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^q m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^q m_i (x_i y_i) & -\sum_{i=1}^q m_i (x_i z_i) \\ -\sum_{i=1}^q m_i (y_i x_i) & \sum_{i=1}^q m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^q m_i (y_i z_i) \\ -\sum_{i=1}^q m_i (z_i x_i) & -\sum_{i=1}^q m_i (z_i y_i) & \sum_{i=1}^q m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Egyszerű példaként írjuk fel az $\mathbf{r} = (0, y, 0)$ helyen található, m tömegű tömegpont tehetetlenségi nyomaték tenzorát. Mivel csak egy tömegpontunk van, az összegzés egy tagot tartalmaz:

$$\Theta = \begin{pmatrix} my^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & my^2 \end{pmatrix}.$$

Ha pl. a tömegpont a z tengely körül ω szögsebességgel kering, akkor

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix},$$

és így az impulzusmomentum vektora:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ my^2\omega \end{pmatrix}$$

lesz.

Folytonos tömegeloszlású tömegrendszer esetén (36) alakját értelemszerűen úgy változtatjuk meg, hogy a diszkrét tömegpontok járulékait összegyűjtő összegzés helyett integrálunk. Ehhez a tömegeloszlást jellemző $\rho(\mathbf{r})$ tömegsűrűséget meg kell adnunk, amivel a tehetetlenségi nyomaték tenzorának mátrixa:

$$\Theta_{np} = \int \rho(\mathbf{r}) \left(\delta_{np} \sum_{k=1}^3 x_k x_k - x_n x_p \right) dV.$$

Vizsgáljuk meg a merev test energiáját. A kinetikus energia a tömegpontok energiajárulékaiknak összegéből áll elő:

$$E = \sum_{i=1}^q \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2}.$$

Ismét alkalmazva a sebességvektor (34) felbontását

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^q \frac{m_i}{2} \left[\mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i) + (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^q m_i \mathbf{r}_i \right) + \sum_{i=1}^q \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2. \end{aligned}$$

Az első tag a translációs mozgásból származó E_0 járulék. A második tag eltűnik, ha tömegközépponti rendszerben vagyunk mivel ekkor $\sum_{i=1}^q m_i \mathbf{r}_i = 0$. A harmadik tagban alkalmazzuk az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$ azonosságot, amivel

$$(\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i) = [\mathbf{r}_i \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \cdot \vec{\omega}.$$

Részletesen felírva:

$$E = \frac{m}{2} \mathbf{v}_0^2 + \sum_{i=1}^q \frac{m_i}{2} [\mathbf{r}_i \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \vec{\omega}.$$

A második tagban kiemelve $\vec{\omega}$ -t, felismerjük, hogy annak együtthatója éppen az impulzusmomentum felével egyenlő:

$$E = E_0 + \frac{1}{2} \mathbf{L} \vec{\omega}.$$

A forgó mozgásból származó E_F energiajárulék így

$$E_F = \frac{1}{2} (\Theta \vec{\omega})^T \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega},$$

ahol $\vec{\omega}^T$ jelöli $\vec{\omega}$ transzponáltját, azaz a hozzá rendelt sorvektort.

Tekintsünk egy rögzített tengely körül történő forgást. A tengely irányát jellemezzük \mathbf{n} egységvektorral. Ekkor az ω nagyságú szögsebességvektor alakja:

$$\vec{\omega} = \mathbf{n}\omega, \quad (38)$$

amivel a forgási energia az

$$E_F = \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n}$$

alakot veszi fel, ahol \mathbf{n}^T az \mathbf{n} vektor transzponáltja. Az $I = \mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n}$ mennyiség neve tehetetlenségi nyomaték, amivel az adott tengely körüli forgásból származó energia

$$E_F = \frac{1}{2} \omega^2 I.$$

Használjuk fel újra az impulzusnyomaték (35) és a szögsebesség (38) alakját

$$\frac{1}{2} \mathbf{L} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q m_i [\mathbf{r}_i^2 \mathbf{n}\omega - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \mathbf{n}\omega)] \mathbf{n}\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q m_i [\mathbf{r}_i^2 \mathbf{n}^2 - (\mathbf{r}_i \mathbf{n})^2] \omega^2.$$

Mivel $\mathbf{n}^2 = 1$, I értéke

$$I = \sum_{i=1}^q m_i [\mathbf{r}_i^2 - (\mathbf{r}_i \mathbf{n})^2].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés a Pitagorasz-tétel szerint éppen az i -edik tömegpontnak a forgástengelytől mért l_i^2 távolságnégyzetével egyenlő, tehát:

$$I = \sum_{i=1}^q m_i l_i^2. \quad (39)$$

Érdeemes megvizsgálni, hogy hogyan függ az I tehetetlenségi nyomaték a forgástengely helyzetének megválasztásától. Jelöljük a tömegközépponton \mathbf{n} irányban

átmenő forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot I^{TK} -val. Az ettől l távolságban vele párhuzamosan futó forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot I -vel. Helyezzük el úgy a koordinátarendszert, hogy az origó a tömegközéppontba essen és a z tengely mutasson \mathbf{n} irányába. A másik forgástengely messe az x tengelyt az origótól l távolságban. Írjuk fel I értékét (39) alapján és végezzük el a négyzetreemeléseket

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^q m_i [(x_i - l)^2 + y_i^2] = \sum_{i=1}^q m_i [x_i^2 - 2x_i l + l^2 + y_i^2] \\ &= \sum_{i=1}^q m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum_{i=1}^q m_i l^2 - \sum_{i=1}^q m_i 2x_i l. \end{aligned}$$

Az első tag értéke I^{TK} , a második tagban l^2 kiemelhető, a harmadik tag pedig a tömegközéppont definíciója miatt eltűnik ($\sum_{i=1}^q m_i x_i = 0$). A nyert összefüggés Steiner tétele:

$$I = I^{TK} + ml^2,$$

ahol $m = \sum_{i=1}^q m_i$ a teljes tömeg.

A tehetetlenségi nyomaték tenzor főátlóban található elemei, a fentiek szerint, a megfelelő tengelyhez tartozó tehetetlenségi nyomatékkal egyenlők. A többi elem jelentésének megvilágításához tételezzük fel, hogy a test a tömegközéppontján átmenő rögzített z tengely körül forog. Ez azt jelenti, hogy az i -edik tömegpont koordinátáira fennáll, hogy

$$\begin{aligned} x_i &= A_i \cos[\varphi(t) + \alpha_i], \\ y_i &= A_i \sin[\varphi(t) + \alpha_i], \\ z_i &= B_i, \end{aligned} \tag{40}$$

ahol A_i , B_i és α_i állandók, a szögsebesség vektor alakja pedig

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega = \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Írjuk fel az impulzusmomentumra vonatkozó dinamikai egyenletet:

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$$

és helyettesítsük be az impulzusmomentum (37) mátrixát és szögsebesség (41) komponenseit.

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} (\Theta \vec{\omega}) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\omega \sum_i m_i x_i z_i \\ -\omega \sum_i m_i y_i z_i \\ \omega \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}.$$

A harmadik M_z komponensben (40) szerint $x_i^2 + y_i^2 = A_i^2$ állandó és a deriváltból kivihető

$$M_z = \frac{d}{dt} \left[\omega \sum_i m_i A_i^2 \right] = \dot{\omega} \sum_i m_i A_i^2 = I_z \dot{\omega}.$$

Ha tengelyirányú nyomatékkal nem hatunk a testre (jók a csapágyak), akkor $M_z = 0$ és így $\omega = \text{állandó}$. Használjuk ki ezt az x és y komponensekre fennálló egyenletekben:

$$\begin{aligned} M_x &= -\omega \sum_{i=1}^q m_i \dot{x}_i z_i = \omega^2 \sum_{i=1}^q m_i y_i z_i = -\omega^2 \Theta_{yz}, \\ M_y &= -\omega \sum_{i=1}^q m_i \dot{y}_i z_i = -\omega^2 \sum_{i=1}^q m_i x_i z_i = \omega^2 \Theta_{xz}. \end{aligned}$$

Az utolsó lépésekben kihasználtuk, hogy (40) miatt

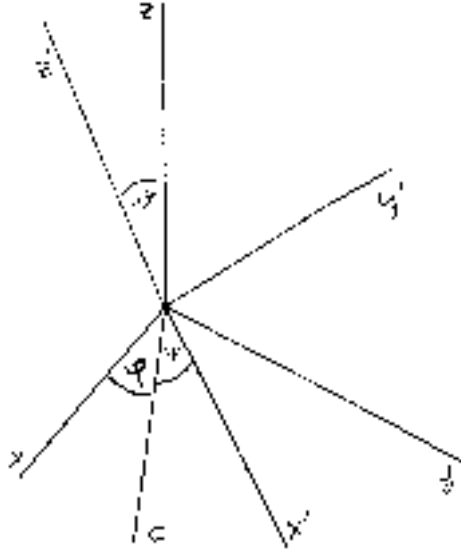
$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\omega y_i, \\ \dot{y}_i &= \omega x_i, \\ \dot{z}_i &= 0. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy az M_x és M_y komponensek általában nem tűnnek el, hanem a tehetetlenségi tenzor nemdiagonális elemeivel arányos értéket vesznek fel, azaz a testre a tengelyre merőleges forgatónyomatékokat kell kifejteni ahhoz, hogy megtarthassa állandó tengelyét. A tehetetlenségi nyomaték tenzor ezen elemeit ezért deviációs nyomatékoknak hívjuk.

Főtengelyrendszerben a deviációs nyomatékok eltűnnek, a megfelelő tengelyek az ún. szabad tengelyek, amelyek körül a test állandó szögsebességgel tud forogni anélkül, hogy külső forgatónyomatékokat kellene alkalmazni rá.

13. Euler-egyenletek

Az egy pontjában rögzített merev test általános mozgásának tanulmányozása céljából alkalmas változókat kell választanunk a test helyzetének leírására. Ehhez először rögzítsünk a merev testhez egy (x', y', z') tengelyekkel bíró K' Descartes-rendszert, amelynek origója essen egybe a fix ponttal.



A test kiinduló helyzetében a testhez rögzített koordinátatengelyek essenek egybe a külső K inerciarendszer (x, y, z) tengelyeivel. A test tetszőlegesen elfordított állapotának jellemzésére vezessük be az ún. Euler-szögeket a következő módon. A z és z' tengelyek által bezárt szög legyen ϑ . Az (x', y') és az (x, y) sík metszeti egyenesét, amit csomóvonalnak hívunk C -vel jelöljük. A C csomóvonalnak az x tengellyel bezárt szöge legyen φ , az x' tengely és a csomóvonal közti szög pedig legyen ψ . A merev test tetszőleges állásához eljuthatunk az így bevezetett három szöggel jellemzett elfordításokon keresztül. Az Euler-szögek időfüggésének ismerete megadja a test állását tetszőleges időpillanatban és így kimerítően leírja a test mozgását.

A ϑ szög idő szerinti $\dot{\vartheta}$ deriváltja a csomóvonal irányába eső $\vec{\vartheta}$ szögsebességvektor nagyságát adja meg. Hasonló módon vezethetjük be a $\vec{\varphi}$ szögsebességvektort, amelynek nagysága $\dot{\varphi}$ és iránya egybeesik a z tengely irányával, valamint a $\vec{\psi}$ szögsebességvektort, amelynek nagysága egyenlő $\dot{\psi}$ -tal és iránya a z' tengely irányába mutat. A test pillanatnyi $\vec{\omega}$ szögsebességvektora ezek alapján:

$$\vec{\omega} = \vec{\vartheta} + \vec{\varphi} + \vec{\psi}. \quad (42)$$

Az $\vec{\omega}$ szögsebességvektornak a K' rendszerben felvett koordinátáinak szokásos jelölése: $\omega_{x'} = p, \omega_{y'} = q$ és $\omega_{z'} = r$. p, q és r értékét a fenti (42) vektoregyenlet komponensenkénti kiírásával kapjuk meg:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, \\ q &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ r &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (43)$$

A jobb oldalon az Euler-szögek és deriváltjaik állnak, míg a bal oldalon a K' együttmozgó koordinátarendszerben mért szögsebességkomponensek. A bal oldal ismeretében kísérelhetjük meg az Euler-szögek kiszámítását.

A K' rendszernek megvan az az előnye, hogy benne a tehetetlenségi nyomaték tenzor komponensei nem változnak, hiszen a test ebben a rendszerben áll. Ugyanakkor a K' rendszer nem inerciarendszer, amire a mozgásegyenlet felírásakor figyelemmel kell lenni.

Válasszuk a K' rendszer tengelyeit úgy, hogy egybe essenek a tehetetlenségi nyomaték tenzor főtengeleyeivel. Ekkor a tehetetlenségi nyomaték tenzor alakja leegyszerűsödik:

$$\Theta = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

ahol a főtengelekhez tartozó értékeket a szokásos A, B, C -vel jelöltük. Az impulzusmomentum komponensei az $\mathbf{L} = \Theta \vec{\omega}$ egyenlet szerint a K' rendszerben:

$$\begin{aligned} L_{x'} &= Ap, \\ L_{y'} &= Bq, \\ L_{z'} &= Cr. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk az \mathbf{L} impulzusmomentumra a két rendszerben mért deriváltakra vonatkozó (28) átszámítási szabályt:

$$\frac{d'\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \vec{\omega} \times \mathbf{L}$$

és írjuk ki az egyenletet komponensenként. Vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon az impulzusmomentum vektor inerciarendszerbeli deriváltja áll, ami egyenlő az \mathbf{M} forgatónyomatékkal. Tehát a K' -beli koordinátákra:

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= M_{x'} + qr(B - C), \\ B\dot{q} &= M_{y'} + rp(C - A), \\ C\dot{r} &= M_{z'} + pq(A - B). \end{aligned}$$

A fenti összefüggéseket Euler-egyenleteknek hívjuk. Az egyenletek egy nemlineáris differenciálegyenletrendszert alkotnak, aminek a megoldása általános esetben nem egyszerű. Fontos speciális esetet képez az erőmentes szimmetrikus pörgettyű, aminek mozgását részletesebben is megvizsgáljuk.

Az erőmentesség azt jelenti, hogy a testre nem hat forgatónyomaték, tehát $\mathbf{M} = 0$. Ez úgy biztosítható pl., hogy a testet a tömegközéppontjában (súlypontjában) függesztjük fel. Szimmetrikus a pörgettyű, ha fő tehetetlenségi nyomatékai közül kettő megegyezik pl.: $A = B$. Ennek további speciális esete, ha a harmadik nyomaték is egyenlő ezekkel, azaz $A = B = C$. Az utóbbi esetben az egyenletek megoldása triviális, hiszen az Euler-egyenletek jobb oldalán mindenhol nulla áll és így p, q és r állandók. Ekkor (29) miatt a test a külső rendszerből nézve is állandó tengely körül, állandó szögsebességgel forog.

Az általánosabb, $B \neq C$ esetben az Euler-egyenletek az alábbi módon redukálódnak. Mivel $B = A$, B helyett mindenhol A -t írhatunk:

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= qr(A - C), \\ A\dot{q} &= rp(C - A), \\ C\dot{r} &= 0. \end{aligned}$$

A harmadik egyenlet azonnal megoldható:

$$r = r_0, (\text{állandó}).$$

Az első két egyenletben osszuk A -val és vezessük be az $\alpha = r_0 \frac{C-A}{A}$ állandót, amivel az első két egyenlet a

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\alpha q, \\ \dot{q} &= \alpha p \end{aligned}$$

alakot ölti. A rendszer megoldásához deriváljuk idő szerint az első egyenletet és \dot{q} helyére írjuk a második egyenlet szerint αp -t

$$\ddot{p} = -\alpha^2 p.$$

A megoldás közismert:

$$p = a \sin(\alpha t + \delta).$$

Ugyancsak az első egyenletből

$$q = -\frac{\dot{p}}{\alpha} = -a \cos(\alpha t + \delta).$$

A K' rendszerben tehát tudjuk a szögsebességvektor és ennek megfelelően az impulzusmomentum vektor komponenseinek időfüggését.

Mivel külső forgatónyomaték nem hat, a test \mathbf{L} impulzusmomentuma állandó. A K rendszer z tengelyét szabadon választhatjuk, ezért érdemes azt az impulzusmomentum vektorral azonos irányúnak venni, tehát

$$\begin{aligned} L_x &= 0, \\ L_y &= 0, \\ L_z &= L. \end{aligned}$$

Az ábrából leolvashatjuk, hogy $L_{z'} = L \cos \vartheta$, amit összevetve az $L_{z'} = Cr$ alakkal, kapjuk, hogy

$$L \cos \vartheta = Cr_0.$$

Az egyenlet ϑ -ra nézve megoldható:

$$\vartheta = \arccos \frac{Cr_0}{L} = \vartheta_0, (\text{állandó}).$$

Mivel $\dot{\vartheta} = 0$, (43) első és második egyenlete egyszerűbbé válik. Adjuk össze a két első egyenlet négyzetét és vegyük figyelembe, hogy $p^2 + q^2 = a^2$.

$$a^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta_0$$

azaz a pozitív gyököt választva

$$a = \dot{\varphi} \sin \vartheta_0.$$

Az első egyenlet szerint

$$p = a \sin \psi,$$

amit összevethetünk p megoldásával. Az eredmény:

$$\psi = \alpha t + \psi_0,$$

ahol a konstansok helyett bevezettük a ψ kezdeti értékét jelölő ψ_0 állandót. (43) harmadik egyenletéből

$$r_0 = \dot{\varphi} \cos \vartheta_0 + \alpha$$

adódik, amiből a harmadik Euler-szög időfüggése is kiszámítható:

$$\varphi = \frac{r_0 - \alpha}{Cr_0} Lt + \varphi_0.$$

Mivel ϑ állandó, a test z' tengellyel egybeeső szimmetriatengelye a rögzített L irányában álló z tengely körüli kúpot ír le, (nutáció). A K' rendszerben a szögsebesség $\vec{\omega}$ vektora ír le a z' tengely körüli kúpot hiszen $\sqrt{p^2 + q^2} = a$, valamint r is állandó.

14. Kényszerek

Tömegpontok mozgásának vizsgálatánál gyakran lépnek fel olyan erők, amelyek bizonyos irányú elmozdulásokat szinte lehetetlenné tesznek. Egyszerű példa a lejtőn mozgó test esete, amikor a lejtő felszínére merőleges irányban történő elmozdulás esetén az elmozdulással ellentétesen olyan gyorsan növekszik a potenciális energia, hogy az elmozdulás a lejtővel párhuzamos mozgásokhoz képest elhanyagolható. Másik példa a korábban tárgyalt merev test, amelyben az alkotó tömegpontok egymástól mért távolsága elhanyagolható mértékben tud csak megváltozni.

A fenti példákhoz hasonló esetekben elfogadjuk azt a közelítést, amely szerint a kérdéses elmozdulások egyáltalán nem jönnek létre. Azt mondjuk, hogy a rendszerben kényszerek vannak jelen, amiket ún. kényszererők valósítanak meg. A kényszerek vizsgálatát először az egyensúlyi rendszereken kezdjük.

Egy n tömegpontból álló rendszer akkor lehet egyensúlyban, ha a tömegpontokra ható erők komponensei mind eltűnnek, azaz az i -edik tömegpontra ható erő

$$\mathbf{F}_i = 0$$

minden i -re.

Ezt a feltételi egyenletrendszert átfogalmazhatjuk. Vezessük be a következő, virtuális munkának nevezett összeget:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i,$$

ahol $\delta \mathbf{r}_i$ az i -edik tömegpont egy ún. virtuális elmozdulását jelenti. Virtuális elmozdulások alatt a rendszer pillanatnyi helyzete és az adott időpillanatban infinitezimálisan közeli, lehetséges helyzetek koordinátáinak különbségét értjük. Egyensúly esetén minden erőkomponens eltűnik, így a δA virtuális munka is nulla lesz.

Fordítva, ha tudjuk, hogy a virtuális munka tetszőleges virtuális elmozdulás esetén eltűnik, akkor a rendszer egyensúlyban van, hiszen az összeg csak úgy tud eltűnni, ha minden erőkomponens eltűnik. Ez az ún. virtuális munka elve.

Ha a rendszerben kényszerek is jelen vannak, a $\delta \mathbf{r}_i$ virtuális elmozdulások már nem lesznek továbbra is mind függetlenek egymástól. Egyszerű példa az $x - y$ síkban az origón átmenő, M meredekségű lejtőn mozgó tömegpont esete. Mivel a lejtő egyenlete

$$y = Mx,$$

a δx és δy virtuális elmozdulásokra fenn kell álljon, hogy

$$\delta y = M \delta x.$$

Az általánosítás matematikai megfogalmazása céljából érdemes új jelölést bevezetni. A tömegpontok \mathbf{r}_i helyvektorainak r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} koordinátái helyett a tömegpontok sorrendjének megfelelően egységes indexes jelölésre térünk át úgy, hogy az új index 1-től $3n$ -ig fusson:

$$r_{11} \Rightarrow x_1,$$

$$r_{12} \Rightarrow x_2,$$

$$r_{13} \Rightarrow x_3,$$

$$r_{21} \Rightarrow x_4,$$

$$r_{22} \Rightarrow x_5,$$

$$\vdots \Rightarrow \vdots$$

$$r_{n3} \Rightarrow x_{3n}.$$

Hasonló módon az \mathbf{F}_i erőkomponenseket is jelöljük át:

$$F_{11} \Rightarrow X_1,$$

$$F_{12} \Rightarrow X_2,$$

$$F_{13} \Rightarrow X_3,$$

$$F_{21} \Rightarrow X_4,$$

$$F_{22} \Rightarrow X_5,$$

$$\vdots \Rightarrow \vdots$$

$$F_{n3} \Rightarrow X_{3n}.$$

A virtuális munka az új jelöléssel

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i. \quad (44)$$

Az x_i ($i = 1 \dots 3n$) koordináták által kifeszített $3n$ dimenziós teret konfigurációs térnek nevezzük, amelyben egy pont felel meg a rendszer pillanatnyi helyzetének. Kényszerek fellépése esetén a konfigurációs tér egy pontja környezetében nem minden pont érhető el a rendszer számára. A legegyszerűbb esetben, az x_i koordináták között, a lejtőhöz hasonló módon, egy vagy több függvénykapcsolat áll fenn. Ha s db kényszerkapcsolat van jelen, azokat egy oldalra rendezve így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t) &= 0, \\ &\vdots \\ \varphi_s(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

A rendszer megvalósuló mozgása során φ_j -k értéke nem változik, azaz

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1 \dots s. \quad (46)$$

A megfelelő differenciálok közötti összefüggés:

$$d\varphi_j = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} dt = 0.$$

Mivel a virtuális elmozdulások a konfigurációs térben, egy adott pillanatban lehetséges helyzetek közötti különbségnek felelnek meg, a közöttük fennálló kapcsolatokat úgy tudjuk megtalálni, ha φ_j értékében az adott időpillanatban, azaz $dt = 0$ esetben nem engedünk változást (virtuális változás φ_j -ben):

$$\delta \varphi_j = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0, \quad (47)$$

ami s db lineáris kapcsolatot jelent a virtuális elmozdulások között.

Ha most alkalmazzuk a virtuális munka elvét, a (44) képletben a δx_i virtuális elmozdulások nem lesznek mind függetlenek. A problémát a feltételes szélsőérték számításnál megismert Lagrange-féle multiplikátorok módszerével tudjuk megoldani.

Minden kényszerkapcsolathoz hozzárendelünk egy egyelőre ismeretlen λ_j számot (Lagrange-féle multiplikátor) és az eredeti (44) egyenletet kiegészítjük a kényszereket tartalmazó tagokkal:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \delta \varphi_j.$$

Kifejtve és kiemelve a közös tényezőket:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3n} \left(X_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i.$$

Az új tagok bevezetése nyomán a virtuális elmozdulások függetlennek tekinthetők és így a $\delta A = 0$ feltételből következnek az

$$X_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0 \quad (48)$$

egyensúlyi egyenletek.

A $3n$ db egyenlet $3n + s$ db ismeretlent tartalmaz: az x_i és λ_j számokat. A megoldást ezért a (45) egyenletekkel együtt kezelve kell megkeresni, amelyekkel együtt már megvan a szükséges számú egyenlet.

A (48) egyenlet fizikai értelmezése kézenfekvő. A rendszer egyensúlya úgy jöhet létre, hogy az X_i ún. szabaderőkomponensek mellett a rendszer elemeire kényszererők is hatnak, amelyeket szintén figyelembe kell venni. Az egyenletből azonnal leolvashatjuk a j -edik kényszererőtől származó X^j kényszererő i -edik komponensét:

$$X_i^j = \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}.$$

Egyszerű példa egy olyan súlyos tömegpont egyensúlyi helyzetének megkeresése, amelyik csak egy R sugarú gömbön tud mozogni. A gömb középpontja essen egybe az origóval, és mivel csak egy tömegpontról van szó, használjunk index nélküli jelölést, azaz a pont három koordinátája legyen x, y, z . Ekkor a kényszerfeltétel függvénye $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ amire fennáll, hogy

$$\varphi = 0.$$

Írjuk fel a (48) egyensúlyi egyenletet. Három dimenziós térben mozgunk, így három egyenletet kell felírunk. A szabad erő a tömegpontra ható nehézségi erő, aminek komponensei: $F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg$. A három egyenlet:

$$\begin{aligned} \lambda 2x &= 0, \\ \lambda 2y &= 0, \\ -mg + \lambda 2z &= 0. \end{aligned}$$

Az első két egyenletből $x = 0$ és $y = 0$, a kényszer egyenletből pedig $z = \pm R$. Az egyensúlyi helyzet tehát a gömb tetején és alján található. A kényszererő komponensei pedig:

$$\begin{aligned} F_x^k &= \lambda 2x = 0, \\ F_y^k &= \lambda 2y = 0, \\ F_z^k &= \lambda 2z = mg. \end{aligned}$$

Az egyensúly keresésének módszerét a dinamikai egyenlet felírására is felhasználhatjuk. Írjuk fel a Newton-egyenletet az új jelölés használatával:

$$X_i = m_i \ddot{x}_i,$$

ahol a tömegek jelölésénél is új indexekre tértünk át:

$$\begin{aligned} m_1 &\Rightarrow m_1, \\ m_1 &\Rightarrow m_2, \\ m_1 &\Rightarrow m_3, \\ &\vdots \\ m_n &\Rightarrow m_{3n-1}, \\ m_n &\Rightarrow m_{3n}. \end{aligned}$$

Ha a mozgásegyenletet egy oldalra rendezzük, az egyensúlyi egyenlethez hasonló alakot kapunk:

$$X_i - m_i \ddot{x}_i = 0.$$

A különbség csak annyi, hogy a bal oldalon megjelent egy erő jellegű tag, amit tehetetlenségi erőnek szokás nevezni.

Készítsük el a virtuális munka bevezetésénél látottakhoz hasonló módon a következő összeget:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i.$$

δA akkor lesz tetszőleges virtuális elmozdulás esetén nulla, ha a zárójelben álló kifejezés eltűnik. Ez éppen a mozgásegyenletnek felel meg. Fordítva, ha a mozgásegyenletek fennállnak δA eltűnik. Ez d'Alembert elve, ami a mechanika alapegyenletének egy új megfogalmazását jelenti.

Az elv alkalmazása feltételezi, hogy a virtuális elmozdulások függetlenek. Kényszerek fennállása esetén azonban láttuk, hogy ez nincs így. A megoldást megint a Lagrange-féle módszer adja, aminek segítségével a virtuális elmozdulások "függetlenné" tehetők.

Vezessük be ismét az s számú kényszerhez a megfelelő λ_j multiplikátort és egészítsük ki a d'Alembert-elv $\delta A = 0$ egyenletét a kényszereket figyelembe vevő tagokkal:

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \delta \varphi_j = 0.$$

(47) szerint ismét kifejtve $\delta \varphi_j$ -t és kiemelve az egyenlő tényezőket a

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(X_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0$$

egyenletet nyerjük. Most már minden virtuális elmozdulás függetlennek tekinthető, amiből következik, hogy

$$X_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0,$$

vagy átrendezve

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}. \quad (49)$$

A nyert mozgásegyenletek az ún. Lagrange-féle elsőfajú egyenletek. A megoldás során a (45) kényszeregyenleteket is az egyenletrendszer részének kell tekintenünk és így az ismeretlenek száma egyenlő lesz az egyenletek számával.

Összetett rendszerek vizsgálata azt mutatja, hogy a kényszereknek csak egy része adható meg a (45) alakban. Az ilyen kényszert holonom kényszernek és a megfelelő rendszert holonom rendszernek nevezzük.

Tekintsünk egy példát az ún. anholonom rendszerekre is, ahol a fenti feltétel nem áll fenn. Legyen egy vízszintes tengelyű, R sugarú biciklikerek, amelyek csúszásmentesen gördülhet az x, y síkon. A kerék tengelye a vízszintes síkban elfordulhat úgy, hogy a kerék tetszőleges irányban gördülhet. Zárjon be a kerék tengelye az x tengellyel α szöget és jelöljük az egyik kijelölt küllőnek a függőleges z tengellyel bezárt szögét β -val.

Mivel a kerék az x, y sík bármely pontjára el tud jutni és a két irányszöget is tetszőleges értékűre be tudjuk állítani, pl. megfelelő sugarú körpályán történő körbenjárással, a rendszer az x, y, α, β koordinátákkal megadott konfigurációs térnek tetszőleges pontját elérheti. Ez kizárja annak lehetőségét, hogy egy

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta, t) = 0$$

alakú kikötést tegyünk. Ha azonban megvizsgáljuk, hogy egy adott (x, y, α, β) konfigurációtérbeli pontban milyen virtuális elmozdulások lehetségesek, azt találjuk, hogy azok nem mind függetlenek.

Egyszerű geometriai megfontolásokból adódik (a csúszásmentes gördülés miatt), hogy a virtuális elmozdulásokra fennáll, hogy:

$$\begin{aligned} \delta x - R \sin \alpha \delta \beta &= 0, \\ \delta y + R \cos \alpha \delta \beta &= 0. \end{aligned}$$

Az általánosabb kényszerkapcsolatok a (46) egyenletek alapján a következők lehetnek:

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{ji} \frac{dx_i}{dt} + a_{j0} = 0, \text{ vagy differenciálokkal } \sum_{i=1}^{3n} a_{ji} dx_i + a_{j0} dt = 0, \quad (50)$$

ahol az a_{ji} együtthatók általában nem származtathatók $a_{ji} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$, és $a_{j0} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}$ alakban. A virtuális elmozdulásokra vonatkozó összefüggések ezek alapján ($dt = 0$ miatt):

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{ji} \delta x_i = 0.$$

A Lagrange-egyenletek ennek megfelelően módosulnak:

$$X_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j a_{ji} = 0,$$

ami átrendezve

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j a_{ji}. \quad (51)$$

A (51) Lagrange-egyenletek megoldását a (50) egyenletekkel együtt kell megkeresni.

Vizsgáljuk meg a rendszer energiájának változását. Szorozzuk meg a (51) mozgásegyenletet \dot{x}_i -tal és összegezzünk i -re:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^s \lambda_j a_{ji} \dot{x}_i.$$

A bal oldalon álló tag éppen a K kinetikus energia időszerinti deriváltja, míg a jobb oldali első tag a szabad erők teljesítményével egyenlő. Ha a szabad erők potenciálosak, az utóbbi egyenlő az U potenciális energia időszerinti deriváltjának ellentétével:

$$\frac{d}{dt} K = -\frac{d}{dt} U + \sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^s \lambda_j a_{ji} \dot{x}_i.$$

Rendezzük át az egyenletet és használjuk ki, hogy (50) miatt

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{ji} \dot{x}_i = -a_{j0}.$$

Ekkor az egyenlet így alakul

$$\frac{d}{dt} (K + U) = -\sum_{j=1}^s \lambda_j a_{j0}.$$

A kényszereket ennek megfelelően két csoportra osztjuk.

Szkleronomnak nevezzük a kényszert és a rendszert, ha holonom esetben a φ_j kényszerfüggvények nem függenek az időtől ($\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = 0$), vagy ennek megfelelően anholonom esetben, az a_{ji} együtthatók nem függenek az időtől ($\frac{\partial a_{ji}}{\partial t} = 0$) és az a_{j0} együttható eltűnik. Anholonom kényszer esetén ezeket külön-külön meg kell követelni, hiszen az első követelmény teljesüléséből nem következik a másik fennállása, ahogy holonom kényszer esetén is lehetséges hogy $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0$ és $\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \neq 0$. Ha a kényszer és a rendszer nem szkleronom akkor reonom.

A fenti egyenlet szerint a szkleronom rendszer teljes energiája nem változik (a kényszererők munkája nulla), mivel ekkor $a_{j0} = 0$ (holonom esetben $a_{j0} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}$).

Reonom rendszerben a kényszererők teljesítménye általában nem tűnik el, a rendszer energiája nem állandó.

Egyszerű példa a meghatározott mozgást végző lejtőn mozgó tömegpont esete. Legyen a lejtő (kényszer) egyenlete

$$\varphi(x, y, t) = y - M(x - x_0(t)) = 0,$$

ahol az adott $x_0(t)$ függvény megadja a lejtő x tengellyel való pillanatnyi metszéspontját.

A Lagrange-féle mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda M, \\ m\ddot{y} &= \lambda - mg. \end{aligned}$$

A kényszeregyenlet szerint

$$\ddot{y} = M(\ddot{x} - \ddot{x}_0).$$

Helyettesítsük be az első egyenletből kifejezett \ddot{x} -ot és a második egyenletből kifejezett \ddot{y} -ot:

$$\lambda - mg = -\lambda M^2 - mM\ddot{x}_0,$$

amiből:

$$\lambda = \frac{m(g - M\ddot{x}_0)}{1 + M^2}.$$

A kényszerfüggvényből leolvashatjuk, hogy:

$$a_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = M\dot{x}_0$$

és így a lejtő kényszerereje által nyújtott teljesítmény:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{Mm\dot{x}_0(M\dot{x}_0 - g)}{1 + M^2}.$$

Az eredmény általában nem nulla!

15. Általános koordináták

A Descartes-koordináták használata nem minden helyzetben előnyös. A mozgások leírásának általánosabb módszerére van lehetőség, ha nem ragaszkodunk a derékszögű, egyenesvonalú koordinátarendszerhez.

Általában vezessünk be annyi független változót a rendszer helyzetének megadására, ahány szükséges a rendszer állapotának egyértelmű jellemzésére. Ha a rendszerben nincsenek holonom kényszerek, a változók száma egyenlő lesz a konfigurációs tér $3n$ dimenziószámával. s db holonom kényszer jelenléte esetén a szükséges független változók száma csökken: $f = 3n - s$ lesz a rendszer szabadsági fokainak száma. Az így bevezetett új q_j ($j = 1, \dots, f$) változókat általános koordinátáknak

hívjuk. Segítségükkel a rendszer pontjainak x_i Descartes-koordinátáit ki tudjuk fejezni:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t).$$

A mozgásegyenletek általános koordinátákban történő felírásához induljunk ki újra a d'Alembert-elvből:

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0.$$

A virtuális elmozdulásokat szintén fejezzük ki az általános koordináták virtuális változásaival

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Helyettesítsünk be a d'Alembert-elv két tagjába:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i &= \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \\ \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i &= \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j. \end{aligned}$$

Az első tagban vezessük be a következő jelölést:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j},$$

amivel a virtuális munka

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j$$

alakú lesz. Ennek alapján Q_j neve általános erő(komponens). A második tagban az idő szerinti második deriválást szorzat deriváltjává alakítjuk:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (52)$$

A jobb oldal első tagjának átalakításához vegyük figyelembe, hogy az általános koordináták definíciójából következik, hogy

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t},$$

aminek megfelelően

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (53)$$

A második tagban fejtsük ki az idő szerinti teljes deriváltat:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)$$

Ha a Young-tétel alapján felcseréljük a deriválások sorrendjét és a két q_j szerinti deriválást egybe gyűjtjük azt kapjuk, hogy:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}.$$

(52) első tagjában használjuk fel a (53) összefüggést, a második tagban pedig az utolsó egyenlőséget:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Mindkét tagban az \dot{x}_i és a parciális deriváltját tartalmazó szorzat \dot{x}_i^2 deriváltjává alakítható:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Látható, hogy mindkét tagban szerepel a $K = \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2$ kinetikus energia, aminek beírása után a teljes összeg így alakul

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^f \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^f \frac{\partial K}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Ezt a d'Alembert-elvbe visszaírva kiemelhetjük δq_j -t

$$\sum_{j=1}^f \left(Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial K}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0.$$

Mivel az általános koordinátákat úgy vezettük be, hogy azok már figyelembe vették az esetleges holonom kényszereket és így egymástól függetlenül változhatnak, δq_j -k tetszőleges értéket vehetnek fel. Az egyenlet csak akkor állhat fenn, ha a zárójeleben álló kifejezés j minden értékére eltűnik, azaz:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j. \quad (54)$$

A kapott egyenletek a holonom rendszerek mozgásegyenleteinek általános alakja, nevük Lagrange-féle másodfajú egyenletek.

Anholonom kényszerek esetén, amikor a k -adik kényszerfeltétel

$$\sum_{j=1}^f a_{kj} \frac{dq_j}{dt} + a_{k0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s$$

vagy ennek megfelelően a virtuális elmozdulásokkal

$$\sum_{j=1}^f a_{kj} \delta q_j = 0$$

alakban adható csak meg, a d'Alembert-elv fenti alakjába újra be kell vezetnünk a $\sum_{k=1}^s \lambda_k a_{kj}$ alakú póttagot. Ekkor a δq_j virtuális elmozdulások már függetlennek tekinthetők, ami azt jelenti, hogy az egyenletet csak akkor tudjuk kielégíteni ha minden δq_j együtthatója eltűnik. A megfelelő Lagrange-egyenletek ekkor:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{k=1}^s \lambda_k a_{kj}$$

alakúak lesznek. Ekkor az s darab λ_k meghatározásához azonban használnunk kell az s darab kényszerfeltételt is.

Ha a holonom rendszer konzervatív, az erőkomponensek egy U potenciál deriváltjaként állnak elő:

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Ha a Q_j általános erő komponenseket definíció szerint felírjuk, a láncszabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy ezek is a potenciálfüggvény általános koordináta szerinti parciális deriváltjaként állíthatók elő:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Helyettesítsük be ezt az előállítást a (54) egyenletbe:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Mivel az U potenciál eredeti definíciója szerint nem függ a sebességektől, azaz $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$, az egyenletet mesterségesen kiegészíthetjük egy azonosan zérus értékű taggal:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Vonjuk össze a megfelelő deriváltakat:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (K - U)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (K - U)}{\partial q_j} = 0.$$

A zárójelben álló függvény neve Lagrange-függvény, aminek szokásos jelölése $L = K - U$. Ezzel az egyenlet a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (55)$$

alakot veszi fel. Szokás ezt az alakot is (másodfajú) Lagrange-egyenletnek nevezni.

Példaként írjuk fel az l hosszúságú matematikai sítka Lagrange-függvényét és mozgásegyenletét. Mérje a függőlegestől való kitérést a φ szög, ami általános koordinátaként szolgál az adott rendszerben. A kinetikus energia $K = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$, a potenciális energia pedig $U = -mgl \cos \varphi$. A Lagrange-függvény:

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi.$$

A Lagrange-egyenlet:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0,$$

ami megegyezik az elemi megfontolások alapján nyert egyenlettel.

A fenti gondolatmenetben kihasználtuk, hogy az erők egy potenciális energia negatív gradienseként állíthatók elő. Ha a rendszerben nemkonzervatív erők is hatnak, azokat külön kell figyelembe venni. Ekkor

$$Q_j = Q_j^0 + Q_j^*,$$

ahol $Q_j^0 = -\frac{\partial U^0}{\partial q_j}$ alakban az U^0 potenciálból származtatható, és Q_j^* jelöli a nemkonzervatív összetevőt. A mozgásegyenlet ezzel a felbontással

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L^0}{\partial q_j} = Q_j^*$$

alakban áll fenn, ahol $L^0 = K - U^0$.

Érdeemes észrevenni, hogy ha a rendszerben a konzervatív erők mellett, csak időfüggő $Q_j(t)$ erők is hatnak, azokat az L Lagrange-függvényben egy $q_j Q_j(t)$ tag hozzáadásával lehet figyelembe venni:

$$L = L^0 + q_j Q_j(t),$$

hiszen a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

egyenletből valóban azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L^0}{\partial q_j} = Q_j(t).$$

Az erőkomponensek a sebességtől is függhetnek. A gyakorlatilag fontos esetek egyike, az olyan súrlódási erő megjelenése, amelynek nagysága arányos a sebességgel:

$$X_i^* = -k_i \dot{x}_i.$$

Az ilyen alakú erőkomponens a következő derivált formájában állítható elő:

$$X_i^* = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i},$$

ahol $D = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3n} k_l \dot{x}_l^2$ az ún. disszipációs függvény. A megfelelő általános erőkomponensre kapjuk, hogy

$$Q_j^* = \sum_{i=1}^{3n} X_i^* \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j},$$

ahol kihasználtuk a korábban levezetett (53) összefüggést. A Lagrange-egyenlet jobb oldalát így szintén általános formában kapjuk meg:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L^0}{\partial q_j} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}.$$

Egy további fontos eset, amikor az általános erőkomponenseket valamilyen U függvényből az alábbi alakban tudjuk előállítani.

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}.$$

Az ilyen U függvényt általánosított potenciálnak hívjuk. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy a Lagrange-egyenlet a $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$ formában továbbra is fennáll, ha a Lagrange-függvényt ekkor is az $L = K - U$ alakban definiáljuk.

Az általánosított potenciál használatára fontos példa az elektromágneses térben mozgó e töltésű, m tömegű ponttöltés esete, aminek Descartes-koordinátákban felírt mozgásegyenlete:

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (56)$$

Az általánosított potenciál megtalálásához írjuk fel az elektromágneses tér viselkedését leíró Maxwell-egyenleteket:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

A harmadik egyenletet ki tudjuk elégíteni, ha a mágneses indukció vektorát valamilyen $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektormező rotációjaként állítjuk elő:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Helyettesítsük be ezt az előállítást a második egyenletbe:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

A Young-tétel alapján cseréljük fel a rotációképzés és az idő szerinti parciális deriválás sorrendjét és egyben rendezzük az egyenletet egy oldalra:

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

A feltétel szerint a zárójelben álló kifejezés valamilyen skalármező gradienseként állítható elő:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\Phi,$$

amiből \mathbf{E} kifejezhető

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Látjuk, hogy mind a mágneses tér, mind az elektromos tér előállítható az \mathbf{A} és a Φ függvény segítségével. Ezek neve rendre vektorpotenciál és skalárpotenciál.

Behelyettesítéssel meggyőződünk arról, hogy az alábbi függvény általánosított potenciálként szolgál a mozgó ponttöltés számára:

$$U = e\Phi - e\mathbf{A}\mathbf{v}.$$

A Lagrange-függvény ekkor

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - e\Phi + e\mathbf{A}\mathbf{v}.$$

A Lagrange-egyenletet indexes írásmódban írjuk fel

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Az első tagban:

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + eA_i,$$

ahol A_i az \mathbf{A} vektorpotenciál i -edik komponensét jelöli. Az idő szerinti teljes derivált

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = m\dot{v}_i + e \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_j} v_j + e \frac{\partial A_i}{\partial t}.$$

A második tag:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + e \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j.$$

A teljes egyenlet tehát átrendezés után:

$$m\dot{v}_i = e \left(-\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + e \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) v_j. \quad (57)$$

Az első zárójelben álló kifejezés a fenti definíciók szerint az \mathbf{E} elektromos térerősség i -edik komponense. A második összegről pedig belátjuk, hogy az nem más mint a

Lorentz-erő $(e\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$ i -edik komponense. Ehhez definiáljuk az ε_{ijk} ún. teljesen antiszimmetrikus egységtenzort (mátrixot):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1; i = 1, j = 2, k = 3 \text{ és ezek ciklikus cseréje esetén,} \\ -1; i = 2, j = 1, k = 3 \text{ és ezek ciklikus cseréje esetén,} \\ 0; \text{ más esetekben.} \end{cases}$$

Két vektor vektorszorzatának n -edik komponensét pl. ennek segítségével az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_n = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{njk} a_j b_k$ alakban írhatjuk fel. Hasonló módon egy \mathbf{a} vektor rotációjának n -edik komponense a $(\text{rota})_n = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{njk} \frac{b_k}{\partial x_j}$ alakban adható meg.

Írjuk fel a Lorent-erőt és fejezzük ki a mágneses indukciót a vektorpotenciál rotációjaként:

$$(e\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = e \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v_j B_k = e \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial A_m}{\partial x_l}.$$

Használjuk fel az $\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ azonosságot, amivel:

$$(e\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = e \sum_{j,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l} = e \sum_j v_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right).$$

Így valóban megkaptuk a (56) mozgásegyenletet.

16. Normálkoordináták - normálrezgések

Az egy szabadsági fokú rendszerek rezgéseit korábban tárgyaltuk. Egy több szabadsági fokú, konzervatív rendszerben is kialakulhatnak rezgések, ha a potenciális energia lokális minimummal bír. A mozgás leírásához alkalmas keretet szolgáltat a Lagrange-formalizmus.

Tételezzük fel, hogy egy f szabadsági fokú rendszer $V(q_1, q_2, \dots, q_f)$ potenciális energiájának a konfigurációs tér $(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{f0})$ helyén lokális minimuma van. Fejtsük Taylor-sorba a potenciált a minimum-pont körül

$$\begin{aligned} V(q_1, q_2, \dots, q_f) &= V(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{f0}) + \sum_{i=1}^f \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_{i0}} (q_i - q_{i0}) \\ &+ \sum_{i,j=1}^f \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_{i0}} (q_i - q_{i0})(q_j - q_{j0}) + \dots \end{aligned}$$

Az első tag állandó, ami a potenciális energiában tetszőlegesen választható és így érdemes nullának venni. A második tagban a potenciális energia deriváltjai szerepelnek, amik a minimumhelyen eltűnnek. Az első megmaradó tagok, amelyek már szerepet játszanak a mozgásban, a koordinátákban másodrendűek. Ha kis kitéréseket tekintünk, a magasabb rendű tagok járulékát elhanyagolhatjuk. Ha az origót a $(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{f0})$ koordinátákkal megadott minimumhelyre toljuk és a

$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_{i0}}$ deriváltakat b_{ij} -vel jelöljük, a potenciális energia a koordinátáknak pozitív definit kvadratikus alakja lesz:

$$V(q_1, q_2, \dots, q_f) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f b_{ij} q_i q_j, \quad (b_{ij} = b_{ji}).$$

A kinetikus energia a sebességkomponenseknek szintén pozitív definit kvadratikus alakjában állítható elő

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

ahol $a_{ij} = a_{ji}$. A Lagrange-függvény

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f (a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - b_{ij} q_i q_j).$$

A megfelelő Lagrange-féle mozgásegyenletek

$$\sum_{j=1}^f (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} q_j) = 0, \quad i = 1, \dots, f,$$

amik egy másodrendű, közönséges, homogén, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenlet-rendszert alkotnak.

A megoldást

$$q_j = C_j \cos(\omega t + \delta)$$

alakban keressük, amit behelyettesítve a

$$\sum_{j=1}^f [b_{ij} - \omega^2 a_{ij}] C_j \cos(\omega t + \delta) = 0$$

egyenletrendszerre jutunk. A közös, időfüggő tényezővel osztva, C_j -re homogén, lineáris egyenletrendszert kapunk

$$\sum_{j=1}^f (b_{ij} - \omega^2 a_{ij}) C_j = 0. \quad (58)$$

Szorozzuk be az (58) egyenletet C_i^* komplex konjugálttal és összegezzünk i szerint is.

$$\sum_{j,i=1}^f (b_{ij} - \omega^2 a_{ij}) C_j C_i^* = 0,$$

amiből ω^2 kifejezhető

$$\omega^2 = \frac{\sum_{j,i=1}^f b_{ij} C_j C_i^*}{\sum_{j,i=1}^f a_{ij} C_j C_i^*}.$$

Ha $C_j = A_j + B_j i$ tetszőleges alakú komplex szám, akkor a számlálóra írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j,i=1}^f b_{ij} (A_j + B_j i) (A_i - B_i i) &= \sum_{j,i=1}^f b_{ij} [A_j A_i + B_j B_i + (A_i B_j - A_j B_i) i] \\ &= \sum_{j,i=1}^f b_{ij} [A_j A_i + B_j B_i], \end{aligned}$$

ahol $b_{ij} = b_{ji}$ miatt a kerek zárójelben álló kifejezés járuléka, annak antiszimmetrikus volta miatt eltűnik. Az eredmény két pozitív definit kvadratikus alak összege. Hasonlóan adódik ugyanez a nevezőre is, és így ω^2 értéke pozitív valós szám kell legyen.

Az (58) egyenletrendszernek akkor lehet nemtriviális megoldása, ha

$$\det (b_{ij} - \omega^2 a_{ij}) = 0.$$

A determináns ω^2 -re nézve f fokú $P_f(\omega^2)$ polinom, aminek általában f darab ω_α^2 megoldása van ($\alpha = 1, 2, \dots, f$). A megfelelő ω_α értékeket a rendszer sajátfrekvenciáinak hívjuk. Ha az egyenletrendszer ω_α -hoz tartozó megoldását $C_{\alpha j}$ jelöli, a mozgás-egyenlet megfelelő partikuláris megoldása

$$q_{\alpha j} = D_\alpha C_{\alpha j} \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha),$$

ahol D_α és δ_α tetszőleges állandó. Az általános megoldás a partikuláris megoldások összege lesz

$$q_j = \sum_{\alpha=1}^f D_\alpha C_{\alpha j} \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha),$$

ami azt mutatja, hogy a rendszer általános mozgása egyszerű harmonikus rezgések szuperpozíciójával állítható elő.

Vezessük be a megoldásban a $\Theta_\alpha(t) = D_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha)$ jelölést, amivel

$$q_j = \sum_{\alpha=1}^f C_{\alpha j} \Theta_\alpha.$$

Ez az összefüggés értelmezhető a q_j koordinátákról az új Θ_α általános koordinátákra történő áttérés definíciójának is. Írjuk fel a Lagrange-függvényt az új változóknak

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f (a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - b_{ij} q_i q_j) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ i,j=1}}^f (a_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j} \dot{\Theta}_\alpha \dot{\Theta}_\beta - b_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j} \Theta_\alpha \Theta_\beta).$$

Az (58) egyenlet szerint

$$\sum_{i=1}^f b_{ij} C_{\alpha i} = \sum_{i=1}^f \omega_\alpha^2 a_{ij} C_{\alpha i} \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^f b_{ij} C_{\beta j} = \sum_{j=1}^f \omega_\beta^2 a_{ij} C_{\beta j}.$$

Szorozzuk be az első egyenletet $C_{\beta j}$ -vel, a második egyenletet pedig $C_{\alpha i}$ -vel és szummázzunk a másik index szerint is

$$\sum_{i,j=1}^f b_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j} = \sum_{i,j=1}^f \omega_{\alpha}^2 a_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j} \quad \text{és} \quad \sum_{i,j=1}^f b_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j} = \sum_{i,j=1}^f \omega_{\beta}^2 a_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j}. \quad (59)$$

A két egyenlet különbsége

$$\sum_{i,j=1}^f (\omega_{\beta}^2 - \omega_{\alpha}^2) a_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j} = 0,$$

ami azt jelenti, hogy különböző frekvenciák esetén

$$\sum_{i,j=1}^f a_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j} = 0.$$

A $C_{\alpha j}$ értékek homogén egyenlet megoldásából adódtak, így csak egy konstans szorzó erejéig vannak meghatározva. Használjuk ki ezt arra, hogy a fenti összeget az $\alpha = \beta$ esetében viszont, egységnyi értékűre állítjuk be, amit összefoglalhatunk egy egyenletben

$$\sum_{i,j=1}^f a_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Az (59) egyenletek szerint viszont

$$\sum_{i,j=1}^f b_{ij} C_{\alpha i} C_{\beta j} = \omega_{\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta}.$$

Felhasználva az utóbbi összefüggéseket a Lagrange-függvény végül az

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^f \left(\delta_{\alpha\beta} \dot{\Theta}_{\alpha} \dot{\Theta}_{\beta} - \omega_{\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta} \Theta_{\alpha} \Theta_{\beta} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^f \left(\dot{\Theta}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha}^2 \right)$$

alakot ölti. A megfelelő mozgásegyenlet

$$\ddot{\Theta}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha} = 0,$$

ami valóban a harmonikus rezgés egyenlete. Az így bevezetett Θ_{α} általános koordinátákat normálkoordinátáknak, a rendszerben kialakuló rezgéseket normálrezgéseknek hívjuk.

Tekintsük példaként két darab m tömegű tömegpontot, amelyek az x tengely mentén mozoghatnak úgy, hogy egyenként egy-egy D direkciós erejű rugóhoz csatoltuk őket. A két tömegpontot csatolja egymáshoz is egy D' állandójú rugó, ami nyújtatlan állapotban van a tömegpontok csatolás nélküli egyensúlyi helyzetében. Ha a tömegpontok koordinátái x_1 és x_2 , a Lagrange-függvény

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{D}{2} x_1^2 - \frac{D}{2} x_2^2 - \frac{D'}{2} (x_1 - x_2)^2.$$

Leolvashatjuk, hogy

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} D + D' & -D' \\ -D' & D + D' \end{pmatrix}.$$

A frekvenciákat meghatározó determináns

$$\begin{vmatrix} D + D' - \omega^2 m & -D' \\ -D' & D + D' - \omega^2 m \end{vmatrix} = (D - \omega^2 m)(D + 2D' - \omega^2 m) = 0.$$

A rendszer sajátfrekvenciái a másodfokú egyenlet megoldásából

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{m}}.$$

17. Hamilton-elv

Az előző szakaszban a Lagrange-egyenletet a d'Alembert-elvből vezettük le, ami ún. differenciális elv. Az alábbiakban a levezetést más módszerrel is elvégezzük, ami további következtetésekre ad lehetőséget.

A matematikai módszer alapelveinek megismeréséhez vizsgáljuk a következő problémát.

Az (x, y) síkban adott (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontok között keressük a legrövidebb folytonos (rektifikálható) görbét. A lehetséges görbék hosszát az alábbi integrál adja meg

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

ahol a görbét $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres alakban adtuk meg. A t paraméter a görbe kezdőpontjában veszi fel a t_1 és a végpontjában a t_2 értéket, azaz $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$ és $x_2 = x(t_2)$, $y_2 = y(t_2)$.

A probléma az ún. variációszámítás alapfeladata, ami szerint egy vagy több olyan ismeretlen $y_i(t)$ függvényt keresünk, amelyek mellett egy, a függvényeket tartalmazó integrál értéke szélsőértéket vesz fel. Az integrál a következő általános alakú lehet:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F \left[y_i(t), y_i'(t), \dots, y_i^{(n)}(t), t \right] dt,$$

ahol az F ún. alapfüggvény előre adott módon függ a k darab ismeretlen $y_i(t)$ függvénytől ($i = 1, \dots, k$), azok deriváltjaitól, valamint t -től.

Vizsgáljuk meg, hogyan változik az I integrál értéke, ha az $y_i(t)$ függvényeket kismértékben megváltoztatjuk, azaz minden t értékénél eltérő értéket adunk nekik azzal a kikötéssel, hogy a t_1 és t_2 értékeknél az eltérés nulla ("A-variáció"). Jelölje az $y_i(t)$ értékében bekövetkezett változást $\delta y_i(t)$, amire $\delta y_i(t_1) = \delta y_i(t_2) = 0$. Ezt a függvényt az $y_i(t)$ függvény variációjának hívjuk. Az integrál δI változását (variációját)

úgy tudjuk kiszámítani, hogy vesszük az új, megváltozott $y_i(t) + \delta y_i(t)$ függvénnyel az értékét és levonjuk belőle az eredeti $y_i(t)$ függvényre kapott értéket.

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} F \left[y_i(t) + \delta y_i(t), y_i'(t) + \delta y_i'(t), \dots, y_i^{(n)}(t) + \delta y_i^{(n)}(t), t \right] dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} F \left[y_i(t), y_i'(t), \dots, y_i^{(n)}(t), t \right] dt. \end{aligned}$$

Mivel a két integrált ugyanarra az intervallumra képezzük, közös integrál alá lehet őket vonni:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{aligned} &F \left[y_i(t) + \delta y_i(t), y_i'(t) + \delta y_i'(t), \dots, y_i^{(n)}(t) + \delta y_i^{(n)}(t), t \right] \\ &- F \left[y_i(t), y_i'(t), \dots, y_i^{(n)}(t), t \right] \end{aligned} \right\} dt.$$

Az integrandus nem más, mint az F függvénynek az $y_i(t)$ függvények változása miatt bekövetkezett δF megváltozása (variációja):

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta F dt.$$

Fejtsük ki δF -et az argumentumok megváltozása szerinti első rendű közelítésben

$$\delta F = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^n \frac{\partial F}{\partial y_i^{(j)}} \delta y_i^{(j)},$$

amivel

$$\delta I = \sum_{i=1}^k \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=0}^n \frac{\partial F}{\partial y_i^{(j)}} \delta y_i^{(j)} dt.$$

Az integrálást azért vittük be az i indexre való összegzés mögé, hogy egy-egy integrálban csak adott i indexű y_i függvény és deriváltjainak variációja szerepeljen.

A továbbiakhoz használjuk ki azt, hogy a variálás és deriválás sorrendje felcserélhető, azaz

$$\delta y_i^{(j)} = \frac{d^j \delta y_i}{dt^j},$$

hiszen itt a variáció alatt két függvény egyező t argumentumnál vett különbségét értjük, amiben deriváltat tagonként lehet képezni. Az i -edik integrál ezzel

$$\delta I_i = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=0}^n \frac{\partial F}{\partial y_i^{(j)}} \frac{d^j \delta y_i}{dt^j} dt$$

alakot vesz fel. A $j = 0$ indexű tagban a szorzó tényező a δy_i variáció. A $j = 1$ indexű tagon végezzünk parciális integrálást:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y_i^{(1)}} \frac{d \delta y_i}{dt} dt = \frac{\partial F}{\partial y_i^{(1)}} \delta y_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^{(1)}} \right) \delta y_i dt.$$

Definíció szerint δy_i értéke t_1 és t_2 -nél nulla, így az első tag eltűnik.

A $j > 1$ indexű tagokkal hasonló módon járhatunk el. Ha többször alkalmazzuk a parciális integrálást szintén olyan integrálkifejezésekre jutunk, amelyekben megjelenik a δy_i szorzó tényező. Ennek megfelelően a δI variáció így alakul:

$$\delta I = \sum_{i=1}^k \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y_i^{(1)}} + \dots \right) \delta y_i dt.$$

Ha az y_i függvények megválasztása olyan, hogy az I integrál szélsőértéket vesz fel, a δI variáció el kell tűnjön. Ennek megfelelően, mivel a szummában a tagok függetlenül veszik fel az értéküket, minden tagnak külön-külön el kell tűnnie.:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y_i^{(1)}} + \dots \right) \delta y_i dt = 0.$$

Az integrálban δy_i szabadon megadható függvény, így az integrál csak úgy tűnhet el azonosan, ha a zárójelben álló tényező értéke nulla:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y_i^{(1)}} + \dots = 0.$$

A nyert differenciálegyenlet(ek) neve Euler-Lagrange-egyenlet(ek). Az eredeti $\delta I = 0$ variációs probléma megoldásának keresését ilyen módon differenciálegyenletek megoldásának keresésére vezettük vissza.

Oldjuk meg az eredeti példánkat, ahol $F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ volt. A két keresendő függvény $x(t)$ és $y(t)$. Vegyük észre, hogy a legmagasabb fokú derivált, ami szerepel benne, első fokú, ugyanakkor maguk a függvények nem fordulnak elő, így az egyenletek a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\partial \dot{x}} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\partial \dot{y}} &= 0. \end{aligned}$$

t szerint integrálva és a kijelölt parciális deriválásokat elvégezve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= A, \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= B. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer \dot{x} és \dot{y} -ra nézve algebrai egyenletrendszer, aminek megoldása:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C, \\ \dot{y} &= D \end{aligned}$$

alakú. A megfelelő görbe az egyenes, ahogy az várható volt.

Vegyük észre, hogy a mechanikai rendszerek (55) Lagrange-egyenlete szintén variációs feladat Euler-Lagrange-egyenleteként származtatható, amennyiben az F alapfüggvénynek a Lagrange-függvényt választjuk:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Mivel a klasszikus mechanikában a Lagrange-függvény általában nem tartalmazza a koordináták elsőnél magasabb rendű idő szerinti deriváltját, az S ún. hatásfüggvényre kirótt

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

variációs feltételből származtatott Euler-Lagrange-egyenletek alakja

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

lesz, ami megegyezik a (55) egyenletekkel.

A mozgásegyenletek tehát származtathatók a $\delta S = 0$ variációs feltételből, amelynek neve Hamilton-elv. Ez a mechanika egy ún. integrális elve, szemben a korábban megismert differenciális elvekkel.

A Hamilton-elv fenti megfogalmazása holonom, konzervatív rendszerekre vonatkozik. Lehetséges azonban az elvet úgy általánosítani, hogy nem konzervatív és anholonom rendszerekre is alkalmazható legyen.

Legyen a nemkonzervatív rendszer kinetikus energiája K és jelöljük a rendszerre ható (esetleg nem konzervatív) erőkomponenseket X_i -vel. Írjuk fel a d'Alembert-elvet:

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0$$

és az első tag ismert átalakításával az X_i erőkomponensek virtuális munkáját adjuk meg az általános erőkkkel:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i = \sum_{i=1}^f Q_i \delta q_i.$$

A második tagot alakítsuk szorzat deriváltjává:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{d(\dot{x}_i \delta x_i)}{dt} - \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d(\delta x_i)}{dt}.$$

A második tagban használjuk ki, hogy a variálás és a deriválás sorrendje felcserélhető:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{d(\dot{x}_i \delta x_i)}{dt} - \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i.$$

A második tag a kinetikus energia variációja:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{3n} \delta \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} = \delta K.$$

A d'Alembert-elv ezek alapján a

$$\delta A - \sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{d(\dot{x}_i \delta x_i)}{dt} + \delta K = 0,$$

azaz

$$\delta A + \delta K = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} (m_i \dot{x}_i \delta x_i),$$

alakot ölti. Integráljuk az egyenletet idő szerint:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta K) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} (m_i \dot{x}_i \delta x_i) dt = \sum_{i=1}^{3n} (m_i \dot{x}_i \delta x_i) \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Mivel az időintervallum elején és végén a variálási szabályunk szerint δx_i eltűnik nyerjük az ún. általánosított Hamilton-elvet:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta K) dt = 0.$$

A korábban már végrehajtott átalakítás szerint

$$\delta K = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i,$$

amivel végül is az alábbi egyenletet nyerjük:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + Q_i \right) \delta q_i dt = 0.$$

Mivel a δq_i tetszőlegesen választható, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + Q_i = 0,$$

ami a már megismert mozgásegyenlettel egyenlő.

Anholonóm kényszerek esetén az általános koordinátákat nem tudjuk úgy megválasztani, hogy a

$$\sum_{i=1}^f a_{ji} \frac{dq_i}{dt} + a_{j0} = 0$$

kényszerfeltételeket ne kelljen külön figyelembe venni. Ennek megfelelően a

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + Q_i \right) \delta q_i dt$$

variáció eltűnéséből nem következik közvetlenül a zárójelben álló kifejezés eltűnése, hiszen a δq_i variációk között fenn kell álljanak a

$$\sum_{i=1}^f a_{ji} \delta q_i = 0$$

kényszerkapcsolatok. Ezt a Lagrange-féle multiplikátorok alkalmazásával vehetjük figyelembe aminek megfelelően az integrandust kiegészítjük a

$$\sum_{k=1}^s \lambda_k \sum_{i=1}^f a_{ki} \delta q_i = 0$$

összeggel.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + Q_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k a_{ki} \right) \delta q_i dt$$

A módszer elve szerint a δq_i -k ekkor már függetlennek tekinthetők és így az integrál eltűnésének feltétele, hogy

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + Q_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k a_{ki} = 0$$

legyen. Ez valóban a keresett mozgásegyenlet, ami a fenti kényszeregyenletekkel együtt oldandó meg.

Anholonom, konzervatív rendszer esetén az első három tag Lagrange-függvényből származtatható:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^s \lambda_k a_{ki} = 0.$$

18. Megmaradó mennyiségek

A Hamilton-elv alapján a rendszerek viselkedéséről fontos állításokat tehetünk. Az általános tétel bemutatása előtt azonban vizsgáljunk meg néhány konkrét összefüggést. Vizsgáljuk meg a $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ Lagrange-függvény időbeli változását, azaz készítsük el az idő szerinti teljes deriváltját:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Az Euler-Lagrange-egyenlet szerint

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

tehát

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

A zárójelben álló kifejezés szorzat deriváltja, így:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Átrendezve

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

adódik. Konzervatív rendszerben a Lagrange-függvény explicite nem függ az időtől, azaz $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, így a

$$C = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

mennyiség megmaradó mennyiség. A kifejezés értékének meghatározásához alkalmazzuk Euler tételét a homogén függvényekről. n -ed rendű homogén függvény egy $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ függvény, ha tetszőleges x_i behelyettesítési értékekre az α paraméter tetszőleges választása esetén fennáll, hogy

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_k) = \alpha^n f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Ekkor Euler tétele szerint

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i} x_i = n f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

(A bizonyításhoz elég képezni a fenti egyenlet α szerinti deriváltját az $\alpha = 1$ helyen.)

Konzervatív rendszer esetén a Lagrange-függvénybeli kinetikus energia a sebességeknek csak kvadrátikus alakját tartalmazza, azaz K a sebességeknek másodrendű homogén függvénye. Ekkor

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2K.$$

A C mennyiségre pedig azt kapjuk, hogy

$$C = 2K - L = 2K - K + U = K + U,$$

azaz a teljes energiával egyenlő.

Vezessük be a Lagrange-függvény segítségével az ún. kanonikus vagy általános impulzus fogalmát:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Amennyiben a Lagrange-függvény nem függ explicitely valamelyik q_i koordinátától, azaz $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, a megfelelő p_i kanonikus impulzus megmaradó mennyiség lesz. A mozgásegyenlet szerint ui.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i$$

és így p_i állandó. A megfelelő q_i koordinátát ciklikus koordinátának hívjuk.

Érdekes megvizsgálni a kanonikus impulzus jelentését. Egy Descartes-koordinátákban megadott konzervatív rendszer esetén, ahol $L = K - U$, a kanonikus impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$$

megegyezik a korábban bevezetett impulzussal.

Tekintsük azonban az elektromágneses térben mozgó ponttöltést, aminek a Lagrange-függvénye általánosított potenciált tartalmaz:

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - e\Phi + e\mathbf{A}\mathbf{v}.$$

A kanonikus impulzusok ebből

$$p_i = mv_i + eA_i,$$

ami eltér mv_i -től. Az utóbbit, a megkülönböztetés céljából kinetikus impulzusnak nevezzük, mivel ez valóban a részecske mozgásával függ össze és a környezettel való pillanatnyi kölcsönhatásokban (pl. ütközés) ez játszik szerepet.

Legyen valamely x_i koordináta ciklikus, azaz $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, akkor a megfelelő megmaradó mennyiség a $p_i = mv_i + eA_i$ lesz.

Ha az elektromágneses tér sztatikus és ennek megfelelően Φ és \mathbf{A} nem függ az időtől, akkor a töltött részecske Lagrange-függvénye sem függ az időtől és a fent bevezetett C mennyiség állandó lesz:

$$C = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = (m\mathbf{v} + e\mathbf{A})\mathbf{v} - \left(\frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - e\Phi + e\mathbf{A}\mathbf{v} \right),$$

azaz

$$C = K + e\Phi,$$

ami a kinetikus és az elektrosztatikus (potenciális) energia összege.

A megmaradó mennyiségekről egy általános tételt is ki tudunk mondani, a Hamilton-féle variációs elv tulajdonságainak vizsgálatával.

A Lagrange-egyenlet alakjából következik, hogy adott mozgásegyenletre vezető Lagrange-függvények nem egyértelműen adhatók meg. Vegyük észre ui., hogy egy

adott L Lagrange-függvényhez hozzáadhatjuk egy tetszőleges $f(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$ függvény teljes időszerinti deriváltját:

$$L' = L + \frac{d}{dt}f,$$

azaz

$$L' = L + \sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Helyettesítsük be L' -t a Lagrange-egyenletbe.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L - \frac{\partial}{\partial q_i} L + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = 0.$$

Írjuk le külön a harmadik és negyedik tagot és végezzük el a deriválásokat

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} - \sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i}$$

és használjuk ki, hogy a Young-tétel szerint az utolsó átalakítás után megjelent első és harmadik tag értéke egyenlő. A nyert összeg tehát eltűnik, ami azt jelenti, hogy az eredeti L Lagrange-függvényből származtatott egyenletre jutunk.

Nézzük meg, hogy ez az eredmény milyen kapcsolatban áll a Hamilton-elvvel. Írjuk fel az L' függvény integráljának variációját:

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f dt. \quad (60)$$

A második tagban elvégezzük az integrálást:

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \delta f(q(t_2), t_2) - \delta f(q(t_1), t_1).$$

A szabály szerint a végpontokban, azaz a t_1 és t_2 időpontban $q(t)$ -t nem variáljuk, így a második és harmadik tag nulla. Ennek megfelelően

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

ami azt jelenti, hogy $\delta S'$ akkor tűnik el, ha az eredeti L Lagrange-függvény variációja eltűnik, azaz fennáll az eredeti mozgásegyenlet.

A Lagrange-függvény fenti tulajdonsága kapcsolatot teremt a megmaradó mennyiségek és a fizikai rendszer szimmetriái között. Szimmetria alatt olyan transzformációt értünk, amellyel szemben a fizikai rendszer tulajdonságai nem változnak, azaz nem változik meg a mozgásegyenlete.

Tekintsünk ui. egy olyan általános, infinitezimális koordinátatranszformációt, amelyet egy infinitezimális Δs paraméterrel jellemezhetünk a következő módon:

$$q_i \rightarrow q_i^* = q_i + \Delta s \xi_i,$$

ahol $\xi_i(q_i)$ adott, véges függvény. A koordináták, valamint időderiváltjaik változása ennek megfelelően

$$\begin{aligned}\Delta q_i &= \Delta s \xi_i, \\ \Delta \dot{q}_i &= \Delta s \dot{\xi}_i.\end{aligned}$$

Írjuk fel a Lagrange-függvény megváltozását és második lépésben vegyük figyelembe a koordináták megváltozásának fenti előállítását:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta q_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta s \xi_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta s \dot{\xi}_i. \quad (61)$$

Az első tagban használjuk ki a Lagrange-egyenletet

$$\Delta L = \left(\sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta s \xi_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta s \dot{\xi}_i \right).$$

A zárójelben álló kifejezés szorzat deriváltja, ahol kiemeltük a Δs közös tényezőt:

$$\Delta L = \frac{d}{dt} \left(\Delta s \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i \right).$$

Ha a fenti transzformációval generált változás olyan, hogy egy függvény teljes deriváltjával egyenlő, akkor nem változtatja meg a mozgásegyenleteket. ΔL alakja ekkor:

$$\Delta L = \frac{d}{dt} \Delta s f(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$$

lesz, ahol mesterségesen leválasztottuk a Δs szorzót azért, hogy az f függvény véges lehessen.

Tegyük egyenlővé ΔL két alakját és rendezzük egy oldalra az egyenlőséget:

$$\Delta s \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i - f \right) = 0.$$

Az eredmény szerint a zárójelben álló kifejezés egy megmaradó mennyiség:

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i - f = \text{állandó}. \quad (62)$$

Példaként vizsgáljuk meg milyen megmaradó mennyiséget kapunk, ha a q_j koordináta ciklikus, azaz $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$. A koordinátatranszformációt ekkor kézenfekvő úgy

választani, hogy a j -edik koordinátában hajtunk végre Δs mértékű eltolást. Ekkor $\xi_i = \delta_{i(j)}$ és $\dot{\xi}_i = 0$, ahol a zárójellel azt jeleztük, hogy j rögzített. A megfelelő változások:

$$\begin{aligned}\Delta q_i &= \Delta s \xi_i = \Delta s \delta_{i(j)}, \\ \Delta \dot{q}_i &= \Delta s \dot{\xi}_i = 0,\end{aligned}$$

amiből (61) alapján $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ miatt

$$\Delta L = 0.$$

Az f függvény azonosan nulla lehet, amiből (62) szerint a megmaradó mennyiség

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j,$$

ami a j -edik koordinátához rendelt kanonikus impulzussal egyenlő.

Másik fontos példa a centrálszimmetrikus erőterben mozgó tömegpont esetében található megmaradó mennyiség. Egyszerűség kedvéért rögtön csak kétdimenziós mozgást vizsgálunk. A Lagrange-függvény alakja $L = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - U(r)$. Írjuk fel hogyan változnak a Descartes-koordináták, ha az origó körül Δs szöggel forgatjuk el a rendszert.

$$\begin{aligned}\Delta x &= -\Delta s y, \\ \Delta y &= \Delta s x.\end{aligned}$$

A megfelelő paramétereket leolvashatjuk:

$$\begin{aligned}\xi_x &= -y, \\ \xi_y &= x.\end{aligned}$$

A Lagrange-függvény megváltozása (61) szerint

$$\Delta L = -\frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} (-\Delta s y) - \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} \Delta s x - m\dot{x}y\Delta s + m\dot{y}x\Delta s = 0,$$

mivel $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ és $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$.

A megmaradó mennyiség (62) alapján

$$-m\dot{x}y + m\dot{y}x$$

lesz, ami az impulzusmomentum z -komponensével egyenlő. Polárkoordináták használata esetén

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

és a φ szög ciklikus koordináta, amire alkalmazhatjuk az előző példa eredményét és az impulzusmomentumot mint megmaradó mennyiséget az ismert polárkoordinátás alakban kapjuk:

$$L_z = mr^2 \dot{\varphi}.$$

Kevésbé nyilvánvaló példa az x tengely mentén, g gyorsulással szabadon eső tömegpont esete, amelynek Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx.$$

Toljuk el a rendszert az x tengely mentén Δs -sel:

$$\Delta x = \Delta s,$$

azaz

$$\xi = 1.$$

A Lagrange-függvény változása (61) szerint:

$$\Delta L = mg\Delta s,$$

amihez könnyű f függvényt találni:

$$f = mgt.$$

A megmaradó mennyiség ebből:

$$m\dot{x} - mgt,$$

ami valóban konstans a szabadesés esetén.

A fenti megfontolások kiterjeszthetők olyan transzformációkra is, amelyek időbeli eltolásokat is tartalmaznak. Az energiát, mint megmaradó mennyiséget ezzel az általánosabb megközelítéssel találhatjuk meg.

19. Kanonikus formalizmus

Az $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ Lagrange-függvényt a hely, a sebesség és az idő függvényeként értelmeztük, aminek eredményeképp a mozgásegyenletek másodrendű differenciálegyenletek voltak.

A fent kifejtett Lagrange-formalizmus mellett létezik egy vele egyenértékű, másik megközelítés is, amelyben az egyenletek elsőrendűek és nagymértékű szimmetriát mutatnak.

Ebben a tárgyalásban a Lagrange-függvény segítségével definiálunk egy új függvényt, az ún. Hamilton-függvényt:

$$H = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L,$$

ahol $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, a korábban már bevezetett i -edik kanonikus impulzuskomponens. A $H = H(q_i, p_i, t)$ Hamilton-függvényt a q_i , p_i és a t változók függvényének tekintjük és így a \dot{q}_i általános sebességkomponenseket a kanonikus impulzusokat definiáló összefüggésekből történő $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_k, p_k, t)$ kifejezés után kiejtjük. A Hamilton-függvénynek

a Lagrange-függvényből történő fenti előállítás példája az ún. Legendre-féle függvény-transzformáció alkalmazására.

Írjuk fel a H Hamilton-függvény q_k szerinti parciális deriváltját:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^f \left(p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}.$$

A zárójelben álló két tag a kanonikus impulzus definíciója értelmében kiesik. Az utolsó tag a Lagrange-egyenlet szerint $-\dot{p}_i$ -vel egyenlő, aminek eredményeképp fennáll, hogy

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k.$$

A Hamilton-függvény p_k szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_{i=1}^f \left(p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} \right).$$

A zárójelben álló kifejezés a kanonikus impulzus definíciója szerint eltűnik:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k.$$

Írjuk fel az idő szerinti parciális deriváltat:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^f \left(p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial L}{\partial t},$$

azaz

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Foglaljuk össze a nyert egyenlőségeket egy egyenletrendszernek tekintve őket:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_k} &= -\dot{p}_k, \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} &= \dot{q}_k, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

A kapott egyenletek az ún. (Hamilton-féle) kanonikus egyenletek, amelyek elsőrendű, közönséges differenciálegyenlet-rendszert alkotnak. Látjuk, hogy a hely és impulzus komponensek egyenjogú szerepet játszanak, aminek a későbbiekben fontos szerepe lesz.

Példaként írjuk fel a szabadon eső tömegpontra vonatkozó kanonikus egyenleteket. A Lagrange-függvény

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx,$$

ahol az x tengely függőlegesen lefelé mutat. Készítsük el a kanonikus impulzust

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

amiből $\dot{x} = \frac{p}{m}$ és így

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} - mgx.$$

A kanonikus egyenletek:

$$\begin{aligned} -mg &= -\dot{p}, \\ \frac{p}{m} &= \dot{x}. \end{aligned}$$

Másik példaként vizsgáljuk a $U(r)$ centrális potenciáltérben mozgó tömegpont mozgását. Síkbeli r és φ polárkoordináták használata esetén a Lagrange-függvény:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

A megfelelő kanonikus impulzusok:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

A Hamilton-függvény definíciója szerint:

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L,$$

amiről korábban láttuk, hogy konzervatív, holonom-szkleronom rendszer esetén az értéke egyenlő a megmaradó energiával, azaz

$$H = K + U.$$

Írjuk fel a kinetikus energia járulékát:

$$K = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

A Hamilton-függvényben a sebességek helyett a kanonikus impulzusoknak kell szerepelniük, így a megfelelő alak:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + U(r)$$

lesz. Írjuk fel a kanonikus egyenleteket:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \varphi} &= -\dot{p}_\varphi, \text{ azaz } 0 = -\frac{d(mr^2\dot{\varphi})}{dt}, \\ \frac{\partial H}{\partial r} &= -\dot{p}_r, \text{ azaz } \frac{-p_\varphi^2}{mr^3} + \frac{\partial U}{\partial r} = -m\ddot{r}. \end{aligned}$$

A másik két egyenlet a kanonikus impulzusokat definiáló egyenletekkel ekvivalens:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dot{\varphi}, \text{ azaz } \frac{p_\varphi}{mr^2} = \dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{r}, \text{ azaz } \frac{p_r}{m} = \dot{r}.$$

Fontos példa az egydimenziós harmonikus oszcillátor, amelynek Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2.$$

A kanonikus impulzus:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

amivel a Hamilton-függvény

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}x^2.$$

Tanulságos példa a csillapított, harmonikus oszcillátor, aminek a mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Dx = 0.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a mozgásegyenlet a következő, időfüggő Lagrange-függvényből állítható elő

$$L = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - Dx^2) \exp\left(\frac{\alpha t}{m}\right).$$

A kanonikus impulzus

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \exp\left(\frac{\alpha t}{m}\right),$$

ami csak $t = 0$ időpontban egyezik meg az $m\dot{x}$ kinetikus impulzussal. A Hamilton-függvény

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} \exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right) + \frac{Dx^2}{2} \exp\left(\frac{\alpha t}{m}\right)$$

szintén időfüggő.

Külön említést érdemelnek az elektromágneses térben mozgó m tömegű és e elektromos töltésű részecske mozgásegyenletei. Láttuk, hogy ekkor a Lagrange-függvény:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi + e\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}},$$

és a kanonikus impulzusvektor:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}.$$

A Hamilton-függvény ennek alapján:

$$H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + e\Phi = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi.$$

Térjünk át indexes írásmódra ($i = 1, 2, 3$) és írjuk fel a mozgásegyenleteket:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = e \left[\sum_{j=1}^3 \frac{(p_j - eA_j)}{m} \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \right],$$

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i - eA_i}{m}.$$

a második egyenlet alapján az első egyenlet bal oldalába helyettesítsünk $\dot{p}_i = m\ddot{r}_i + e\dot{A}_i$ -ot, a jobb oldalon pedig az első tagban \dot{r}_j -ot:

$$m\ddot{r}_i + e\dot{A}_i = e \left(\sum_{j=1}^3 \dot{r}_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \right).$$

Átrendezve:

$$m\ddot{r}_i = e \left(\sum_{j=1}^3 \dot{r}_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \dot{A}_i - \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \right).$$

Fejtsük ki az $\dot{A}_i (= \frac{dA_i}{dt})$ deriváltat:

$$m\ddot{r}_i = e \left(\sum_{j=1}^3 \dot{r}_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \sum_{j=1}^3 \dot{r}_j \frac{\partial A_i}{\partial r_j} - \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \right) = e \sum_{j=1}^3 \dot{r}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j} \right) - e \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \right).$$

A (57) képlet elemzésénél beláttuk, hogy az első tag $(e\dot{\mathbf{r}} \times \text{rot}\mathbf{A})_i$ -vel, míg a második tag $(e\mathbf{E})_i$ -vel egyenlő és így

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e(\dot{\mathbf{r}} \times \text{rot}\mathbf{A} + \mathbf{E}).$$

Érdemes figyelni arra, hogy a skalár- és vektorpotenciálok nem egyértelműen adhatók meg. A vektorpotenciált a

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$$

egyenlőséggel definiáltuk. \mathbf{A} meghatározása nem egyértelmű, hiszen léteznek olyan, eltérő \mathbf{A}' vektormezők, amelyek rotációja megegyezik \mathbf{A} rotációjával:

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \text{rot}\mathbf{A}',$$

azaz

$$\text{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{A}') = 0.$$

A feltétel kielégíthető, ha a zárójelben álló kifejezés egy tetszőleges f függvény gradiensevel egyenlő:

$$\text{grad}f = \mathbf{A} - \mathbf{A}',$$

vagyis

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{grad}f.$$

A megfelelő Φ' skalárpotenciál ugyanazt az elektromos teret kell generálja, tehát

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad}\Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$$

kell legyen.

Beírva a vektorpotenciálokra nyert feltételt kapjuk, hogy

$$\text{grad} \left(\Phi' - \Phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) = 0.$$

Ez a feltétel is kielégíthető a

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial f}{\partial t}$$

választással.

Felmerül a kérdés, hogy mi történik a mozgásegyenletekkel, ha a Hamilton-függvényben is végrehajtjuk a fenti ún. másodrendű mértéktranszformációt? Ekkor az új kanonikus impulzus $\mathbf{p}' = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}'$ segítségével a Hamilton-függvény a fenti definíció szerint

$$H' = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}' - e\mathbf{A}')^2 + e\Phi' (\neq H)$$

lesz, ami eltér H -tól. Azt a kérdést, hogy a kanonikus egyenletek a megváltozott Hamilton-függvénnyel hogyan tudják ugyanazt a mozgást leírni a következő szakaszban vizsgáljuk meg.

20. Kanonikus transzformációk

A Lagrange-formalizmus alkalmazásánál láttuk, hogy a koordinátarendszer, azaz a q_i általános koordináták megválasztásában nagyfokú szabadságunk van, ami a mozgásegyenletek felírásánál és vizsgálatánál rendkívül előnyös.

A kanonikus egyenletekben a koordináták és a kanonikus impulzusok is egyenrangú szerepet játszanak. Így felmerül annak a lehetősége, hogy a koordináta-transzformációk értelmezését kiterjesszük és olyan transzformációkat is megengedjünk, amelyek a koordináták mellett az impulzusokat is transzformálják. A q_i koordináták által kifeszített f -dimenziós ún. "konfigurációs" tér koordináta-transzformációiról áttérünk a q_i -k és p_i -k által kifeszített $2f$ dimenziós "fázistér" koordináta-transzformációira.

A kanonikus egyenletek pl. nagyon könnyen megoldhatóvá válnak, ha megfelelő transzformációval a q_i általános koordináták ciklikussá tehetők, amikor H nem függ a q_i koordinátáktól. A Hamilton-függvény tehát nem tartalmazza a koordinátákat és így:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

Az egyenlet megoldása konstans:

$$p_i = \alpha_i.$$

Ha ezeket a konstansokat visszahelyettesítjük a Hamilton-függvénybe: $H = H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f)$, a kanonikus egyenletek másik csoportja is egyszerűen megoldható, hiszen a Hamilton-függvény deriváltjai is állandók.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i,$$

amiből

$$q_i = \omega_i t + c_i.$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételeknek kell eleget tenniük a régi q_i és p_i változókról az új Q_k és P_k változókra történő áttérést a

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_k(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t), \\ P_k &= P_k(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t), \\ &(k = 1, 2, \dots, f). \end{aligned}$$

egy-egy értelmű függvénykapcsolatokkal definiáló összefüggéseknek ahhoz, hogy a mozgásegyenletek továbbra is a kanonikus egyenletek

$$\begin{aligned} \dot{Q}_k &= \frac{\partial H'}{\partial P_k}, \\ \dot{P}_k &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} \end{aligned}$$

alakjában legyenek felírhatók, ahol $H' = H'(Q_k, P_k, t)$ az új változóban felírt Hamilton-függvényt jelöli. Az ilyen transzformáció neve kanonikus transzformáció.

A feltételek megtalálásához először vizsgáljuk meg, hogy a kanonikus formalizmusra történő áttérés milyen következményekkel jár a Hamilton-elvre vonatkozóan.

A Hamilton-elv eredeti megfogalmazása szerint $\delta S = 0$, ahol

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$$

a q_i koordináták által kifeszített f dimenziós konfigurációs térben felírt vonalmenti integrált jelöl. Számítsuk ki ugyanezt az integrált úgy, hogy most L helyébe az $L = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H$ alakot helyettesítjük:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H \right) dt.$$

Fejtsük ki a variációkat:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt.$$

A második tagban hajtsuk végre a parciális integrálást:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left(\delta p_i \dot{q}_i - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt + \sum_{i=1}^f p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Az utolsó tag értéke nulla mivel a végpontokban nem variálunk. Az integrandusban pedig csoportosítsuk a tagokat:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i \right) \delta q_i \right] dt.$$

A p_i és q_i változók független variálása esetén δS akkor és csak akkor tűnik el, ha fennállnak a kanonikus egyenletek, azaz a kerek zárójelben álló kifejezések nullák.

Látjuk tehát, hogy a Hamilton-elv a kanonikus formalizmus kereteiben úgy alkalmazandó, hogy a hely és impulzus komponenseket független változóknak tekinthetjük, és ennek megfelelően az $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ integrált a q_i -k és p_i -k által kifeszített $2f$ dimenziós fázistérben kell kiszámítanunk és variálnunk. A megfelelő elvet szokták módosított Hamilton-elvnek nevezni.

A fentiek alapján, az új változóiban akkor fognak fennállni a kanonikus egyenletek, ha a módosított Hamilton-elv az új változóiban is alkalmazható:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - H' \right) dt = 0.$$

Korábban láttuk, l. (60), hogy ugyanarra pályára vett vonalmenti integrálok variációi akkor nem különböznek egymástól, ha a két alapfüggvény csak egy teljes időszerinti deriválttal tér el egymástól. Ennek megfelelően felírhatjuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{dW}{dt}. \quad (63)$$

Mivel a két variáció értéke nulla, még egy szorzófaktort is megengedhetünk a bal oldalon. Tekintve, hogy a szorzófaktor nem vezet lényegesen új transzformációkra, azt a továbbiakban 1-nek fogjuk választani (ún. unimoduláris transzformációkat vizsgálunk).

A W függvény az időn kívül, a koordináták és impulzusok függvénye lehet. Mivel a régi és új változók egyértelműen előállíthatók egymásból, a W függvényt célszerű f darab régi és f darab új változó függvényében megadni. Négy alaptípust szokás megkülönböztetni, attól függően, hogy mik a változók:

$$W_1(q_i, Q_i, t), W_2(q_i, P_i, t), W_3(p_i, Q_i, t), W_4(p_i, P_i, t).$$

Alkalmazzuk az 1-es típust, amikor $W = W_1(q_i, Q_i, t)$. A teljes deriváltat kifejtve nyerjük, hogy

$$\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - H' + \sum_{i=1}^f \frac{\partial W_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial W_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial W_1}{\partial t},$$

vagy csoportosítva a tagokat

$$\sum_{i=1}^f \left(p_i - \frac{\partial W_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \left(P_i + \frac{\partial W_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i - H' + H + \frac{\partial W_1}{\partial t}.$$

Mivel a régi és új koordináták független változók, az egyenlőség akkor állhat fenn azonosan, ha \dot{q}_i és \dot{Q}_i együtthatói eltűnnek:

$$p_i = \frac{\partial W_1}{\partial q_i},$$

$$P_i = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_i},$$

valamint

$$H' = H + \frac{\partial W_1}{\partial t}$$

kell legyen. A W függvényt, ami a fenti egyenleteken keresztül megteremti a kapcsolatot a régi és új változók, valamint a régi és új Hamilton-függvény között, a kanonikus transzformáció alkotófüggvényének hívjuk.

A 2-es típusú W_2 alkotófüggvényt a W_1 -ből definiáljuk az alábbi függvénytranszformációval:

$$W_2 = W_1 + \sum_{k=1}^f P_k Q_k \left(= W_1 - \sum_{k=1}^f \frac{\partial W_1}{\partial Q_k} Q_k \right).$$

Ekkor W_2 saját változói q_i, P_i és t lesznek. Helyettesítsük be a (63) egyenletbe a $W_1 = W_2(q_i, P_i, t) - \sum_{k=1}^f P_k Q_k$ előállítást:

$$\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - H' + \sum_{i=1}^f \frac{\partial W_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial W_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial W_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^f \dot{P}_i Q_i - \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i.$$

Rendezzük az egyenletet és vegyük figyelembe, hogy a jobb oldal első és utolsó tagja kiesik:

$$\sum_{i=1}^f \left(p_i - \frac{\partial W_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial W_2}{\partial P_i} - Q_i \right) \dot{P}_i - H' + H + \frac{\partial W_2}{\partial t}.$$

Mivel a q_i és P_i változók függetlenek, az egyenlőséget akkor lehet azonosan kielégíteni, ha a zárójelben álló kifejezések eltűnnek

$$p_i = \frac{\partial W_2}{\partial q_i},$$

$$Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i}$$

és ennek megfelelően

$$H' = H + \frac{\partial W_2}{\partial t}.$$

A 3-as és 4-es típusú alkotófüggvények szintén hasonló módon definiálhatók:

$$W_3(p_i, Q_i, t) = W_1 - \sum_{k=1}^f p_k q_k \left(= W_1 - \sum_{k=1}^f \frac{\partial W_1}{\partial q_k} q_k \right),$$

$$W_4(p_i, P_i, t) = W_1 + \sum_{k=1}^f P_k Q_k - \sum_{k=1}^f p_k q_k \left(= W_1 - \sum_{k=1}^f \frac{\partial W_1}{\partial Q_k} Q_k - \sum_{k=1}^f \frac{\partial W_1}{\partial q_k} q_k \right).$$

Az (63) egyenletbe történő behelyettesítéssel az alábbi transzformációs egyenleteket nyerjük:

$$q_i = -\frac{\partial W_3}{\partial p_i},$$

$$P_i = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_i},$$

$$H' = H + \frac{\partial W_3}{\partial t},$$

valamint

$$q_i = -\frac{\partial W_4}{\partial p_i},$$

$$Q_i = \frac{\partial W_4}{\partial P_i},$$

$$H' = H + \frac{\partial W_4}{\partial t}.$$

Vizsgáljunk meg néhány példát.

1. Legyen az alkotófüggvény 1-es típusú

$$W_1 = \sum_{k=1}^f q_k Q_k.$$

A transzformációs egyenletek:

$$p_i = \frac{\partial W_1}{\partial q_i} = Q_i,$$

$$P_i = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_i} = -q_i.$$

A transzformáció felcseréli a koordinátákat és impulzusokat, ami mutatja, hogy a kanonikus formalizmusban a koordináták és impulzusok valóban egyenjogú szerepet játszanak.

2. Válasszuk az alábbi 2-es típusú alkotófüggvényt

$$W_2 = \sum_{k=1}^f q_k P_k.$$

A megfelelő transzformációs egyenletek:

$$p_i = \frac{\partial W_2}{\partial q_i} = P_i,$$

$$Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i} = q_i.$$

Ezek az identitás transzformáció egyenletei, azaz az új és régi koordináták és impulzusok megegyeznek egymással.

3. Tételezzük fel, hogy a konfigurációs térben a $Q_k = Q_k(q_i, t)$ leképezéssel szeretnénk koordinátatranszformációt végrehajtani. Belátjuk, hogy ez is kanonikus transzformációval érhető el. Válasszuk az alkotófüggvényt

$$W_2 = \sum_{k=1}^f Q_k(q_i, t) P_k$$

alakban. A transzformációs egyenletek:

$$p_i = \frac{\partial W_2}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial Q_k(q_i, t)}{\partial q_i} P_k,$$

$$Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i} = Q_i(q_i, t).$$

A második egyenlet valóban azt a koordináta-transzformációt írja le, amit végre akartunk hajtani. Az ilyen, ún. ponttranszformáció ezek szerint, mindig kanonikus. A számítás többleteredményeként, megkaptuk az impulzuskomponensek transzformációs szabályát is. Érdemes megemlíteni, hogy ha a ponttranszformációt a $q_k = q_k(Q_i, t)$ inverzfüggvényekkel definiáljuk, a $W_3 = -\sum_{k=1}^f q_k(Q_i, t) p_k$ alkotófüggvényt érdemes használni. Ekkor a

$$q_i = -\frac{\partial W_3}{\partial p_i} = q_i(Q_i, t),$$

$$P_i = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial q_k(Q_i, t)}{\partial Q_i} p_k$$

alakban kapjuk az eredményt, ami már a régi impulzusok függvényében állítja elő az új impulzusokat.

4. Ponttranszformációra elemi példa a síkbeli Descartes-koordináták és polárkoordináták közötti áttérés. Tanulságos ezt 3-as típusú alkotófüggvénnyel felírni:

$$W_3 = -p_x r \cos \varphi - p_y r \sin \varphi.$$

A számolási szabály szerint

$$x = -\frac{\partial W_3}{\partial p_x} = r \cos \varphi,$$

$$y = -\frac{\partial W_3}{\partial p_y} = r \sin \varphi.$$

Az áttérés második egyenletcsoportja szerint

$$\begin{aligned}P_r &= p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi, \\P_\varphi &= -p_x r \sin \varphi + p_y r \cos \varphi,\end{aligned}$$

ahol az impulzuskomponensek indexei a megfelelő konjugált koordinátákra utalnak.

5. Legyen a rugóra erősitett tömegpont Hamilton-függvénye

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{D}{2} x^2.$$

Válasszunk egy 1-es típusú alkotófüggvényt:

$$W_1 = \frac{\sqrt{mD}}{2} x^2 \cot Q.$$

A transzformációs összefüggések

$$\begin{aligned}p &= \frac{\partial W_1}{\partial x} = \sqrt{mD} x \cot Q, \\P &= -\frac{\partial W_1}{\partial Q} = \frac{\sqrt{mD}}{2} x^2 \frac{1}{\sin^2 Q}, \\H' &= H.\end{aligned}$$

A Hamilton-függvény értéke nem változik, de át kell térnünk az új változókra.

$$H' = \frac{1}{2m} m D x^2 \cot^2 Q + \frac{D}{2} x^2$$

Fejezzük ki x^2 -et a második egyenletből

$$x^2 = \frac{2P \sin^2 Q}{\sqrt{mD}}$$

és helyettesítsük be H' -be

$$H' = D \frac{P \sin^2 Q}{\sqrt{mD}} \cot^2 Q + D \frac{P}{\sqrt{mD}} \sin^2 Q = \sqrt{\frac{D}{m}} P = \omega P.$$

A Hamilton-függvény rendkívül egyszerűvé vált, és az új Q koordináta ciklikus. A kanonikus egyenletek

$$\begin{aligned}\dot{P} &= 0, \\ \dot{Q} &= \omega,\end{aligned}$$

amiknek a megoldása:

$$\begin{aligned}P &= \alpha \text{ (állandó)}, \\ Q &= \omega t + \beta.\end{aligned}$$

Az eredeti x változó kifejezhető Q -val és P -vel:

$$x = \sqrt{\frac{2P}{\sqrt{mD}}} \sin Q = \sqrt{\frac{2\alpha}{\sqrt{mD}}} \sin(\omega t + \beta).$$

6. Az elektromágneses térben mozgó ponttöltés Hamilton-függvénye

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi.$$

Hajtsunk végre kanonikus transzformációt a $W_2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} + ef(\mathbf{r}, t)$ alkotófüggvénnyel, ahol $f(\mathbf{r}, t)$ tetszőlegesen adott függvény. A transzformációs összefüggések:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{P} + e \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{r}}, \\ \mathbf{Q} &= \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Az új Hamilton-függvény

$$H' = H + \frac{\partial W_2}{\partial t} = H + e \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Helyettesítsük be az új változókat:

$$H' = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} + e \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{r}} - e\mathbf{A} \right)^2 + e \left(\Phi + \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

Látjuk, hogy a transzformáció eredménye olyan Hamilton-függvény, amelyben az új helyváltozó megegyezik a régivel. Ugyanakkor végrehajtottunk egy mértéktranszformációt az f mértékfüggvénnyel, mivel az $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{grad}f$ és $\Phi' = \Phi + \frac{\partial f}{\partial t}$ helyettesítéssel éppen az új \mathbf{P} kanonikus impulzusokkal felírt Hamilton-függvényt nyertük:

$$H' = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - e\mathbf{A}')^2 + e\Phi'.$$

Szintén látható, hogy az $m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ kinetikus impulzus nem változott a transzformáció során, hiszen fennáll, hogy

$$\mathbf{p} - e\mathbf{A} = \mathbf{P} - e\mathbf{A}'.$$

Ennek megfelelően a részecske állapotát Descartes-koordinátákban megadó hely- és sebességvektorok értéke nem változik!

21. Hamilton-Jacobi-egyenlet

Keressünk olyan kanonikus transzformációt, ami a kanonikus egyenleteket a lehető legegyszerűbb alakra hozza:

$$\frac{\partial H'}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0, \quad (64)$$

$$\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i = 0. \quad (65)$$

Ezt elérhetjük, ha az új H' Hamilton-függvénytől azt követeljük meg, hogy tűnjön el. Legyen a transzformáció alkotó függvénye 2-es típusú $S(q_i, P_i, t)$, amivel a transzformációs szabály:

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}, \\ p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ H' &= H + \frac{\partial S}{\partial t}. \end{aligned} \quad (66)$$

Az új Hamilton-függvény eltűnésének feltétele:

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Mivel az új P_i impulzusoktól a kanonikus egyenletek második csoportja, (65) szerint megköveteljük, hogy $P_i = \alpha_i$ konstansok legyenek, az S alkotófüggvény tulajdonképpen csak a q_i és t változóktól függ:

$$S = S(q_i, \alpha_i, t).$$

Figyelembe véve a második, (66) transzformációs egyenleteket, a Hamilton-függvényre vonatkozó fenti feltétel a

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (67)$$

alakot ölti, ami S -re nézve egy parciális differenciálegyenlet. Az egyenlet neve Hamilton-Jacobi-egyenlet és az S alkotófüggvényt principális függvénynek hívjuk.

A Hamilton-Jacobi-egyenlet, ami egy nemlineáris parciális differenciálegyenlet, nem mindig oldható meg zárt alakban, de ha találunk megoldást, a kanonikus egyenletek megoldása már közönséges algebrai egyenletek megoldásával adódik.

Vizsgáljuk meg az S principális függvény időbeli változását:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H = L.$$

Integrálva az összefüggést:

$$S(t) - S(t_0) = \int_{t_0}^t L dt$$

látjuk, hogy a principális függvény értéke megegyezik a Hamilton-elvet kielégítő hatásfüggvény értékével.

Ha a Hamilton-Jacobi-egyenlet egy megoldása $S(q_i, \alpha_i, t)$, ahol a megoldás tartalmaz f db α_i paramétert, alkalmazhatjuk az első transzformációs egyenleteket

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}.$$

Ugyanakkor az első kanonikus egyenlet (64) szerint $Q_i = \beta_i$ konstans, amiből

$$\beta_i = \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial \alpha_i}.$$

Az így nyert algebrai egyenletek rendszerét ($i = 1 \dots f$) q_j -re megoldva kapjuk az eredeti probléma $q_j = q_j(\alpha_i, \beta_j, t)$ megoldását, amiben az α_i és β_i konstansok megfelelő választhatósága teszi lehetővé az adott kezdeti feltételekhez való illesztést.

Tekintsük az egydimenziós harmonikus oszcillátor esetét:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{D}{2}x^2.$$

A megfelelő Hamilton-Jacobi-egyenlet:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{D}{2}x^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Az egyenlet megoldását az ilyen típusú parciális differenciálegyenletek esetén szokásos változósztválasztás módszerével kísérhetjük meg. A módszer értelmében feltételezzük, hogy a megoldásfüggvény két olyan tagra esik szét, amelyek csak egy változótól függenek, azaz

$$S = S_t(t) + S_0(x).$$

Behelyettesítve az

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_0(x)}{dx} \right)^2 + \frac{D}{2}x^2 + \frac{dS_t(t)}{dt} = 0$$

egyenletre jutunk. Mivel az első két tag csak x -től, a harmadik tag pedig csak az ettől függetlenül megadható t -től függ, az összegük csak úgy lehet konstans nulla, ha külön-külön konstans az értékük.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dS_0(x)}{dx} \right)^2 + \frac{D}{2}x^2 &= E, \\ \frac{dS_t(t)}{dt} &= -E. \end{aligned}$$

A nyert egyenletek közönséges, szeparábilis differenciálegyenletek, amelyek megoldhatók. A második egyenlet megoldása közvetlenül felírható

$$S_t(t) = -Et.$$

Az additív konstans tagot el is hagytuk, mivel a principális függvény értéke úgy is csak egy konstans erejéig van meghatározva, hiszen a Hamilton-Jacobi-egyenletben S -nek csak a deriváltjai szerepelnek!

Az első egyenlet megoldásához a szokásos átrendezés után jutunk el:

$$\frac{dS_0(x)}{dx} = \sqrt{m(2E - Dx^2)},$$

amiből

$$S_0(x) = \int \sqrt{m(2E - Dx^2)} dx.$$

Érdeemes észrevenni, hogy a továbblépéshez a primitív függvény explicit alakját nem is szükséges megadni, mivel a principális függvény α_i paraméterek szerinti deriváltjait kell egyenlővé tennünk új β_i konstansokkal, azaz a

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$$

feltételt kell felírnunk. Az $S = S_0 + S_t$ függvényben egyedül az E paraméter jelent meg, amiből a

$$\beta_E = \frac{\partial(S_0 + S_t)}{\partial E} = \int \frac{m}{\sqrt{m(2E - Dx^2)}} dx - t$$

feltételhez jutunk. Az integrál kiértékelhető

$$\beta_E + t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{D}{2E}x^2}} dx = \sqrt{\frac{m}{D}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \sqrt{\frac{m}{D}} \arcsin \sqrt{\frac{D}{2E}} x.$$

Invertálás után kapjuk a keresett megoldást:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{D}} \sin \left(\sqrt{\frac{D}{m}} (\beta_E + t) \right).$$

A fenti példából az is látható, hogy ha a Hamilton-függvény nem függ az időtől, az (67)

$$H \left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet megoldásánál az időváltozóra vonatkozó szétválasztást általában is megtehetjük és feltételezhetjük, hogy

$$S = S_0(q_1, q_2, \dots, q_f) + S_t(t)$$

alakban kereshető. A behelyettesítés a

$$H \left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial S_t}{\partial t} = 0$$

egyenletre vezet, amiben az első tag csak a koordinátáktól, a második tag pedig csak az időtől függ. A két tag összege csak úgy lehet nulla, ha mindkét tag állandó

$$H \left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \right) = E \text{ és } \frac{\partial S_t}{\partial t} = -E.$$

A második egyenletet azonnal meg tudjuk oldani:

$$S_t = -Et + \text{const.}$$

Az első egyenlet neve rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet, amiben a keresett S_0 rövidített hatásfüggvény már nem függ az időtől.

Tekintsük a ferde hajítás példáját. Descartes-koordinátákban a Hamilton-függvény:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

A megfelelő rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz = E,$$

ahol S_0 az x, y, z függvénye. Az egyenlet megoldásához újra alkalmazhatjuk a változók szétválasztásának módszerét, azaz a rövidített hatásfüggvényt

$$S_0(x, y, z) = S_x(x) + S_y(y) + S_z(z)$$

alakban állítjuk elő. Behelyettesítve a

$$\left(\frac{dS_x}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dS_y}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dS_z}{dz} \right)^2 + 2m^2gz = 2mE$$

egyenletet nyerjük. Az első tag csak x -től, a második csak y -től, míg az utolsó két tag összege csak z -től függ. Ezeknek a tagoknak az összege csak úgy adhat állandót, ha mindegyik külön-külön állandóval egyenlő:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_x}{dx} \right)^2 &= \alpha_x^2, \\ \left(\frac{dS_y}{dy} \right)^2 &= \alpha_y^2, \\ \left(\frac{dS_z}{dz} \right)^2 + 2m^2gz &= \alpha_z^2. \end{aligned}$$

Fejezzük ki a megfelelő deriváltakat

$$\begin{aligned} \frac{dS_x}{dx} &= \alpha_x, \\ \frac{dS_y}{dy} &= \alpha_y, \\ \frac{dS_z}{dz} &= \sqrt{\alpha_z^2 - 2m^2gz}, \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} S_x &= x\alpha_x \\ S_y &= y\alpha_y, \\ S_z &= \int \sqrt{\alpha_z^2 - 2m^2gz} dz = \frac{(\alpha_z^2 - 2m^2gz)^{\frac{3}{2}}}{-3m^2g}. \end{aligned}$$

A megoldás receptje szerint most képezni kell az $S = S_x + S_y + S_z - Et$ principális függvény α_i paraméterek szerinti deriváltjait és azokat egyenlővé kell tenni az új β_i konstansokkal. Most figyelembe kell venni, hogy az állandók nem függetlenek, a Hamilton-Jacobi-egyenlet szerint ugyanis fennáll, hogy

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 2mE,$$

azaz

$$E = \frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{2m}.$$

Így

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} &= x - \frac{\alpha_x}{m}t = \beta_x, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_y} &= y - \frac{\alpha_y}{m}t = \beta_y, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_z} &= \frac{\alpha_z \sqrt{\alpha_z^2 - 2m^2gz}}{-m^2g} - \frac{\alpha_z}{m}t = \beta_z. \end{aligned}$$

A kapott egyenletekből fejezzük ki a koordinátákat:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha_x}{m}t + \beta_x, \\ y &= \frac{\alpha_y}{m}t + \beta_y, \\ z &= \frac{\alpha_z^2 + \left[\frac{m^2g}{\alpha_z} \left(\frac{\alpha_z}{m}t + \beta_z \right) \right]^2}{2m^2g} = -\frac{g}{2}t^2 - \frac{mg\beta_z}{\alpha_z}t + \frac{\alpha_z^2}{2m^2g} - \frac{m^2g\beta_z^2}{2\alpha_z^2}. \end{aligned}$$

Az elektromágneses térben mozgó részecske Hamilton-Jacobi-egyenletét érdemes külön felírni. A már bevezetett Hamilton-függvényben végrehajtva a $\mathbf{p} \longrightarrow \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}$ helyettesítést:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{A} \right)^2 + e\Phi + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (68)$$

A Hamilton-Jacobi-egyenlet megoldása általában nem egyszerű, ezért fontos felismerni a Hamilton-függvénynek azokat a speciális alakjait, amelyek standard módszerek alkalmazását teszik lehetővé. A változók szétválasztásának általánosabb esete, amikor az egyenletben megjelenő Hamilton-függvény a q_i, p_i változókat valamilyen g_i függvényeken keresztül tartalmazza:

$$H = H [g_1(q_1, p_1), g_2(q_2, p_2), \dots, g_f(q_f, p_f),].$$

A rövidített Hamilton-Jacobi-egyenlet ekkor a

$$H \left[g_1 \left(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1} \right), g_2 \left(q_2, \frac{\partial S_0}{\partial q_2} \right), \dots, g_f \left(q_f, \frac{\partial S_0}{\partial q_f} \right) \right] = E$$

alakot ölti. A bal oldal állandó lesz, ha H minden argumentuma állandó:

$$g_i \left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \right) = \alpha_i, \quad (i = 1, \dots, f), \quad (69)$$

hiszen ekkor

$$H [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f] = E$$

ami az α_i értékek állandósága miatt állandó.

Ezt biztosíthatjuk az S_0 függvény változók szerint szétdarabolt alakban való keresésével

$$S_0 (q_1, q_2, \dots, q_f) = \sum_{i=1}^f S_i (q_i). \quad (70)$$

A felbontás alapján a (69) feltételek az S_i függvényekre vonatkozó

$$g_i \left(q_i, \frac{dS_i}{dq_i} \right) = \alpha_i, \quad (i = 1, \dots, f)$$

alakú közösleges differenciálegyenletek alakját öltik.

A Hamilton-Jacobi-egyenlet megoldási problémája szintén közösleges differenciálegyenletek megoldására redukálódik, ha a Hamilton-függvény egymásba ágyazott g_i függvényeken keresztül tartalmazza a változókat:

$$H = g_f \{ q_f, p_f, g_{f-1} [\dots q_3, p_3, g_2 (q_2, p_2, g_1 (q_1, p_1))] \}.$$

A rövidített egyenlet ekkor

$$H = g_f \left\{ q_f, \frac{\partial S_0}{\partial q_f}, g_{f-1} \left[\dots q_3, \frac{\partial S_0}{\partial q_3}, g_2 \left(q_2, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, g_1 \left(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1} \right) \right) \right] \right\} = E.$$

Az S_0 függvényre újra feltételezve az (70) alakot, kapjuk, hogy

$$H = g_f \left\{ q_f, \frac{dS_f}{dq_f}, g_{f-1} \left[\dots q_3, \frac{dS_3}{dq_3}, g_2 \left(q_2, \frac{dS_2}{dq_2}, g_1 \left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) \right) \right] \right\} = E.$$

A megoldást kereshetjük egymásba ágyazott konstansokkal:

$$\begin{aligned} g_1 \left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) &= \alpha_1, \\ g_2 \left(q_2, \frac{dS_2}{dq_2}, \alpha_1 \right) &= \alpha_2, \\ &\vdots \\ g_f \left\{ q_f, \frac{dS_f}{dq_f}, \alpha_{f-1} \right\} &= \alpha_f (= E). \end{aligned}$$

A parciális differenciálegyenlet megoldásához a fenti közösleges differenciálegyenleteket kell megoldani.

Az utóbbi alakú lesz a centrális erőtérben mozgó tömegpont Hamilton-függvénye, ha térbeli polárkoordinátákat használunk. A Lagrange-függvény

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 r^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - U(r).$$

A kanonikus impulzusok

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ p_{\vartheta} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta}, \\ p_{\varphi} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

amiből a Hamilton-függvény

$$H = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 r^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) + U(r) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_{\vartheta}^2}{r^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + U(r).$$

Megfelelően zárójellezve a Hamilton-függvény

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_{\vartheta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \right] + U(r)$$

alakú lesz, ahol

$$\begin{aligned} g_{\varphi} &= p_{\varphi}^2, \\ g_{\vartheta} &= p_{\vartheta}^2 + \frac{g_{\varphi}}{\sin^2 \vartheta}, \\ g_r &= \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} g_{\vartheta} \right] + U(r). \end{aligned}$$

Az $S = S_{\varphi}(\varphi) + S_{\vartheta}(\vartheta) + S_r(r)$ felbontás bevezetése után a szeparált differenciálegyenletek

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_{\varphi}}{d\varphi} \right)^2 &= \alpha_{\varphi}, \\ \left(\frac{dS_{\vartheta}}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\alpha_{\varphi}}{\sin^2 \vartheta} &= \alpha_{\vartheta}, \\ \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \alpha_{\vartheta} \right] + U(r) &= E. \end{aligned}$$

Mivel a φ ciklikus koordináta, p_{φ} állandó, amivel

$$\alpha_{\varphi} = p_{\varphi}^2.$$

A három egyenlet megoldása ezzel

$$\begin{aligned} S_\varphi &= p_\varphi \varphi, \\ S_\vartheta &= \int \sqrt{\alpha_\vartheta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta, \\ S_r &= \int \sqrt{2m [E - U(r)] - \frac{1}{r^2} \alpha_\vartheta} dr. \end{aligned}$$

A teljes megoldás

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\alpha_\vartheta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta + \int \sqrt{2m [E - U(r)] - \frac{1}{r^2} \alpha_\vartheta} dr.$$

A mozgásegyenletek általános megoldását úgy kapjuk, hogy az E , p_φ , és α_ϑ szerinti deriváltakat új konstansokkal tesszük egyenlővé.

22. Poisson-zárójelek

Egy rendszer állapotát kimerítően leírja a fázistérben elfoglalt helyzete, azaz a q_i hely- és p_i impulzuskordinátáinak értéke. Ebből az is következik, hogy tetszőleges, a rendszer állapotától függő fizikai mennyiség megadható $F = F(q_i, p_i, t)$ alakban. Vizsgáljuk meg, hogyan változnak időben az ilyen ún. fázisfüggvények.

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

A kanonikus egyenletek alapján a hely és impulzus szerinti deriváltakat helyettesítjük a Hamilton-függvény megfelelő deriváltjaival.

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

A nyert kifejezés áttekinthetőbb kezeléséhez vezessük be a tetszőleges A és B fázisfüggvények ún. Poisson-zárójelét, amit az alábbi módon definiálunk

$$\{A, B\} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right).$$

Az új jelöléssel az F fázisfüggvény időbeli változása

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (71)$$

alakban adható meg.

Példaként vizsgáljuk meg az i indexű q_i helykoordináta időfüggését:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

ami nem más mint a megfelelő kanonikus egyenlet. Hasonló módon írhatjuk az impulzusok időbeli változására, hogy

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Ha egy F fázisfüggvény explicit módon nem függ az időtől, akkor az időfüggésre adódik, hogy

$$\dot{F} = \{F, H\}.$$

Az időtől explicite nem függő F fázisfüggvény ezek szerint akkor lesz megmaradó mennyiség, ha

$$\{F, H\} = 0.$$

A Poisson-zárójel néhány általános tulajdonságát érdemes felsorolni, mivel ezek kihasználásával a számítások sokszor leegyszerűsíthetők. Amennyiben az A, B és C fázisfüggvényeket jelöl, az alábbi azonosságok behelyettesítéssel igazolhatók:

1. $\{A, B\} = -\{B, A\}$,
2. $\{f(A_1, A_2, \dots, A_n), B\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial A_i} \{A_i, B\}$, ahol f tetszőleges n -változós, deriválható függvény,
3. $\Delta \{A, B\} = \{\Delta A, B\} + \{A, \Delta B\}$, ahol Δ tetszőleges paraméter szerinti deriválást jelent,
4. $\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$, Jacobi-azonosság.

Az első három azonosság a Poisson-zárójel definíciójának felírása után közvetlenül adódik. A Jacobi-azonosság igazolása azonban, közvetlen számolással rendkívül hosszadalmas, ezért más módszerrel szokás bizonyítani. Megjegyzésre érdemes, hogy a Jacobi-azonosság kvantummechanikai megfelelőjének igazolása sokkal "könnyebben" elvégezhető, mint a klasszikus mechanikában.

Számítsuk ki egy tetszőleges A fázisfüggvény Poisson-zárójelét egy rögzített indexű koordinátával és egy rögzített indexű impulzus komponenssel:

$$\{q_i, A\} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial A}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial A}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial A}{\partial p_i},$$

hiszen $\frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik}$ és $\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0$. Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\{p_i, A\} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial A}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial A}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial A}{\partial q_i}.$$

Fontos összefüggéseket kapunk, ha A helyébe a q_j vagy p_j kanonikus változót helyettesítjük:

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\} &= 0, \\ \{p_i, p_j\} &= 0, \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}.\end{aligned}$$

A nyert összefüggések az ún. fundamentális Poisson-zárójelek.

Felmerül a kérdés, hogy a Poisson-zárójelek, hogyan transzformálódnak egy $q_i, p_i \rightarrow Q_i, P_i$ változócserevel járó kanonikus transzformáció esetén, azaz milyen viszonyban állnak egymással a $\{A, B\}_{qp}$ és a $\{A, B\}_{QP}$ mennyiségek, ahol az indexek a régi q_i, p_i és az új Q_i, P_i kanonikus változókra vonatkozó Poisson-zárójelekre utalnak.

Írjuk fel a 3-as típusú $W_3(p_i, Q_j)$ alkotó függvény használata esetén adódó transzformációs egyenleteket:

$$\begin{aligned}q_i &= -\frac{\partial W_3}{\partial p_i}, \\ P_j &= -\frac{\partial W_3}{\partial Q_j}\end{aligned}$$

és deriváljuk az egyenleteket a másik változó szerint:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} &= -\frac{\partial^2 W_3}{\partial Q_j \partial p_i}, \\ \frac{\partial P_j}{\partial p_i} &= -\frac{\partial^2 W_3}{\partial p_i \partial Q_j}.\end{aligned}$$

A Young-tétel szerint

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}. \quad (72)$$

Hasonló módon nyerjük a $W_4(p_i, P_j)$ -ből származtatható

$$\begin{aligned}q_i &= -\frac{\partial W_4}{\partial p_i}, \\ Q_j &= \frac{\partial W_4}{\partial P_j}\end{aligned}$$

egyenletekből, hogy

$$\frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}. \quad (73)$$

Írjuk most fel a $\{q_i, A\}_{QP}$ Poisson-zárójelet:

$$\{q_i, A\}_{QP} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \frac{\partial A}{\partial P_k} - \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \frac{\partial A}{\partial Q_k} \right) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial P_k}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial P_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial Q_k} \right),$$

ahol kihasználtuk a (72) és (73) összefüggéseket. Vegyük észre, hogy az eredmény nem más mint az A mennyiség p_i szerinti deriváltja, amit a láncszabály alkalmazásával írtunk fel, azaz

$$\{q_i, A\}_{QP} = \frac{\partial A}{\partial p_i}.$$

Erről már bizonyítottuk, hogy a $\{q_i, A\}_{qp}$ Poisson-zárójellel egyenlő és így

$$\{q_i, A\}_{QP} = \{q_i, A\}_{qp}.$$

Hasonló lépésekkel láthatjuk be, hogy

$$\{p_i, A\}_{QP} = \{p_i, A\}_{qp}.$$

Most írjuk fel a keresett $\{A, B\}_{QP}$ Poisson-zárójelet és tekintsük A -t a régi változók függvényének, amire alkalmazhatjuk a Poisson-zárójelek második tulajdonságát

$$\{A(q_i, p_i), B\}_{QP} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \{q_k, B\}_{QP} + \frac{\partial A}{\partial p_k} \{p_k, B\}_{QP} \right).$$

A jobb oldalon fellépő Poisson-zárójelekről már beláttuk, hogy kicserélhetők a megfelelő konjugált változó szerinti deriváltakra, amivel:

$$\{A, B\}_{QP} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right) = \{A, B\}_{qp}.$$

A Poisson-zárójelek tehát fázisfüggvények és így a fundamentális Poisson-zárójelek egy változótranszformáció kanonikus jellegének eldöntéséhez kritériumot adnak. Az új Q_i, P_j változókra teljesülniük kell a fundamentális Poisson-zárójelekre nyert azonosságoknak:

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\}_{qp} &= 0, \\ \{P_i, P_j\}_{qp} &= 0, \\ \{Q_i, P_j\}_{qp} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Be lehet látni, hogy az egyenlőségek fennállása elegendő is a transzformáció kanonikus jellegéhez.

A fizikai mennyiségek Poisson-zárójeleinek vizsgálatát folytassuk a tömegpont impulzusmomentum-komponenseinek Poisson-zárójeleivel. $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, aminek x és y komponensei

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y, \\ L_y &= zp_x - xp_z. \end{aligned}$$

Érdemes áttérni az indexes jelölésre, azaz $x = x_1, y = x_2, z = x_3$. Az új jelöléssel a fenti két komponens Poisson-zárójele:

$$\{L_1, L_2\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_i} \frac{\partial L_2}{\partial p_i} - \frac{\partial L_1}{\partial p_i} \frac{\partial L_2}{\partial x_i} \right) = p_2 x_1 - x_2 p_1 = L_3.$$

Ciklikus indexcserével azonnal kapjuk, hogy

$$\{L_2, L_3\} = L_1 \text{ és } \{L_3, L_1\} = L_2.$$

A három egyenlet összefoglalható egy egyenletben:

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k.$$

Most írjuk fel az impulzusmomentum j -edik L_j komponensének és az impulzusmomentum $L^2 = \sum_{i=1}^3 L_i^2$ négyzetének Poisson-zárójelét és alkalmazzuk a 2. tulajdonságot.

$$\{L^2, L_j\} = \sum_{i=1}^3 2L_i \{L_i, L_j\} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 2L_i \varepsilon_{ijk} L_k = 0,$$

mivel a $\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} S_{ik}$ összeg mindig eltűnik, ha S_{ik} szimmetrikus mátrix.

Egy a mennyiség időszerinti deriváltja (71) szerint $\dot{a} = \{a, H\} + \frac{\partial a}{\partial t}$. Ennek alapján írjuk fel két mennyiség, a és b Poisson-zárójelének időderiváltját:

$$\frac{d}{dt} \{a, b\} = \{\{a, b\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t} \{a, b\}.$$

Az első tagban alkalmazzuk a Jacobi-azonosságot, a második tagban pedig végezzük el a deriválást.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{a, b\} &= -\{\{H, a\}, b\} - \{\{b, H\}, a\} + \left\{ \frac{\partial a}{\partial t}, b \right\} + \left\{ a, \frac{\partial b}{\partial t} \right\} \\ &= \left\{ \{a, H\} + \frac{\partial a}{\partial t}, b \right\} + \left\{ a, \frac{\partial b}{\partial t} + \{b, H\} \right\} \\ &= \left\{ \frac{da}{dt}, b \right\} + \left\{ a, \frac{db}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

A fenti deriválási formula alapján azonnal adódik Poisson tétele, ami szerint ha a és b mennyiség megmarad, a Poisson-zárójelük is megmaradó mennyiség lesz. Ha ugyanis $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$, akkor a fenti szabály szerint $\frac{d}{dt} \{a, b\} = 0$ lesz, ami azt jelenti, hogy $\{a, b\}$ állandó.

A tétel az esetek jelentős részében nem szolgáltat új megmaradó mennyiségeket, az $\{a, b\}$ Poisson-zárójel értéke az a és b mennyiség valamilyen $f(a, b)$ függvénye lesz. Fontos kivétel az impulzusmomentum komponenseinek esete. Ha L_1 és L_2 megmaradó mennyiség, akkor $\{L_1, L_2\} = L_3$ is az lesz.

23. Infinitézimális kanonikus transzformációk

Vizsgáljunk olyan kanonikus transzformációkat, amelyek alkalmazása során az új koordináták és impulzusok csak kis értékekkel térnek el az eredetileg bevezetett koordinátáktól ill. impulzusoktól, azaz legyen

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i, \\ P_i &= p_i + \delta p_i \end{aligned}$$

úgy, hogy δq_i és δp_i kicsi legyen q_i és p_i mellett. Az ilyen transzformáció csak kis mértékben tér el az identitás transzformációtól, aminek az alkotófüggvényére láttuk, hogy

$$W_2 = \sum_{k=1}^f q_k P_k.$$

Az alkotófüggvényt ezért célszerű a fenti függvénytől kissé eltérő függvény alakjában keresni:

$$W_2 = \sum_{k=1}^f q_k P_k + \varepsilon G(q_i, P_i, t),$$

ahol a bevezetett ε paraméter értékét fogjuk kicsinek választani azért, hogy a $G(q_i, P_i)$ függvény értéke már véges lehessen. Írjuk fel a transzformációs szabályokat:

$$p_i = \frac{\partial W_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i},$$

$$Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}.$$

Leolvashatjuk, hogy

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \text{ és } \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Mivel p_i és P_i egymástól csak infinitezimális értékkel tér el, ha a G függvényben P_i -t p_i -re cseréljük az $\varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$ értékében csak másodrendben jelenik meg hiba. Ezért a G generátorfüggvénynek nevezett függvényt szokás a q_i és p_i függvényében megadni, amivel végül a

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G(q_i, p_i)}{\partial p_i} \text{ és } \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G(q_i, p_i)}{\partial q_i}$$

összefüggésekre jutunk.

Válasszuk most generátorfüggvénynek a $H = H(q_i, p_i, t)$ Hamilton-függvényt és legyen $\varepsilon = dt$. A fenti szabály szerint:

$$\delta q_i = dt \frac{\partial H(q_i, p_i, t)}{\partial p_i} = dt \dot{q}_i = dq_i \text{ és}$$

$$\delta p_i = -dt \frac{\partial H(q_i, p_i, t)}{\partial q_i} = dt \dot{p}_i = dp_i.$$

Tehát a dt időtartam alatt a rendszer q_i koordinátáiban és p_i impulzusaiban bekövetkezett dq_i és dp_i változás is egy kanonikus transzformációnak felel meg. A rendszer kanonikus egyenletek szerinti fejlődése kanonikus transzformációk sorozatából áll! Speciálisan, a rendszer egy t_1 és t_2 időpontban létrejövő állapotainak egymásra való leképezése kanonikus transzformációnak felel meg.

Vizsgáljuk meg, mi történik egy időfüggetlen $U(q_i, p_i)$ fázisfüggvény értékével egy infinitezimális kanonikus transzformáció esetén. Írjuk fel elsőrendben a változást:

$$\delta U = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial U}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} + \frac{\partial U}{\partial p_i} (-\varepsilon) \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \varepsilon \{U, G\}.$$

Alkalmazzuk a kapott összefüggést a H Hamilton-függvényre:

$$\delta H = \varepsilon \{H, G\}.$$

Láttuk, hogy ha egy időfüggetlen fázisfüggvénynek a Hamilton-függvénnyel vett Poisson-zárójele eltűnik, akkor az egy megmaradó mennyiség. A fentiek szerint, a megmaradó mennyiségek olyan infinitezimális kanonikus transzformációkat generáló generátorfüggvények, amelyek nem változtatják meg a Hamilton-függvény értékét.

Első példaként válasszuk generátorfüggvénynek a k -adik kanonikus impulzuskomponenst: $G = p_k$. A transzformációs szabály szerint

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} = \varepsilon \delta_{ki},$$

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} = 0,$$

ami szerint p_k a k -adik koordinátatengely mentén történő eltolás generátorfüggvénye. A fentiek értelmében viszont így p_k akkor lesz megmaradó mennyiség, ha egy q_k mentén történő eltolásnál a Hamilton-függvény nem változik.

Második példánkban a generátorfüggvény legyen a tömegpont impulzusmomentum vektorának Descartes-koordinátákban megadott z -komponense: $G = xp_y - yp_x$. A transzformációs szabály

$$\begin{aligned} \delta x &= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_x} = -\varepsilon y, & \delta y &= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_y} = \varepsilon x, & \delta z &= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_z} = 0, \\ \delta p_x &= -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial x} = -\varepsilon p_y, & \delta p_y &= -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial y} = \varepsilon p_x, & \delta p_z &= -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

A felső sorból leolvashatjuk, hogy a generált transzformáció a z tengely körüli elemi ε szöggel történő elfordulásnak felel meg, hiszen az infinitezimális ε szöggel történő elfordulás Descartes-rendszerbeli mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cos \varepsilon \approx 1$ és $\sin \varepsilon \approx 0$ miatt. A második sor szerint az impulzus komponensek követik a helyvektor komponensek transzformációs szabályát. Megismételve a fenti gondolatmenetet, levonhatjuk a következtetést miszerint, ha az impulzusmomentum egy adott tengelyhez tartozó komponense megmaradó mennyiség, a Hamilton-függvény érzéketlen lesz az ezen tengely körüli elforgatásokra.

Érdemes észre venni, hogy a z tengely körüli elforgatások generátorfüggvényét, amiről kiderült, hogy az impulzusmomentum z -komponensével egyenlő, az eltolásokra vonatkozó megfontolásokkal egyszerűbben is megkaphatjuk. Legyen ui. a polárkoordinátákban felírt rendszer kitüntetett koordinátája a φ azimutszög. Az ε elemi szöggel történő elforgatás nem más, mint ezen koordináta irányában történő ε mértékű

eltolás. A φ szöghöz konjugált p_φ kanonikus impulzusról viszont már korábban láttuk, hogy egyenlő a z tengelyhez tartozó impulzumomentummal.

Mivel a z tengelyt tetszőlegesen választhatjuk, fenti eredmény tetszőleges tengelyre általánosítható. A vizsgált tengely irányát adjuk meg egy \mathbf{n} egységvektorral. Ha az impulzumomentum vektora \mathbf{L} , akkor a tengely körüli elforgatás generátorfüggvénye, a fentiek alapján az impulzumomentum tengelyirányú vetülete lesz:

$$G_{\mathbf{n}} = \mathbf{nL}.$$

24. Fázistérfogat

Mint azt korábban is láttuk, egy mechanikai rendszer állapotát egy fázistérbeli pont reprezentálja. A fázispont mozgását az időben a kanonikus egyenletek határozzák meg, amelyek a $q_i(t)$, $p_i(t)$ függvényekre nézve egy elsőrendű, közönséges differenciálegyenlet-rendszert alkotnak. Helyezzünk el a fázistérben a t_0 időpontban a fizikai rendszer különböző, lehetséges "kezdő" állapotainak megfelelő (fázis)pontokat, úgy hogy a sűrűségük $\rho(q_i, p_i, t_0)$ legyen. A fázispontok a kanonikus egyenleteknek megfelelő mozgást fognak végezni, aminek következtében egy $t > t_0$ időpontban eloszlásuk sűrűsége $\rho(q_i, p_i, t)$ -re változik. Szemléltethetjük a mozgást úgy hogy egy $2f$ dimenziós térbeli folyadékot képzelünk el, aminek neve fázisfolyadék. A fázisfolyadék egy-egy eleme, azaz a pont helyzetének megfelelő állapotban lévő fizikai rendszer a kanonikus egyenleteknek megfelelő mozgást végez. A fázistér egy Γ tartományában található fázispontok P száma a t időpillanatban ennek megfelelően:

$$P = \int_{\Gamma} \rho(q_i, p_i, t) d\Gamma$$

lesz, ahol $d\Gamma$ -val jelöltük a $2f$ dimenziós fázistér elemi fázistérfogatát. Az idő múlásával a fázispontok kanonikus egyenleteknek megfelelően máshova vándorolnak és az eredeti Γ tartományban található fázispontok a $t' > t$ időpontban egy más Γ' tartományt foglalnak el. Mivel a fázispontok, definíció szerint, nem tűnnek el és nem keletkeznek, az új tartományban a fázispontok száma megegyezik az eredeti tartományban található fázispontok számával:

$$\int_{\Gamma'} \rho(q_i, p_i, t') d\Gamma = \int_{\Gamma} \rho(q_i, p_i, t) d\Gamma.$$

A bal oldali integrált bontsuk fel a Γ' és a Γ tartományok $\Gamma' \setminus \Gamma$ különbség-tartományára vett és a Γ tartományra vett integrál összegére és redukáljuk az egyenletet nullára:

$$\int_{\Gamma' \setminus \Gamma} \rho(q_i, p_i, t') d\Gamma + \int_{\Gamma} [\rho(q_i, p_i, t') - \rho(q_i, p_i, t)] d\Gamma = 0. \quad (74)$$

Ha az eltelt $t' - t = \Delta t$ időtartam kicsi, a $\Gamma' \setminus \Gamma$ tartomány egy a Γ tartományt körülölelő $\Delta t v_n$ vastagságú réteget jelent, ahol v_n a fázispontok lokális \mathbf{v} sebességének

a Γ tartományt körülölelő F felület $d\mathbf{f}$ felületelemeire merőleges vetületét jelöli. Egy a $d\mathbf{f}$ felületelemre merőlegesen állított $\Delta t v_n$ magasságú elemi hasáb térfogata $d\Gamma = \Delta t v_n |d\mathbf{f}|$, ahol $v_n |d\mathbf{f}|$ kifejezhető a \mathbf{v} sebességvektor és a felületelem $d\mathbf{f}$ vektorának skaláris szorzataként, amivel:

$$d\Gamma = \Delta t \mathbf{v} d\mathbf{f}.$$

A vizsgált integrál így az F zárt felületre vett integrállá alakul

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma} \rho(q_i, p_i, t') d\Gamma = \oint \rho(q_i, p_i, t') \Delta t \mathbf{v} d\mathbf{f}.$$

A (74) egyenlet második integráljában az integrandus elsőrendű közelítésben helyettesíthető a sűrűség időszerinti parciális deriváltjával:

$$\rho(q_i, p_i, t') - \rho(q_i, p_i, t) = \Delta t \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

ami után Δt -vel történt egyszerűsítés után nyerjük, hogy

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Gamma + \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f} = 0.$$

Ha a második tagot a Gauss-tétel segítségével térfogati integrállá alakítjuk, egy térfogati integrált kapunk

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] d\Gamma = 0.$$

Számítsuk ki $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ értékét a $2f$ dimenziós fázistérben. A \mathbf{v} sebesség komponensei a fázistérben (\dot{q}_i, \dot{p}_i) -val egyenlők, így

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \rho \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \rho \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right).$$

Használjuk ki, hogy a kanonikus egyenletek szerint $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ és $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$, amit behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \rho \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \rho \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right).$$

A második és negyedik tag a Young-tétel alapján kiesik, a megmaradó két tag pedig egy Poisson-zárójel formájában írható fel, amivel

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} \right] d\Gamma = 0.$$

Az integrál csak úgy tűnhet el tetszőleges tartományon, ha az integrandus nulla:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0.$$

A nyert összefüggés a "fázisfolyadék mozgásegyenlete", aminek neve Liouville-egyenlet.

A Liouville-egyenlet egyik triviális megoldása a

$$\rho \equiv 1$$

eloszlásfüggvény. Ha erre az eloszlásra vonatkozóan felírjuk egy tetszőleges tartományon a fázispontok P számát, az éppen egyenlő lesz a tartomány térfogatával:

$$P = \int_{\Gamma} \rho(q_i, p_i, t) d\Gamma = \int_{\Gamma} d\Gamma = \Gamma.$$

Mivel az együttmozgó tartomány térfogata egy tetszőleges időpontban is ugyanezzel az integrállal adható meg, ami viszont a fentiek szerint időben állandó, levonhatjuk a következtetést, hogy a fázistér tetszőleges tartományának térfogata a fázispontok kanonikus egyenletek szerint történő mozgása során állandó marad. A fázispontok, szemléletesen szólva összenyomhatatlan folyadékként viselkednek. Ez Liouville tétele.

A Liouville-egyenletnek más megoldásai is léteznek, amelyek közül különösen fontosak a stacionárius eloszlásnak megfelelő megoldások:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

A Liouville-egyenlet szerint ennek feltétele, hogy

$$\{\rho, H\} = 0$$

legyen. A nyert egyenletnek könnyű megoldását találni, ha a H Hamilton-függvény nem függ az időtől, azaz

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Ekkor, ha a ρ sűrűség csak a Hamilton-függvényen keresztül függ a fázistérbeli helytől, azaz $\rho = \rho(H(q_i, p_i))$ alakban állítható elő, az megoldás lesz hiszen a Poisson-zárójel 2. tulajdonsága miatt

$$\{\rho(H), H\} = \frac{d\rho}{dH} \{H, H\}$$

és az 1. tulajdonsága miatt

$$\{H, H\} = 0.$$

A stacionárius megoldásokat a statisztikus fizikában azonosítják a termodinamikai egyensúly helyzetével, így ezek ismerete rendkívül fontos.

Említsünk meg a rendszerek T hőmérsékletű kanonikus sokaságának speciális esetét, amelyben

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{H}{kT}\right).$$

k az ún. Boltzmann-állandó. Az eloszlás neve Boltzmann-eloszlás.

25. Relativisztikus általánosítások

A klasszikus mechanika mozgásegyenletei minden Galilei-rendszerben ugyanolyan alakban állnak fenn. A vonatkoztatási rendszer megválasztásában nagyfokú szabadságunk van, amit általában a feladatok megoldásánál ki is használunk úgy, hogy igyekszünk olyan vonatkoztatási rendszerben felírni a mozgásegyenleteket, amelyekben könnyebb megoldani őket.

A további megfontolásokat Descartes-rendszerekben fogjuk elvégezni és kikötjük, hogy a hely és időkoordináták mértékegységét a különböző rendszerekben ugyanolyan-nak választjuk. Ezzel kiküszöbölünk egy transzformációs lépést, amire akkor lenne szükségünk, ha különböző rendszerbeli eredményeket szeretnénk összehasonlítani. Descartes-rendszerek között is eltérések lehetnek az origó megválasztásában és az (x, y, z) koordinátatengelyek irányításában. Az inerciarendszer definíciója szerint egy adott időpillanatban teljes fedésben lévő két rendszer is mozoghat egymáshoz képest állandó sebességgel, hiszen ha az egyikben állandó sebességgel mozognak a magukra hagyott tömegpontok, akkor egy ehhez képest állandó sebességgel mozgó rendszerben is ezt fogják tenni. A különböző inerciarendszerekben (Galilei-féle vonatkoztatási rendszerekben) a tömegpontok koordinátái, valamint az azokból származtatott mennyiségek (pl. sebesség) általában eltérőek lesznek. Könnyen beláthatjuk azonban, hogy a rendszerek közötti lehetséges átszámítási szabályok közül az ún. Galilei-transzformáció szabályai nem változtatják meg a Newton-egyenleten alapuló mozgásegyenletek alakját.

A Galilei-transzformáció szabályai, ha azt a legegyszerűbb esetet tekintjük, amikor a tengelyek párhuzamosak és a K' rendszer a másik K rendszer x tengelye mentén úgy mozog állandó w sebességgel, hogy $t = t' = 0$ időpontban egybe estek az origók (standard elrendezés), az alábbiak:

$$\begin{aligned}t' &= t, \\x' &= -wt + x, \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}$$

Az inverz transzformáció egyenletei pedig

$$\begin{aligned}t &= t', \\x &= wt' + x', \\y &= y', \\z &= z'\end{aligned}$$

lesznek, ahol a mértékegységek egyező volta miatt w értéke megegyezik a két rendszerben. Itt értelemszerűen a K rendszerben mért időt és koordinátákat jelzik a (t, x, y, z) mennyiségek és a K' -ben mért értékeket a (t', x', y', z') mennyiségek.

Egy tömegpont sebességére a két rendszerben szintén eltérő értékek adódnak. A K és a K' rendszerben mért sebességkomponensek közötti transzformációs szabályt

egyszerű helyettesítéssel kapjuk meg:

$$\begin{aligned}v_x &= \lim_{t_1-t_2 \rightarrow 0} \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = \lim_{t'_1-t'_2 \rightarrow 0} \frac{x'_1 + wt'_1 - x'_2 - wt'_1}{t'_1 - t'_2} = v'_{x'} + w, \\v_y &= \lim_{t_1-t_2 \rightarrow 0} \frac{y_1 - y_2}{t_1 - t_2} = \lim_{t'_1-t'_2 \rightarrow 0} \frac{y'_1 - y'_2}{t'_1 - t'_2} = v'_{y'}, \\v_z &= \lim_{t_1-t_2 \rightarrow 0} \frac{z_1 - z_2}{t_1 - t_2} = \lim_{t'_1-t'_2 \rightarrow 0} \frac{z'_1 - z'_2}{t'_1 - t'_2} = v'_{z'}.\end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy ha a K' rendszerben tetszőlegesen adott $v' = \sqrt{v'^2_{x'} + v'^2_{y'} + v'^2_{z'}}$ nagyságú sebességgel repítünk el egy tömegpontot, akkor annak a K rendszerben mért sebessége ettől, a repítés irányától függő, azaz anizotrop módon el fog térni:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(v'_{x'} + w)^2 + v'^2_{y'} + v'^2_{z'}} = \sqrt{v'^2 + 2v'_{x'}w + w^2} \neq v'.$$

A klasszikus elektrodinamika kereteiben tárgyalható elektromágneses jelenségeket a Maxwell-egyenletek nagy pontossággal írják le, és a Newton-egyenlet klasszikus mechanikában játszott szerepéhez hasonló módon, az elektromágneses tér mozgás-egyenleteinek tekinthetjük őket. A Maxwell-egyenletek nagyon fontos megoldásai a haladó elektromágneses hullámokat leíró megoldások, amelyeknek vákuumbeli sebességére az egyenletekből az irányfüggetlen, konstans $c = 2,99 \dots * 10^8 m/s$ érték adódik. Az elektromágneses hullámok speciális fajtája a fény, aminek sebességére a mérésekben is irányfüggetlenül ugyanezt az értéket kapjuk, ami éles ellentmondásban áll a fenti sebességtranszformációs szabállyal. Az ellentmondás akkor oldható fel, ha megkeressük azokat a koordinátatranszformációkat, amelyek kielégítik a Galilei-rendszerek ekvivalenciájának követelményét, úgy hogy közben nem változtatják meg a vákuumbeli fénysebesség értékét.

A fenti Galilei-transzformációhoz hasonlóan a standard elrendezést vizsgáljuk, amikor a tengelyek párhuzamosak és a K' rendszer a másik K rendszer x tengelye mentén úgy mozog állandó w sebességgel, hogy $t = t' = 0$ időpontban egybe esnek az origók. Mivel a hossz- és időmérési-eredmények additív jellegét szeretnénk megtartani, a transzformációt lineárisnak fogjuk választani. Feltételezzük, hogy a mozgásra merőleges irányokban a transzformáció a Galilei-transzformációhoz hasonló módon nem változtatja meg a mérési eredményeket. Az ilyen transzformáció általános alakja az alábbi lehet:

$$\begin{aligned}t' &= \alpha t + \beta x, \\x' &= \gamma t + \varkappa x, \\y' &= y, \\z' &= z,\end{aligned}\tag{75}$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \varkappa$ a továbbiakban meghatározandó paraméterek. Mivel az y és z koordináták nem változnak és nem "keverednek" a t és x koordinátákkal, az előbbieket kihagyjuk a további megfontolásokból, azaz csak az első és második egyenletet fogjuk használni.

Az áttekinthetőség érdekében érdemes mátrixos formában is felírni a transzformációs szabályt:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \varkappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \hat{L} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

A transzformáció \hat{L} mátrixának komponenseire a K és K' rendszer ekvivalenciájának feltételéből következtethetünk.

1. A K' rendszer origója a K rendszerben w sebességgel mozog, így minden t -re

$$\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \varkappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ wt \end{pmatrix},$$

amiből

$$0 = \gamma t + \varkappa wt,$$

és

$$\gamma = -\varkappa w.$$

2. A mértékegységek egyenlő választása miatt a K rendszer origója $-w$ sebességgel halad a K' rendszerben, tehát

$$\begin{pmatrix} t' \\ -wt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\varkappa w & \varkappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

amiből

$$\begin{aligned} t' &= \alpha t, \\ -wt' &= -\varkappa wt. \end{aligned}$$

A két egyenletet osztva kapjuk, hogy

$$\alpha = \varkappa.$$

3. A két rendszerben a fénysebességnek egyenlő c értékűnek kell lennie. Így, ha elindítunk egy fényjelet az origóból a 0 időpillanatban, akkor az a K rendszerben t idő múlva az $x = ct$ helyen, K' rendszerben t' idő múlva a $x' = ct'$ helyen lesz:

$$\begin{pmatrix} t' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa & \beta \\ -\varkappa w & \varkappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ ct \end{pmatrix}.$$

Kifejtve

$$\begin{aligned} t' &= t(\varkappa + \beta c), \\ ct' &= \varkappa t(c - w). \end{aligned}$$

A két egyenlet osztása után nyerjük, hogy

$$\beta = \frac{-w\varkappa}{c^2},$$

amivel a transzformáció mátrixa:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \varkappa & \frac{-w\varkappa}{c^2} \\ -\varkappa w & \varkappa \end{pmatrix}.$$

4. Mivel a két rendszer ekvivalens, az inverz transzformáció mátrixa az eredeti \hat{L} mátrixtól csak abban térhet el, hogy w -t $-w$ -re cseréljük. A számítást nem kell részletesen elvégezni, mivel felismerhetjük, hogy \hat{L} determinánsa nem érzékeny w előjelváltására, ami azt jelenti, hogy az \hat{L}^{-1} inverz mátrix determinánsa megegyezik az eredeti \hat{L} mátrix determinánsával

$$\det \hat{L} = \det \hat{L}^{-1} \left(= (\det \hat{L})^{-1} \right).$$

Ez úgy lehetséges, hogy $\det \hat{L}$ értéke egységnyi:

$$\det \hat{L} = \begin{vmatrix} \varkappa & \frac{-w\varkappa}{c^2} \\ -\varkappa w & \varkappa \end{vmatrix} = \varkappa^2 \left(1 - \frac{w^2}{c^2} \right) = 1,$$

amiből

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}.$$

\hat{L} végső alakja így

$$\hat{L} = \varkappa \begin{pmatrix} 1 & \frac{-w}{c^2} \\ -w & 1 \end{pmatrix}.$$

A nyert transzformációs összefüggések neve speciális Lorentz-transzformáció:

$$\begin{aligned} t' &= \varkappa \left(t - \frac{w}{c^2} x \right), \\ x' &= \varkappa (-wt + x), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{76}$$

Az inverz-transzformáció képletei pedig:

$$\begin{aligned} t &= \varkappa \left(t' + \frac{w}{c^2} x' \right), \\ x &= \varkappa (wt' + x'), \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{77}$$

Látható, hogy a Lorentz-transzformáció $w \ll c$ sebesség esetén, amikor $\varkappa \approx 1$, és az origótól nem túl nagy távolságban, ahol $x \ll \frac{tc^2}{w}$, a Galilei-transzformációba megy át, az attól való eltérést csak nagy sebességek esetén érzékeljük.

Vizsgáljunk meg néhány következményt.

1. Tekintsünk egy l_0 hosszúságú rudat, amelyet a K' rendszer x' tengelye mentén helyezünk el úgy, hogy az eleje a x'_1 , a vége pedig az $x'_2 = x'_1 + l_0$ helyen legyen található. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy a K rendszerből nézve milyen l hosszúságúnak mérjük a rudat, azt kell kiszámítani, hogy a K rendszerben a mérés t időpillanatában mekkora lesz a rúd elejének és végének koordinátakülönbsége. (76) második egyenlete szerint

$$x'_1 = \varkappa(x_1 - wt) \text{ és } x'_2 = \varkappa(x_2 - wt).$$

A két egyenlet különbségéből kapjuk az $l = x_2 - x_1$ hossza, hogy

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}.$$

Az együttmozgó megfigyelő által mért l_0 hosszúság (ún. nyugalmi hossz) helyett a külső, nyugvó koordinátarendszerből a rúd hosszát $l \leq l_0$ értékűnek mérjük. A jelenség neve Lorentz-kontrakció.

2. Tekintsünk két eseményt, amelyek a K' rendszer x' pontjában következnek be két különböző időpontban. Az első esemény következzen be a t'_1 , a második a $t'_2 = t'_1 + \Delta t' > t'_1$ időpontban. A két esemény K -ban mért időkoordinátája (77) első egyenlete alapján

$$t_1 = \varkappa\left(t'_1 + \frac{wx'_1}{c^2}\right) \text{ és } t_2 = \varkappa\left(t'_2 + \frac{wx'_2}{c^2}\right).$$

A két esemény közt eltelt időtartam a két időkoordináta különbsége:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \varkappa(t'_2 - t'_1) = \varkappa \Delta t'.$$

A külső, nyugvó koordinátarendszerben mért időtartam tehát hosszabb, mint az együttmozgó K' -beli megfigyelő által mért időtartam. A jelenséget szokták "idődilatáció"-nak hívni, bár az idő természetesen nem tud megnyúlni, hiszen nem fizikai objektum.

Az együttmozgó megfigyelő által mért $\Delta\tau (= \Delta t')$ időtartamot sajátidőtartamnak nevezzük:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}. \quad (78)$$

3. Tekintsünk két eseményt, amelyek a K' rendszerben ugyanabban a t' időpillanatban az x'_1 és x'_2 helyen történnek. Ezeknek az eseményeknek a K rendszerbeli t_1 és t_2 időkoordinátája (77) első egyenlete szerint

$$t_1 = \varkappa\left(t' + \frac{wx'_1}{c^2}\right) \text{ és } t_2 = \varkappa\left(t' + \frac{wx'_2}{c^2}\right).$$

A különbség

$$t_2 - t_1 = \varkappa \frac{w(x'_2 - x'_1)}{c^2},$$

ami x'_1 és x'_2 különbözősége esetén nem nulla. A K' rendszerben egyidejűnek talált események a hozzá képest mozgó K rendszerben nem lesznek egyidejűek. Az, hogy melyik esemény előzi meg a másikat a helykoordináták viszonyától függ.

4. A K' rendszerben haladjon egy tömegpont az x' tengely mentén állandó v' sebességgel. Számítsuk ki, hogy milyen v sebességgel mozog a K -beli megfigyelő szerint. Ez az érték a Galilei-transzformáció szabályai szerint $v = v' + w$ lenne.

A Lorentz-transzformáció szabályait alkalmazva eltérő eredményre jutunk. A sebesség K -beli értéke:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\varkappa(x'_2 + wt'_2) - \varkappa(x'_1 + wt'_1)}{\varkappa(t'_2 + \frac{w}{c^2}x'_2) - \varkappa(t'_1 + \frac{w}{c^2}x'_1)} = \frac{x'_2 - x'_1 + w(t'_2 - t'_1)}{t'_2 - t'_1 + \frac{w}{c^2}(x'_2 - x'_1)} = \frac{v' + w}{1 + \frac{wv'}{c^2}}.$$

5. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a Lorentz-transzformáció az események tér és időkoordinátáiból alkotott $s^2 = c^2t^2 - \bar{r}^2$, ($\bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$) kombinációt érintetlenül hagyja:

$$\begin{aligned} c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= c^2\varkappa^2 \left(t - \frac{w}{c^2}x \right)^2 - \varkappa^2 (x - wt)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \varkappa^2 \left(c^2t^2 - 2twx + \frac{w^2}{c^2}x^2 - x^2 + 2xwt - w^2t^2 \right) - y^2 - z^2 \\ &= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned}$$

Azt mondjuk, hogy az s^2 mennyiség invariáns a Lorentz-transzformációval szemben.

Érdeemes a (ct, x, y, z) alakú számnégyeseket egy négydimenziós vektortér elemeinek tekinteni, amelyben s^2 a vektor invariáns abszolútérték-négyzetét jelöli. Ennek alapján két vektor skalárszorzatát is elő tudjuk állítani, mivel két vektornak az a skalárszorzata, amelyik előállítja az abszolútérték négyzetét egy lépésben adódik:

$$(ab) = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}.$$

Írjuk fel egy tetszőleges $a = (ct, x, y, z)$ és $b = (ct^*, x^*, y^*, z^*)$ vektor skalárszorzatát:

$$\begin{aligned} (ab) &= \frac{c^2(t+t^*)^2 - (x+x^*)^2 - (y+y^*)^2 - (z+z^*)^2}{4} \\ &\quad - \frac{c^2(t-t^*)^2 - (x-x^*)^2 - (y-y^*)^2 - (z-z^*)^2}{4} \\ &= c^2tt^* - xx^* - yy^* - zz^*, \end{aligned}$$

ami értelemszerűen invariáns a Lorentz-transzformációval szemben. A fenti skalárszorzattal ellátott négydimenziós pseudo-euklideszi teret Minkowski-térnek, a pontjait pedig világpontoknak hívjuk. Egy világpont koordinátái egy elemi esemény helyét és időpontját adják meg.

A Minkowski-tér vektorainak komponensei az egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző inerciarendszerek közötti áttérés esetén a speciális Lorentz-transzformáció szabályai szerint transzformálódnak. A továbbiakban ezért fontos a fizikai mennyiségek Minkowski-térbeli alakját megkeresni, azaz azokat a négydimenziós (ún. négyes-) vektorokat, amelyeket mért vagy definiált fizikai mennyiségekhez rendelhetünk.

A relativitáselméletben szokás a koordinátákat átnevezni olyan módon, hogy a helykoordinátákat egytől háromig számozzuk és az időkoordinátát nulladik koordinátának vesszük. Ezzel

$$\begin{aligned}x_0 &= ct, \\x_1 &= x, \\x_2 &= y, \\x_3 &= z,\end{aligned}$$

amivel az x négyesvektor hossz négyzete

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \quad (79)$$

Az $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ és $x^* = \begin{pmatrix} x_0^* \\ x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}$ négyesvektorok skaláris szorzata ennek megfelelően:

$$xx^* = x_0x_0^* - x_1x_1^* - x_2x_2^* - x_3x_3^*. \quad (80)$$

A Lorentz-transzformáció szabályai a (x_0, x_1, x_2, x_3) alakú négyesvektorokra a (76) egyenletekből olvashatók le.

$$\begin{aligned}x'_0 &= \varkappa \left(x_0 - \frac{w}{c} x_1 \right), \\x'_1 &= \varkappa \left(-\frac{w}{c} x_0 + x_1 \right), \\x'_2 &= x_2, \\x'_3 &= x_3.\end{aligned} \quad (81)$$

A megfelelő inverztranszformáció pedig:

$$\begin{aligned}x_0 &= \varkappa \left(x'_0 + \frac{w}{c} x'_1 \right), \\x_1 &= \varkappa \left(\frac{w}{c} x'_0 + x'_1 \right), \\x_2 &= x'_2, \\x_3 &= x'_3.\end{aligned} \quad (82)$$

A Minkowski-térben található négyesvektorok közötti tájékozódást megkönnyíti a négyesvektoroknak hosszuk szerinti csoportosítása. A (79) definíció szerint a négyesvektorok hossz négyzete lehet pozitív, negatív és nulla is. A Minkowski-tér ún. pszeudo-euklideszi vektortér. Ha a négyesvektor hossz négyzete pozitív, negatív vagy nulla, a vektort rendre időszerűnek, térszerűnek vagy fényszerűnek hívjuk. Mivel a hossz négyzet Lorentz-invariáns, ez a tulajdonság is Lorentz-invariáns, azaz egy négyesvektor térszerű, vagy időszerű volta nem változik meg, ha másik inerciarendszerre térünk át.

A transzformáció lineáris volta miatt két közeli világpont koordinátáinak különbségét megadó

$$(dx_0, dx_1, dx_2, dx_3),$$

számnégyes is ugyanezen képletek szerint, azaz négyesvektorként transzformálódik:

$$dx'_0 = \varkappa \left(dx_0 - \frac{w}{c} dx_1 \right), \quad (83)$$

$$dx'_1 = \varkappa \left(-\frac{w}{c} dx_0 + dx_1 \right), \quad (84)$$

$$dx'_2 = dx_2,$$

$$dx'_3 = dx_3.$$

Ha a (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) négyesvektor egy tömegpont helyzetének megfelelő két világpont közötti különbségnek felel meg, érdemes ennek invariáns ds^2 hossznégyzetét a tömegponttal együttmozgó koordinátarendszerben felírni. Ekkor ugyanis $dx'_1 = dx'_2 = dx'_3 = 0$ és $dx'_0 = cdt = cd\tau$, amivel

$$ds^2 = c^2 d\tau^2,$$

vagyis

$$ds = cd\tau.$$

Ha a K -beli (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) négyesvektor komponenseit elosztjuk a megfelelő sajátidőtartam invariáns $d\tau$ értékével szintén négyesvektort kapunk

$$u_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{cdt}{dt\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = \varkappa c, \quad (85)$$

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{dx_\alpha}{dt\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = \varkappa v_\alpha,$$

ahol $v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) jelöli a mozgó részecske háromdimenziós térbeli \mathbf{v} sebességének három komponensét és $w^2 = \mathbf{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$. Itt kihasználtuk a sajátidőtartam és a koordinátaidőtartam között (78)-ben kapott $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}$ összefüggést. Az $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ négyesvektor neve négyessebesség, aminek invariáns hossznégyzete

$$u^2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2.$$

Ha a négyessebesség komponenseit megszorozzuk a tömegpont nyugalmi helyzetében megmért és rögzített m_0 tömegével, újra négyesvektort kapunk, aminek a neve négyesimpulzus:

$$p_i = m_0 u_i, \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

A p négyesimpulzus invariáns hossznégyzete:

$$p^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m_0^2 u^2 = m_0^2 c^2. \quad (86)$$

A Galilei-transzformáció az \mathbf{a} gyorsulásvektor komponenseinek értékét nem változtatta meg és ennek megfelelően a Newton-féle

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

mozgásegyenlet is invariáns volt a Galilei-transzformációval szemben.

A Lorentz-transzformáció szerint a sebességvektor és ezért a gyorsulásvektor komponensei is eltérően transzformálódnak. A Newton-egyenletet nem őrizhetjük meg a fenti formában.

Mivel a Lorentz-transzformáció során a négyesimpulzus komponensei transzformálódnak (négyes)vektor komponenseiként, az impulzusmegmaradás törvényét, ami Lorentz-invariáns törvény kell legyen, a négyesimpulzus háromdimenziós térbeli komponenseire vonatkozóan kell feltételeznünk. Ha egy zárt pontrendszer k -edik tömegpontjának négyesimpulzus-komponensei \mathbf{p}^k , akkor

$$\sum_k \mathbf{p}^k = \mathbf{P} \text{ (állandó).}$$

Kézenfekvő ennek megfelelően a Newton-egyenletet Einstein nyomán úgy korrigálni, hogy az egy tömegpontra ható \mathbf{F} (hármás-)erő komponensei a p négyesimpulzus \mathbf{p} -vel jelölt három térbeli komponensének időszerinti deriváltjaival legyenek egyenlők:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p}. \quad (87)$$

Az egyenlet helyességét mérések igazolták.

Fejtsük ki a jobb oldalt:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m_0\mathbf{u}) = \frac{d}{dt}(\varkappa m_0\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (88)$$

ahol bevezettük az

$$m = \varkappa m_0 \quad (89)$$

jelölést.

Az eredmény szerint, ha a Newton-egyenletben szereplő (hármás)impulzust a \mathbf{v} sebesség és az m tömeg $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ szorzataként értelmezzük, akkor a tömeg értéke nem állandó, a sebességgel növekszik. Az m tömeg értéke $\mathbf{v} = 0$ sebesség esetén egyenlővé válik az m_0 tömeggel, amit ezért nyugalmi tömegnek is szokás nevezni.

Végezzük el a (88)-ban kijelölt deriválást:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\mathbf{a} = \left(\frac{dm}{d\mathbf{v}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\mathbf{v} + m\mathbf{a} = m\left(\frac{\mathbf{v} \circ \mathbf{v}^T}{c^2 - \mathbf{v}^2} + \hat{I}\right)\mathbf{a},$$

ahol kihasználtuk, hogy

$$\frac{dm}{d\mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}^T}{c^2 - \mathbf{v}^2}$$

transzponált vektor.

Itt $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ a hármás térbeli gyorsulást és \hat{I} az egységmátrixot jelöli.

Mivel a zárójelben álló

$$\frac{\mathbf{v} \circ \mathbf{v}^T}{c^2 - \mathbf{v}^2} + \hat{I}$$

mátrix (lineáris operátor) általában nem arányos az egységmátrixszal, az erő és a gyorsulásvektor nem is párhuzamosak egymással. Így az $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenlet nem állhat fenn még az m tömeg "ügyes" választásával sem.

Az erő munkájának, (teljesítményének) vizsgálatához használjuk ki, hogy (86) szerint egy részecske négyesimpulzusának p^2 hossz négyzete állandó és így idő szerinti deriváltja eltűnik:

$$2p \frac{dp}{dt} = 0.$$

A kettes szorzót elhagyva, kifejtjük a skalárszorzatot (l. (80)) és átrendezzük az egyenletet

$$p_0 \frac{dp_0}{dt} = \mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

A négyessebesség (85) szerinti definíciója alapján

$$p_0 = cm. \quad (90)$$

Ezt helyettesítve a bal oldalon, a jobb oldalon pedig a Newton-egyenlet (87) alakját használva kapjuk, hogy

$$c^2 m \frac{dm}{dt} = m \mathbf{v} \mathbf{F},$$

ami m -mel való egyszerűsítés után végül a

$$c^2 \frac{d}{dt} m = \mathbf{v} \mathbf{F}$$

összefüggést eredményezi.

A jobb oldalon a részecskére ható erő teljesítménye áll. Integráljuk idő szerint az egyenlet két oldalát egy t_1 és t_2 időpont közötti időintervallumra:

$$m_2 c^2 - m_1 c^2 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \mathbf{F} dt,$$

ahol bevezettük az $m_1 = m(t_1)$ és $m_2 = m(t_2)$ jelölést. A jobb oldalon az \mathbf{F} erő munkája áll, ami konzervatív erőter esetén egyenlő az U potenciális energia megváltozásának -1 -szeresével

$$m_2 c^2 - m_1 c^2 = -(U_2 - U_1).$$

Átrendezve kapjuk az energiamegmaradás relativisztikus alakját

$$m_2 c^2 + U_2 = m_1 c^2 + U_1.$$

A részecske teljes energiája így

$$E_{teljes} = mc^2 + U.$$

A potenciális energia mellett egy a részecske mozgásától függő, a kinetikus energia korábbi alakjától eltérő függvény jelent meg. Ennek, az

$$E = mc^2 = \varkappa m_0 c^2 = p_0 c \quad (91)$$

kifejezésnek az értéke azonban, nem tűnik el $\mathbf{v} = 0$ esetén. Zérus sebesség mellett és külső erőtér híján az energia értéke

$$E_0 = m_0 c^2$$

lesz. Ennek neve nyugalmi energia.

A K kinetikus energiát, ami a részecske mozgása miatt jelenik meg, úgy értelmezzük mint az ettől való eltérést:

$$K = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\varkappa - 1).$$

A \varkappa -t $\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}$ szerint sorbafejthetjük, amiben kis sebességek esetén megállhatunk az első rendű tagnál:

$$K = m_0 c^2 \left(1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} + \dots - 1 \right) \approx m_0 c^2 \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} = m_0 \frac{\mathbf{v}^2}{2}.$$

Ez az eredmény megegyezik a kinetikus energia nemrelativisztikus képletével.

Írjuk fel a négyesimpulzus p^2 invariáns hossz négyzetét, úgy hogy a négyesimpulzus nulladik komponensére alkalmazzuk (91)-at:

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \frac{E_0^2}{c^2}$$

vagy

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = E_0^2. \quad (92)$$

A (92) összefüggés, ellentétben a (89) összefüggéssel, akkor is értelmes marad, ha a részecske nyugalmi tömegét és ezzel nyugalmi energiáját is nullának vesszük: $m_0 = 0$ és $E_0 = 0$. Ekkor

$$E = c |\mathbf{p}|.$$

Mivel $|\mathbf{p}| = m |\mathbf{v}|$ és $E = mc^2$, a

$$mc^2 = cm |\mathbf{v}|$$

összefüggésből a részecske sebességére azt kapjuk, hogy

$$|\mathbf{v}| = c.$$

A természetben léteznek ilyen objektumok, az elektromágneses tér vákuumban terjedő hullámcsomagjai, amik a Maxwell-egyenletek szerint is csak fénysebességgel mozoghatnak és nyugalmi tömegük nulla.

A négyesimpulzus változását elosztva a megfelelő sajátidőtartammal újra négyesvektort nyerünk, aminek neve négyeserő:

$$K_i = \frac{dp_i}{d\tau}.$$

A négyeserő három térszerű komponense és a háromdimenziós térben mért \mathbf{F} erő komponensei közötti kapcsolat (88) alapján kapható meg

$$K_\alpha = \frac{dp_\alpha}{d\tau} = \frac{dp_\alpha}{dt\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = \varkappa F_\alpha. \quad (93)$$

A négyeserő nulladik, időszerű komponense

$$K_0 = \frac{dp_0}{d\tau} = \frac{dp_0}{dt\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = \frac{\varkappa}{c} \frac{dE}{dt}.$$

Ennek alapján a (93) képlet értelmezését ki lehet terjeszteni a nulladik komponensre is, ha F_0 -at a teljesítmény konstansszorosaként vezetjük be:

$$F_0 = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt},$$

mivel ekkor valóban fennáll, hogy

$$K_0 = \varkappa F_0.$$

A négyeserő négyesvektorként transzformálódik, ami lehetővé teszi a hármaserő komponenseire vonatkozó transzformációs szabályok megkeresését.

Tekintsünk egy tömegpontot, amelyik áll a K -hoz képest x irányban v sebességgel mozgó K' rendszerben. Az együttmozgó K' rendszerben a tömegpontra ható \mathbf{F}' erő komponensei legyenek $F'_1, F'_2,$ és F'_3 . A megfelelő négyeserő-komponensek

$$K'_\alpha = \varkappa F'_\alpha = F'_\alpha,$$

mivel $\varkappa = 1$, valamint

$$K'_0 = 0,$$

hiszen $\mathbf{v}'^2 = 0$ és $\frac{dE'}{dt} = 0$.

A K rendszerben a megfelelő komponensek a(z inverz) Lorentz-transzformáció szabályai szerint

$$\begin{aligned} K_0 &= \varkappa \left(K'_0 + \frac{v}{c} K'_1 \right), \\ K_1 &= \varkappa \left(\frac{v}{c} K'_0 + K'_1 \right), \\ K_2 &= K'_2, \\ K_3 &= K'_3. \end{aligned}$$

A mozgásiránnyal párhuzamos komponensre a második egyenletbe helyettesítve kapjuk meg az eredményt

$$\varkappa F_1 = \varkappa F'_1,$$

azaz

$$F_1 = F'_1.$$

A mozgásra merőleges komponens transzformációs szabálya a második (harmadik) egyenletből következik

$$\varkappa F_2 = F'_2,$$

azaz

$$F_2 = F'_2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}},$$

valamint

$$F_3 = F'_3 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}.$$

A mechanika korábban bevezetett elveinek relativisztikus általánosításához tekintsünk egy tömegpontot, amelyik az 1-es világpontból a tőle időszerű vektorral elválasztott 2-es világpontba jut el valamilyen pályán. A pálya egy elemi darabjának ívhossza $ds = cd\tau$. A teljes hosszat az

$$s = \int_1^2 ds = c \int_1^2 d\tau$$

integrál adja. A két rögzített világpont közötti pálya ívhossza függ a pálya választásától. A sajátidőtartam kifejezhető a koordinátaidővel, amivel

$$s = c \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt.$$

Ennek az integrálnak az értéke mindig kisebb, mint a két pontot összekötő egyenes pályán mozgó megfigyelő által mért sajátidőtartamból számított s_0 ívhossz, hiszen ekkor $d\tau = dt$:

$$s \leq s_0 = c \int_1^2 dt.$$

Eredményünk szerint a Minkowski-térben a két pontot összekötő vonalak közül az egyenes a leghosszabb!

Mivel a Hamilton-elv alkalmazásához olyan Lagrange-függvényt keresünk, amelynek az integrálja a koordinátaidő szerint az egyenes mozgás esetén minimumot ad, a fenti eredmény alapján kézenfekvő a szabadon mozgó részecske Lagrange-függvényét

$$L = -\alpha \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$$

alakban megválasztani, ahol α olyan paraméter, amivel illeszteni tudunk a korábban bevezetett Lagrange-függvényekhez. α értékének megkereséséhez fejtsük L -et sorba $\frac{v^2}{c^2}$ szerint

$$L = -\alpha \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} - \dots \right) = -\alpha + \frac{\alpha \mathbf{v}^2}{2c^2} + \dots$$

Az első tag konstans, amit elhagyhatunk. A második tagtól, ami kis v esetén dominál várhatjuk el, hogy a nemrelativisztikus Lagrange-függvénnyel essen egybe:

$$\frac{\alpha \mathbf{v}^2}{2c^2} = \frac{m_0 \mathbf{v}^2}{2},$$

amiből

$$\alpha = c^2 m_0.$$

A Lagrange-függvény végső alakja így

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = m (\mathbf{v}^2 - c^2). \quad (94)$$

A Lagrange-függvényből az erőmentes részecske kanonikus impulzusa az első alak deriválásával írható fel

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \mathbf{v},$$

ami megegyezik a (87) egyenletben használt alakkal.

A Hamilton-függvény értéke definíció szerint:

$$H = \mathbf{p} \mathbf{v} - L = m \mathbf{v}^2 - m (\mathbf{v}^2 - c^2) = m c^2 = E.$$

E -t (92)-ből az impulzus változóval kifejezve nyerjük a megfelelő alakot:

$$H = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + E_0^2} = c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}.$$

Érdeemes felírni a részecske Hamilton-Jacobi-egyenletét

$$c \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 + m_0^2 c^2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

amit gyökvonás nélküli alakban szokás megadni:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 = m_0^2 c^4.$$

Az eddigiekben az erőmentes részecske Lagrange- és Hamilton-függvényét kerestük meg. Kérdés, hogy (94)-öt hogyan kell kiegészíteni, hogy az elektromágneses tér hatása is megjelenjen a Lagrange-függvényben?

A 15-ik fejezetben láttuk, hogy az elektromágneses térben mozgó tömegpont nemrelativisztikus Lagrange-függvényét az erőmentes részecske Lagrange-függvényéből az

$$U = e\Phi - e\mathbf{A} \mathbf{v} \quad (95)$$

általánosított potenciál levonásával állíthatjuk elő. A Maxwell-egyenletek vizsgálatával bebizonyítható, hogy a $\left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A}\right)$ számnégyes szintén négyesvektor komponenseit

alkotja. Szokás ezért a $\frac{\Phi}{c} = A_0$ jelölést is bevezetni, aminek megfelelően az A_i ($i = 0, \dots, 3$) számnégyest A négyespotenciálnak hívjuk. A (95) kifejezés ezzel az

$$U = eAu\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

alakban is felírható, ahol Au a négyespotenciál és négyessebesség négyestérbeli skaláris szorzata. Az U általánosított potenciálnak ezen alakja azt mutatja, hogy alkalmas arra, hogy vele a (94) relativisztikus Lagrange-függvényt is kiegészítsük, hiszen dt -vel szorozva ez is relativisztikusan invariáns mennyiséget ad, $\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt = d\tau\right)$.

A teljes, relativisztikus Lagrange-függvény tehát

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\Phi + e\mathbf{A}\mathbf{v} = m(\mathbf{v}^2 - c^2) - e\Phi + e\mathbf{A}\mathbf{v}$$

lesz, amiből a kanonikus impulzus

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\mathbf{A} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}. \quad (96)$$

A Hamilton-függvény értéke

$$H = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = m\mathbf{v}^2 + e\mathbf{A}\mathbf{v} + m(c^2 - \mathbf{v}^2) + e\Phi - e\mathbf{A}\mathbf{v} = mc^2 + e\Phi.$$

A négyesimpulzus p^2 hossz négyzetére láttuk, hogy állandó

$$m_0^2c^2 = m^2c^2 - m^2\mathbf{v}^2,$$

amiből

$$mc^2 = c\sqrt{m^2\mathbf{v}^2 + m_0^2c^2}.$$

(96) szerint

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} - e\mathbf{A},$$

amivel végül a Hamilton-függvényt a kanonikus impulzus függvényeként kapjuk:

$$H = c\sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m_0^2c^2} + e\Phi.$$

A részecske Hamilton-Jacobi-egyenlete

$$c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{A}\right)^2 + m_0^2c^2} + e\Phi + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

amit szokás gyökvonást nem tartalmazó alakban megadni:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\Phi\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{A}\right)^2 = m_0^2c^4.$$

26. Folytonos közegek (alapfogalmak)

Véges méretű testek, kiterjedt közegek nem csak merev testként viselkedhetnek. Nagyon sok részecskét, atomot, molekulát tartalmazó rendszerek nemrelativisztikus mozgásának leírására sokszor alkalmazható a folytonos közeg modellje. Feltételezzük, hogy a rendszert alkotó diszkrét részecskék olyan sűrűn helyezkednek el, hogy tetszőleges kis térfogatban találunk a térfogattal arányos össztömegű részecskét. Egy adott \mathbf{r} hely kis dV térfogatú környezetében található részecskék dm tömege ennek megfelelően

$$dm = \rho(\mathbf{r}) dV$$

alakban adható meg, ahol ρ a ún. tömegsűrűség. Egy véges V térfogatban található részecskék össztömege ezzel:

$$m = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV.$$

A tömegpontok azonosíthatóságához indexelnünk kell őket. Ezt a legcélszerűbben úgy tehetjük meg, hogy a részecskékhez a kezdeti t_0 időpillanatban elfoglalt helyzetüket megadó \mathbf{r} helyvektorokat rendeljük. Az idő múlásával az eredetileg \mathbf{r} helyen található tömegpont elmozdul és a t időpontban egy $\mathbf{r}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ helyen lesz megtalálható. Az elmozdulásokat jellemző $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ vektormezőt elmozdulásmezőnek nevezzük. A tömegpont sebessége az \mathbf{s} vektor időszerinti parciális deriváltja lesz:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \mathbf{s}(\mathbf{r}, t),$$

ahol az időszerinti parciális deriválást ∂_t -vel jelöljük. Hasonló módon fogjuk a hely szerinti parciális deriválás jelölését egyszerűsíteni: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$), ahol az \mathbf{r} helyvektor Descartes-koordinátái x_1, x_2 és x_3 . A sebesség szintén helyfüggő, neve: sebességmező.

A továbbiakban a vektoregyenleteket az indexelt komponensekre vonatkozó egyenletekként fogjuk felírni és alkalmazni fogjuk a kétszer előforduló indexekre vonatkozó Einstein-féle összegzési konvenciót. Indexes írásmódban a sebességmező komponensei tehát:

$$v_i = \partial_t s_i(x_j, t).$$

Az elmozdulásmező komponenseit érdemes a helyváltozók szerint a tetszőlegesen elhelyezhető origó körül hatványsorba fejteni:

$$s_i(x_j, t) = s_i(x_j = 0, t) + s_{ik}x_k + \dots, \quad (97)$$

ahol

$$s_{ik} = \partial_k s_i(x_j, t)_{x_j=0}$$

az ún. elmozdulás tenzor. Ha a vizsgált pont kis környezetében mozgunk, a sorfejtésben a másod- és magasabb rendű tagokat elhagyhatjuk. Ekkor az elmozdulástér lineáris függvénye lesz a helynek és ún. lineáris elmozdulások következnek csak be. A továbbiakban azt is feltételezzük, hogy az elmozdulástér térbeli változása olyan lassú, hogy a deriváltak szorzatait is elhagyhatjuk, ekkor ún. infinitezimális lineáris elmozdulásokat engedünk csak meg.

Bontsuk fel az s_{ik} elmozdulástenzort szimmetrikus és antiszimmetrikus részre

$$s_{ik} = \varepsilon_{ik} + a_{ik},$$

ahol

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\partial_k s_i + \partial_i s_k}{2},$$

$$a_{ik} = \frac{\partial_k s_i - \partial_i s_k}{2}.$$

Ezzel az elmozdulásmező az

$$s_i(x_j, t) = s_i(x_j = 0, t) + \varepsilon_{ij}x_j + a_{ij}x_j$$

alakot ölti. Az első tag konstans vektor, ami az anyagdarabka merevtest eltolásának felel meg és nincs kapcsolatban a belső relatív elmozdulásokkal, deformációkkal. A harmadik tag tartalmának kiderítéséhez írjuk fel az elmozdulásmező rotációjának és a helyvektornak a vektori szorzatát indexes alakban.

$$(\mathbf{rots} \times \mathbf{r})_i = \varepsilon_{ipk} (\varepsilon_{pqr} \partial_q s_r) x_k = (\delta_{kq} \delta_{ir} - \delta_{kr} \delta_{iq}) \partial_q s_r x_k = \partial_k s_i x_k - \partial_i s_k x_k = 2a_{ik} x_k.$$

Az eredmény azt mutatja, hogy ez a tag egy $\Delta\varphi = \frac{1}{2} \mathbf{rots}$ szögvektorral történő merevtest elfordulást ír le, ami a lokális deformációs állapot szempontjából érdektelen. Az anyagdarabka belső deformációját ezek szerint az ε_{ik} ún. deformációtenzor jellemzi.

A deformációtenzor elemeinek szemléletes jelentést is tulajdoníthatunk. Tekintsünk ehhez két, egymáshoz közeli pontot, amelyek eredeti koordinátái x_i^1 és $x_i^2 = x_i^1 + \Delta x_i$. Ha létrejön az $s_i(x_j)$ elmozdulás, a két pont új koordinátái:

$$x_i^{1'} = x_i^1 + s_i(x_j^1) \quad \text{és} \quad x_i^{2'} = x_i^2 + s_i(x_j^2).$$

Az új koordináták különbsége ebből

$$\Delta x_i' = x_i^2 + s_i(x_j^1 + \Delta x_j) - x_i^1 - s_i(x_j^1) = \Delta x_i + \varepsilon_{ik} \Delta x_k + a_{ik} \Delta x_k.$$

A merevtest eltolásnak megfelelő járulék eleve kiesik. Ha a merevtest elfordulástól eltekintünk, akkor a koordináták különbségei között a változást az elmozdulásmezőnek a deformációtenzonnal kifejezhető része szolgáltatja:

$$\Delta x_i' - \Delta x_i = \varepsilon_{ik} \Delta x_k.$$

Ha a két vizsgált pont egy az x_1 tengellyel párhuzamos d hosszúságú szakaszt feszít ki, akkor

$$\Delta x_k = d \delta_{1k}.$$

Ennek relatív megnyúlása

$$\frac{\Delta x_1' - \Delta x_1}{d} = \varepsilon_{1k} \Delta x_k = \varepsilon_{11}. \quad (98)$$

Ugyanez a szakasz el is fordul az (x_1, x_2) síkban, az óra járásával ellentétes irányban történt kis elfordulás szöge

$$\frac{\Delta x_2' - \Delta x_2}{d} = \varepsilon_{2k} \Delta x_k = \varepsilon_{21}.$$

Hasonló módon az eredetileg a x_2 tengely irányában álló d hosszúságú szakasz, amelynek koordinátái

$$\Delta x_k^* = d \delta_{2k}$$

is kifordul eredeti irányából az (x_1, x_2) síkban. Ennek az óra járásának megfelelő szöge

$$\frac{\Delta x_1^{*'} - \Delta x_1^*}{d} = \varepsilon_{1k} \Delta x_k^* = \varepsilon_{12} (= \varepsilon_{21}).$$

Így a két, egymással eredetileg derékszöget bezáró szakasznak az (x_1, x_2) síkban vett vetülete a derékszögtől $\varphi_{12} = 2\varepsilon_{12}$ szöggel eltérő szöget fog bezárni.

Vizsgáljuk meg egy elemi anyagdarab térfogatának relatív változását. Egy a, b, c élhosszúságú téglatest eredeti térfogata

$$dV = abc.$$

Az új térfogat (98) alapján

$$dV' = a(1 + \varepsilon_{11})b(1 + \varepsilon_{22})c(1 + \varepsilon_{33}) \approx dV(1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

ahol a deformációs tenzor elemeinek szorzatait kicsinységük miatt elhagytuk. A relatív térfogatváltozás

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} (= \varepsilon_{ii}).$$

Folytonos közegre ható erőhatásokat eredetüknek megfelelően különböző matematikai eszközökkel írhatjuk le. Ha a vizsgált tartomány részecskéire olyan távolabbi test hat, amellyel nincs közvetlen érintkezésben, feltételezzük, hogy az erőhatás arányos a kiszemelt térfogattal. Ilyen pl. a gravitációs erőter, vagy töltött test esetén az elektromos erőter hatása. Egy kiszemelt kis ΔV térfogatelemre ható erő ekkor

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{f} \Delta V$$

alakban adható meg, ahol \mathbf{f} az ún. (térfogati) erőűrűség. Egy véges térfogatra ható erőt a megfelelő térfogatra vett integrállal állíthatjuk elő:

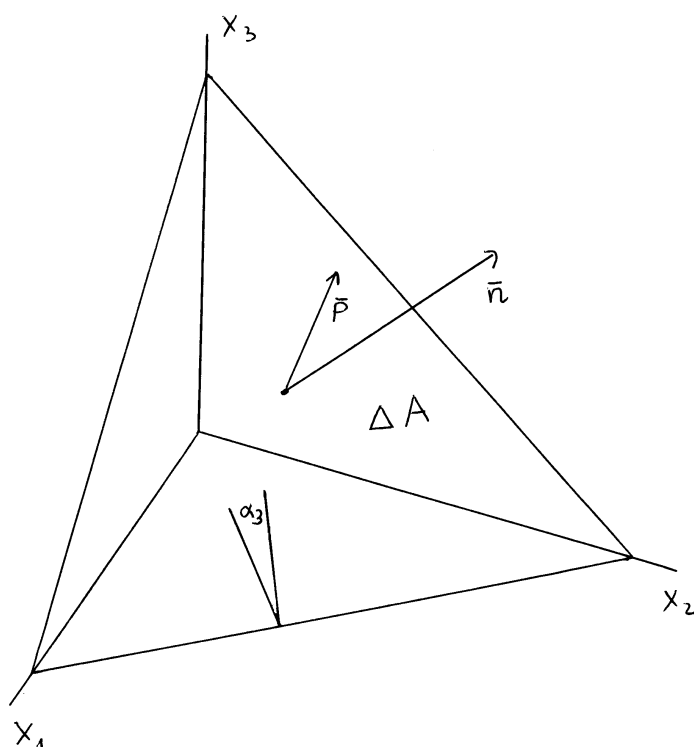
$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} dV.$$

A tartomány felületével érintkezhet egy másik folytonos közeg, aminek az érintkezésben résztvevő, a felülethez közel elhelyezkedő részecskéi is erővel hatnak a vizsgált közegre. A molekuláris erők rendkívül kis hatótávolsága miatt ez az erőhatás makroszkopikus szempontból a felületre koncentrálódik. Egy kisméretű, már síknak

tekinthető ΔA területű felületelemre ható erő nagyságáról feltételezhetjük, hogy a felület területével arányos:

$$\Delta F = p\Delta A,$$

ahol p a helyi "feszültség" értéke. A vizsgált pontban azonban különböző irányú felületelemek képzelhetők el, amit matematikailag úgy vehetünk figyelembe, hogy a felületelemet egy $\Delta \mathbf{A}$ vektormennyiséggel adjuk meg. A $\Delta \mathbf{F}$ erő szintén vektormennyiség, aminek iránya általában nem esik egybe $\Delta \mathbf{A}$ irányával. A kettő közötti viszony felderítéséhez vegyünk fel egy kicsiny méretű tetraéder alakú testet úgy, hogy a tetraéder csúcsa essen egybe az origóval, a három oldallapja pedig essen egybe sorban a három koordinátasíkkal.



Írjuk fel a tetraéder lapjaira ható erőket. Legyen az j -edik tengelyre merőleges oldallap területe ΔA_j . Az oldallapra ható erő:

$$\Delta \mathbf{F}_j = \mathbf{p}_j \Delta A_j,$$

ahol \mathbf{p}_j az j -edik lap egységnyi területére ható erő (feszültség). A tetraéder alaplajára ható erő hasonló alakú, ahol index nélkül jelöljük a megfelelő értékeket:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{p} \Delta A.$$

A tetraéderre ható teljes erő a Newton-egyenlet szerint egyenlő a tetraéder tömegközépponti \mathbf{a} gyorsulásának és $\rho \Delta V$ tömegének szorzatával

$$\sum_{j=1}^3 \mathbf{p}_j \Delta A_j + \mathbf{p} \Delta A + \mathbf{f} \Delta V = \rho \Delta V \mathbf{a}.$$

Állítsunk az alaplapra egy kifelé mutató \mathbf{n} egységvektort, aminek i -edik komponense $n_i = \cos \alpha_i$ lesz, ha α_i jelöli a vektornak az i -edik tengellyel bezárt szögét. Mivel az \mathbf{n} vektor merőleges az alaplapra, az i -edik oldallap pedig merőleges az i -edik tengelyre, az oldallap és az alaplap által bezárt szög szintén α_i . Mivel az oldallapok területe az alaplap területének merőleges vetületei ezért

$$\Delta A_j = \Delta A \cos \alpha_j = \Delta A n_j.$$

Helyettesítsünk a Newton-egyenletbe:

$$\left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{p}_j n_j + \mathbf{p} \right) \Delta A = (\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}) \Delta V$$

Osszuk el az egyenletet ΔA -val és vizsgáljuk meg a jobb oldalon kapott $\frac{\Delta V}{\Delta A}$ tényező értékét. Ha a tetraédert alakja megtartása mellett arányosan zsugorítjuk az origóra, a ΔV térfogat a lineáris méretek köbével, az alaplap ΔA területe a lineáris, nullához tartó méretek négyzetével tart nullához és így a hányadosuk nullához tart. Határmenetben nyerjük, hogy

$$\sum_{j=1}^3 \mathbf{p}_j n_j + \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Ha a $-\mathbf{p}_j$ vektor i -edik komponensét σ_{ij} -vel jelöljük, akkor az \mathbf{n} egységvektorral jellemzett lapra ható \mathbf{p} feszültség i -edik komponense

$$p_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j$$

alakban áll elő. Az így bevezett σ_{ij} háromszor-hármas mátrix az ún. feszültségtenzor komponenseinek a mátrixa. Ennek a segítségével fel tudjuk írni az objektum tetszőleges, véges A felületére ható erő i -edik komponensét:

$$F_i = \int_A \sigma_{ij} df_j,$$

ahol a szumma jelet már nem írtuk ki.

27. Fizikai mennyiségek, mozgásegyenlet

A továbbiakhoz néhány matematikai összefüggést tisztázunk. Legyen $A(\mathbf{r}, t)$ valamilyen hely és időfüggő fizikai mennyiség, ami lehet egy skalármező, vagy valamilyen vektor- ill. tenzormező adott komponense is. Egy rögzített \mathbf{r} helyen A változásának sebessége a $\partial_t A$ időszerinti parciális deriválttal adható meg. Ha azonban az \mathbf{r} helyen lévő megfigyelő \mathbf{v} sebességgel mozog, a fizikai mennyiség változási sebességére ettől eltérő értéket mér, ui. az elemi időintervallummal elválasztott két mérést nem

ugyanazon a helyen hajtja végre. Ha a megfigyelő sebessége megegyezik a mozgó közeg sebességével, a nyert deriváltat szubsztanciális vagy materiális deriváltnak hívjuk és $d_t A$ -val jelöljük. A szubsztanciális derivált kiszámítása úgy történik, hogy a hely \mathbf{r} vektorát is időfüggőnek tekintjük: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ami megadja a kiszemelt elem pályamenti mozgását. Az A mennyiség szubsztanciális, időszerinti deriváltja ennek megfelelően a láncszabály szerint

$$d_t A = \partial_t A + v_i \partial_i A,$$

ahol v_i jelöli a \mathbf{v} sebességvektor i -edik komponensét.

Most tételezzük fel, hogy van egy olyan I fizikai mennyiség, amit az A mező valamilyen V térfogatra vett integráljával definiálunk:

$$I = \int A dV.$$

Az I mennyiség változási sebessége is kétféle módon vizsgálható. Ha rögzítjük az integrálási tartományt, az integrál értékének megváltozása az A függvény változási sebességével fog összefüggeni

$$\partial_t I = \partial_t \int A dV = \int \partial_t A dV.$$

Ha azonban a kijelölt V tartomány együtt mozog a közeggel, az I változási sebessége (az I szubsztanciális deriváltja) eltérő lesz:

$$d_t I = d_t \int A dV = \partial_t I + \oint A v_i df_i. \quad (99)$$

A második, zárt felületre vett integrál azért lép fel, mert a tartomány felülete lokálisan \mathbf{v} sebességgel mozog, ami az integrálási térfogatot lokálisan időegységenként $v_i df_i$ -vel növeli. A második tagot alakítsuk át a Gauss-tétel segítségével térfogati integrállá:

$$d_t I = \int [\partial_t A + \partial_i (A v_i)] dV. \quad (100)$$

Ha végrehajtjuk a divergenciaképzésben előírt deriválást és összevonjuk az első két tagot, a következő átalakított formában kapjuk az eredményt:

$$d_t I = \int (\partial_t A + v_i \partial_i A + A \partial_i v_i) dV = \int (d_t A + A \partial_i v_i) dV.$$

Alkalmazzuk a fenti összefüggéseket arra az esetre, amikor az A mennyiség a közeg ρ sűrűségével egyenlő. Az integrál ekkor a V térfogatba zárt m tömeggel lesz egyenlő

$$m = \int \rho dV.$$

Ha a tartomány belsejében nincsenek tömegforrások és érvényes a tömegmegmaradás elve, ennek az integrálnak szubsztanciális időderiváltja nulla:

$$d_t m = \int [\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i)] dV = 0,$$

vagy

$$d_t m = \int (d_t \rho + \rho \partial_i v_i) dV = 0.$$

Mivel az egyenlőség tetszőleges tartományra fennáll, az integrandusnak el kell tűnnie:

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0,$$

azaz

$$d_t \rho + \rho \partial_i v_i = 0.$$

A kapott két összefüggés az ún. kontinuitási egyenlet differenciális formájának két ekvivalens alakja.

Amennyiben a V tartományban q tömegforrás-sűrűség van jelen, a fenti gondolatmenet annyiban módosul, hogy $d_t m$ nem nulla, hanem az időegység alatt keletkező tömeggel egyenlő:

$$d_t m = \int q dV,$$

amiből a kontinuitási egyenlet

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i) = q. \quad (101)$$

A kontinuitási egyenlet fizikai tartalmát jól megvilágítja a következő átalakítás. Vegyük ismét a (101) egyenlet térfogati integrálját és rendezzük át az egyenletet:

$$\int \partial_t \rho dV = \int [q - \partial_i (\rho v_i)] dV.$$

A bal oldal az m tömegnek rögzített tartományon számított $\partial_t m$ változási sebességével egyenlő. Ha a jobb oldalon szereplő divergenciakifejezést tartalmazó integrált a Gauss-tétel segítségével a térfogatot körülvevő zárt felületi integrállá alakítjuk azt kapjuk, hogy

$$\partial_t m = \int q dV - \oint \rho v_i df_i.$$

Ez az egyenlet a kontinuitási egyenlet integrális formája. Az egyenlet értelmében az m tömeg növekedésének üteme két tagból áll: tartalmazza a $\rho \mathbf{v}$ ún. tömegáramsűrűség ellentétének felületi integrálját, ami megadja a V térfogatba időegység alatt beáramló tömeget, valamint q integrálját, ami a térfogatban időegység alatt keletkező tömeggel egyenlő.

Vizsgáljunk most olyan esetet, amikor az A integrandus a ρ tömegsűrűség egy tetszőleges B mennyiség $A = \rho B$ szorzata:

$$I = \int \rho B dV.$$

Alkalmazva a fenti általános (99) szabályt a szubsztanciális deriváltra, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_t I &= \int [\partial_t (\rho B) + \partial_i (\rho B v_i)] dV = \\ &= \int [B \partial_t \rho + \rho \partial_t B + B \partial_i (\rho v_i) + \rho v_i \partial_i B] dV = \\ &= \int \{B [\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i)] + \rho [\partial_t B + v_i \partial_i B]\} dV. \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezésben az első szögletes zárójel értéke a tömegforrás nélküli esetben - a kontinuitási egyenlet miatt - zérus. A második tagban a szögletes zárójelben a B mennyiség szubsztanciális deriváltja, tehát:

$$d_t I = \int \rho d_t B dV. \quad (102)$$

Alkalmazzuk az eredményt egy adott térfogatban található anyagmennyiség impulzusára. Adott V tartományban található közeg \mathbf{P} impulzusának i -edik komponense egyenlő a $\rho \mathbf{v}$ impulzussűrűség i -edik komponensének térfogati integráljával:

$$P_i = \int \rho v_i dV.$$

P_i szubsztanciális deriváltja Newton 2-ik axiómája szerint egyenlő a tartományra ható \mathbf{F} erő i -edik komponensével:

$$d_t P_i = F_i,$$

azaz

$$\int \rho d_t v_i dV = \int f_i dV + \oint \sigma_{ij} df_j,$$

ahol az erőt az \mathbf{f} térfogati erőssűrűség térfogati és a σ feszültség felületi integráljával adtuk meg. Ha a felületi integrált térfogati integrállá alakítjuk és az egyenletet egy oldalra rendezzük, azt kapjuk, hogy:

$$\int (\rho d_t v_i - f_i - \partial_j \sigma_{ij}) dV = 0.$$

Mivel az összefüggés tetszőleges tartományra fennáll, az integrandusnak el kell tűnnie, amiből a következő mozgásegyenletet nyerjük:

$$\rho d_t v_i = f_i + \partial_j \sigma_{ij}. \quad (103)$$

Írjuk fel $d_t P_i$ értékét az eredeti, átalakítás előtti formában is, azaz (100)-ben legyen $A = \rho v_i$:

$$\int [\partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i v_j) - f_i - \partial_j \sigma_{ij}] dV = 0.$$

Az integrandus ismét nulla kell legyen, tehát:

$$\partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = f_i.$$

Az összefüggés a ρv impulzussűrűségre fennálló kontinuitási egyenlet, azaz az impulzustétel differenciális alakja. A bal oldal második tagja a $p_{ij} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}$ impulzusáramsűrűség divergenciája. A jobb oldalon az \mathbf{f} erőssűrűség szolgál az impulzusáram forrassűrűségként. Integrális alakban

$$\partial_t \int \rho v_i dV = - \oint p_{ij} df_j + \int f_i dV.$$

A bal oldal a V tartományban található közeg összimpulzusának rögzített tartományra számított változási sebességét adja, ami az egyenlet szerint egyenlő a tartomány felületén időegység alatt beáramló impulzus és a tartomány belsejében az \mathbf{f} erőssűrűség hatására időegység alatt keletkező impulzus összegével.

Vizsgáljuk meg a V tartományban található közeg \mathbf{L} impulzusnyomatékát. Ha a közeg részecskéinek saját, a pályamozgástól függetlenül létező impulzusnyomatéka (spinje) elhanyagolható, az impulzusnyomaték sűrűsége a ρv impulzussűrűség és az \mathbf{r} helyvektor vektoriális szorzatával adható meg. Az \mathbf{L} vektor L_i komponense ennek térfogati integráljaként áll elő:

$$L_i = \int \varepsilon_{ijk} r_j \rho v_k dV.$$

Mivel ez is olyan integrál, amelyben a ρ sűrűség szorzófaktorként szerepel, az L_i szubsztanciális deriváltjára (102) szerint írhatjuk, hogy

$$d_t L_i = \int \varepsilon_{ijk} \rho d_t (r_j v_k) dV.$$

Végezzük el az integrandusban a deriválást:

$$d_t (r_j v_k) = \partial_t (r_j v_k) + v_l \partial_l (r_j v_k) = r_j \partial_t v_k + v_l \delta_{lj} v_k + v_l r_j \partial_l v_k = v_j v_k + r_j d_t v_k,$$

amivel

$$d_t L_i = \int \varepsilon_{ijk} \rho (v_j v_k + r_j d_t v_k) dV.$$

A zárójelben álló első tag egy a (j, k) indexpárban szimmetrikus mátrix. Ha ennek mindkét indexét összeadjuk a (j, k) indexpárban antiszimmetrikus ε_{ijk} mátrix indexeivel nullát kapunk. A második tagtól származó szorzatban a (103) mozgásegyenlet alapján cseréljük le a $\rho d_t v_i$ tényezőt.

$$d_t L_i = \int \varepsilon_{ijk} r_j (f_k + \partial_s \sigma_{ks}) dV.$$

Az integrandus második tagját alakítsuk át teljes divergenciává és alkalmazzuk a Gauss-tételt:

$$\begin{aligned} d_t L_i &= \int \varepsilon_{ijk} r_j f_k dV + \int \varepsilon_{ijk} r_j \partial_s \sigma_{ks} dV \\ &= \int \varepsilon_{ijk} r_j f_k dV + \int \varepsilon_{ijk} \partial_s (r_j \sigma_{ks}) dV - \int \varepsilon_{ijk} \sigma_{ks} \partial_s r_j dV \\ &= \int \varepsilon_{ijk} r_j f_k dV + \oint \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{ks} df_s - \int \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV. \end{aligned}$$

Az első tag a kiszemelt térfogatban található közegre ható \mathbf{f} térfogati erősrűség forgatónyomatékának i -edik komponense. A második tag a felületen ható σ feszültség forgatónyomatékának i -edik komponense. A harmadik tagban kihasználtuk, hogy $\partial_s r_j = \delta_{sj}$.

Az első két tag összege a közegre kívülről ható \mathbf{M} forgatónyomaték M_i komponense:

$$M_i = \int \varepsilon_{ijk} r_j f_k dV + \oint \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{ks} df_s.$$

Az impulzusmomentumra ezek szerint fennáll, hogy

$$d_t L_i = M_i - \int \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV.$$

A dinamika alaptörvénye szerint, ha a közegre forgatónyomaték nem hat, az impulzusmomentum állandó kell maradjon, azaz:

$$\int \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV = 0.$$

Mivel az integrál tetszőleges tartományon eltűnik, az integrandusnak el kell tűnnie:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0.$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát ε_{ipq} -val és alkalmazzuk az $\varepsilon_{ipq} \varepsilon_{ijk} = \delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}$ azonosságot:

$$(\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) \sigma_{kj} = \sigma_{qp} - \sigma_{pq} = 0.$$

Tehát a feszültségtenzor szimmetrikus kell legyen. Az impulzusmomentumra pedig a várt egyenletet kapjuk:

$$d_t L_i = M_i.$$

A következő lépésben megvizsgáljuk a rugalmasan deformálható testben az energiaviszonyokat. Írjuk fel egy kiszemelt V tartomány K kinetikus energiáját

$$K = \int \rho \frac{v_i v_i}{2} dV,$$

és vegyük ennek a szubsztanciális deriváltját újra alkalmazva (102)-t:

$$d_t K = \int \rho d_t \left(\frac{v_i v_i}{2} \right) dV = \int \rho \partial_t \left(\frac{v_i v_i}{2} \right) dV + \int \rho v_j \partial_j \left(\frac{v_i v_i}{2} \right) dV = \int \rho v_i d_t v_i dV.$$

A (103) mozgásegylet alapján helyettesítsük be az integrandusba a $\rho d_t v_i$ tényezőt:

$$d_t K = \int v_i (f_i + \partial_j \sigma_{ij}) dV.$$

Alakítsuk át a jobb oldalon álló integrál második tagját divergenciává és vonjuk le a többlet tagot:

$$d_t K = \int v_i f_i dV + \int \partial_j (v_i \sigma_{ij}) dV - \int \sigma_{ij} \partial_j v_i dV. \quad (104)$$

A $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességmező v_i komponense definíció szerint az $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ elmozdulástér s_i komponensének idő szerinti $\partial_t s_i$ parciális deriváltjával egyenlő. Ha ennek képezzük a $\partial_j \partial_t s_i$ parciális deriváltját és alkalmazzuk a Young-tételt, azt kapjuk, hogy $\partial_j v_i = \partial_t \partial_j s_i$. Ez a kifejezés a szimmetrikus σ_{ij} mátrixszal szorozva, csak az ε_{ij} szimmetrikus részével ad járulékot

$$\sigma_{ij} \partial_j v_i = \sigma_{ij} \partial_t \partial_j s_i = \sigma_{ij} \partial_t \varepsilon_{ij}. \quad (105)$$

A (104) egyenlőséget ennek segítségével átalakíthatjuk:

$$\int \left[\partial_t \left(\rho \frac{v_i v_i}{2} \right) + \partial_j \left(\rho \frac{v_i v_i v_j}{2} \right) - \partial_j (v_i \sigma_{ij}) \right] dV = \int v_i f_i dV - \int \sigma_{ij} \partial_t \varepsilon_{ij} dV,$$

ahol $d_t K$ -t a (100) alkalmazásával részletesen kiírtuk és a jobb oldalon álló második tagot átvittük balra.

Ismét közös integrálba gyűjtve az összes tagot nyerjük az energiára vonatkozó kontinuitási egyenlet differenciális alakját:

$$\partial_t \left(\rho \frac{v_i v_i}{2} \right) + \partial_j \left(\rho \frac{v_i v_i v_j}{2} - v_i \sigma_{ij} \right) = v_i f_i - \sigma_{ij} \partial_t \varepsilon_{ij}.$$

A tagok értelme a következő: az első tag a kinetikus energia sűrűségének a változási sebessége. A második tag az energiaáram

$$\rho \frac{v_i v_i v_j}{2} - v_i \sigma_{ij}$$

sűrűségének divergenciája, ami két járulékból áll: az első tag az ún. konvektív rész, ami a mozgó közeg által szállított kinetikus energiának felel meg, a második tag pedig az ún. deformációs energia áramsűrűsége. A jobb oldalon álló, energiaforrás-sűrűséget reprezentáló tagok megfelelnek egyrészt az \mathbf{f} tömegerők teljesítménysűrűségének, másrészt a σ feszültséggel szemben végzett deformációs teljesítménysűrűségnek

Az egyenlet fizikai interpretációjának érdekében rendezzük át az egyenletet és integráljunk a térfogatra. A divergenciát tartalmazó tagot pedig felületi integrállá alakítjuk:

$$\partial_t \int \rho \frac{v_i v_i}{2} dV + \int \sigma_{ij} \partial_t \varepsilon_{ij} dV = \int v_i f_i dV + \oint \left(v_i \sigma_{ij} - \rho \frac{v_i v_i v_j}{2} \right) df_j.$$

Az egyenlet tartalma a következő. A bal oldal első tagja a kinetikus energia változásának sebessége, a második tag pedig az ún. deformációs teljesítmény. Ezek összegével egyenlő a jobb oldalon álló összeg, amelynek első tagja a külső tömegerők teljesítménye, a második tagja pedig az időegység alatt a felületen végzett deformációs munka és a kiáramló anyag által elvitt kinetikus energia összege.

Ha a közeg rugalmas tulajdonságai időben állandóak és a benne felhalmozott (rugalmas) deformációs energia φ sűrűsége egyértelműen kifejezhető a lokális deformációs állapotot jellemző ε_{ij} -vel, akkor a teljes Φ deformációs energiára írhatjuk, hogy:

$$\Phi = \int \varphi(\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}) dV.$$

Az integrál rögzített tartományban bekövetkező változási sebessége a láncszabály szerint

$$\partial_t \Phi = \int \partial_t \varphi(\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}) dV = \int \frac{\partial \varphi(\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r})}{\partial \varepsilon_{ij}} \partial_t \varepsilon_{ij} dV.$$

Mivel ennek egyenlőnek kell lennie a deformációs teljesítményt leíró $\int \sigma_{ij} \partial_t \varepsilon_{ij} dV$ taggal, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (106)$$

Ekkor $\sigma_{ij} \partial_t \varepsilon_{ij} = (\partial \varphi / \partial \varepsilon_{ij}) \partial_t \varepsilon_{ij} = \partial_t \varphi$.

Az energiamérleg integrális alakja:

$$\partial_t (K + \Phi) = \int f_i v_i dV + \oint \left(v_i \sigma_{ij} - \rho \frac{v_i v_i v_j}{2} \right) df_j,$$

aminek interpretációja kézenfekvő. A rögzített térfogatban található közeg teljes energiája $E = K + \Phi$, aminek időegységre eső növekedése egyenlő a térfogatba kívülről időegység alatt beáramló energiával. A differenciális alak ebben a megfogalmazásban tehát:

$$\partial_t \left(\rho \frac{v_i v_i}{2} + \varphi \right) + \partial_j \left(\rho \frac{v_i v_i v_j}{2} - v_i \sigma_{ij} \right) = v_i f_i.$$

Ha a σ feszültségtenzornak van olyan σ' összetevője, ami nem állítható elő a φ rugalmas potenciálsűrűség ε_{ij} szerint vett parciális deriváltjaként, mert pl. belső súrlódásból származik, akkor $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \partial \varphi / \partial \varepsilon_{ij}$ felbontás esetén, a deformációs teljesítménysűrűség (105) szerint kibővül

$$\sigma_{ij} \partial_t \varepsilon_{ij} = \sigma'_{ij} \partial_t \varepsilon_{ij} + (\partial \varphi / \partial \varepsilon_{ij}) \partial_t \varepsilon_{ij} = \sigma'_{ij} \partial_j v_i + \partial_t \varphi.$$

Ennek megfelelően az előző egyenlet $\partial_t \varphi$ tagja mellett megjelenik a $\sigma'_{ij} \partial_j v_i$ tag, amit átvéve az egyenlet jobb oldalára:

$$\partial_t \left(\rho \frac{v_i v_i}{2} + \varphi \right) + \partial_j \left(\rho \frac{v_i v_i v_j}{2} - v_i \sigma_{ij} \right) = v_i f_i - \sigma'_{ij} \partial_j v_i.$$

A jobb oldalon a második tag energiaáram-nyelőként jelent meg. Neve disszipációs függvény, amit akkor tudunk megadni, ha tudjuk, hogy a közeg mozgási állapotától hogyan függ a σ' súrlódási tenzor.

28. Hooke-törvény

Ha a közeg potenciálos, azaz a lokális deformációs állapotnak egyértelmű függvényeként adható meg a deformációs energiasűrűség, akkor, mint láttuk a feszültségtenzor egyértelműen megadható a deformációk függvényeként: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) = \partial \varphi / \partial \varepsilon_{ij}$.

Kis deformációk esetén σ_{ij} -t sorba fejtvé kapjuk, hogy:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(0) + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_0 \varepsilon_{kl} + \dots$$

Mivel deformálatlan állapotban nincsenek feszültségek, az első tag zérus. (Az, hogy milyen állapotot tekintünk deformálatlannak megegyezés kérdése. Kézenfekvő a feszültségmentes állapotot kiinduló pontnak tekinteni.) Ha a deformációk kicsik, a tapasztalat szerint megállhatunk a lineáris közelítésnél és ekkor az ún. Hooke-törvényt nyerjük:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (107)$$

ahol bevezettük a

$$C_{ijkl} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_0$$

jelölést. A C_{ijkl} ún. rugalmas együtthatók általában függhetnek a helytől is, de homogén közeg esetén az értékük állandó. Alkalmazva a (106) összefüggést

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

amiből egyrészt következik, hogy

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}},$$

másrészt, hogy

$$\varphi = \frac{C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}}{2} = \frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2},$$

vagy

$$\varphi = \frac{1}{2} C_{ijkl} \partial_j s_i \partial_l s_k.$$

Egy C_{ijkl} alakú négyindexes mátrix általában $3^4 = 81$ különböző elemet tartalmazhat. A szimmetriatulajdonságok miatt azonban, a Hooke-tenzor elemei közül nem mindegyik független. A (107) Hooke-törvényben mind a feszülstégtenzor, mind a deformációs tenzor szimmetrikus és ezért a C_{ijkl} is szimmetrikus az (i, j) valamint a (k, l) indexpárokban. A rugalmas együtthatóknak a φ potenciálsűrűségéből történő, fenti előállítás pedig a Young-tétel következtében azt mutatja, hogy C_{ijkl} az (i, j) és (k, l) indexpárok egyidejű cseréjére nézve is szimmetrikus. Mindezen szimmetriák csak 21 különböző elemet engednek meg.

Egy anizotrop, kristályos közegben a független elemek száma ténylegesen 21 marad. Ha azonban a kristályszerkezet bizonyos szimmetriákkal bír, a független elemek száma tovább csökken. A szabályos vagy másnéven köbös kristályban, amelyet az jellemez, hogy a tükrözések és a 90° -os elforgatások önmagába viszik át, csak 3 különböző értékű elem marad: C_{1111} , C_{1122} , C_{1212} . A számítások szerint a megfelelő rugalmas energiasűrűség

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2} C_{1111} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + C_{1122} (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) \\ & + 2C_{1212} (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2). \end{aligned}$$

Amorf, izotrop közegben, amelyben a rugalmas tulajdonságok nem csak diszkrét szögekkel történő, hanem tetszőleges elforgatás esetén is invariánsak maradnak, a fenti

energiasűrűség invarianciájának követelménye további összefüggés fennállását rója ki: $C_{1111} = C_{1122} + 2C_{1212}$, ami végül két független állandó használatát teszi szükségessé. Szokás bevezetni a λ és μ ún. Lamé-féle állandóknak nevezett konstansokat, amelyekkel

$$C_{1122} = \lambda, \quad C_{1212} = \mu,$$

és így

$$C_{1111} = \lambda + 2\mu.$$

A rugalmas energiasűrűség ebben az esetben

$$\varphi = \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{ii}^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

A feszültségtenzor komponenseit deriválással nyerjük:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (108)$$

amiből a Hooke-tenzor újabb deriválással adódik. A deriválásnál figyelembe kell vennünk, hogy ε_{ij} szimmetrikus, amit a legegyszerűbben úgy tehetünk, hogy a második tagot szimmetrizáljuk:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}),$$

amiből

$$C_{ijkl} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (109)$$

A deformációs tenzort felbonthatjuk a tiszta nyírásnak megfelelő spurmentes és az egyeneses összenyomásnak megfelelő tagjaira:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}.$$

A Hooke-törvény szerint a feszültség ennek megfelelően szintén felbontható spurmentes és a teljes spurt hordozó tagra

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) + K\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad (110)$$

ahol bevezettük a $K = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ ún. kompressziómodulust.

Ebben a felbontásban μ neve torziómodulus.

A potenciálsűrűség ennek a felbontásnak megfelelően

$$\varphi = \mu\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right)^2 + \frac{K}{2}\varepsilon_{kk}^2.$$

Sokszor van szükség a fordított irányú kifejezésre: a deformációk függésére a feszültségektől. Ennek megtalálásához képezzük a Hooke-törvény (110) alakjának spurját. Mivel az első tag spurmentes

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{kk},$$

amiből

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{ll}}{3K}.$$

A kapott összefüggést a (110) Hooke-törvénybe helyettesítve, átrendezés után nyerjük, hogy:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ll} \right) + \frac{1}{9K} \delta_{ij} \sigma_{ll},$$

ahol az első tag spurja nulla. Összevont alakban ugyanez:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{ll}. \quad (111)$$

Érdeemes a deformációk néhány egyszerű esetét külön is kiemelni.

1. Ha az x tengely irányában fekvő A keresztmetszetű rúdra a tengely irányába eső F nagyságú húzóerőt gyakorolunk, a feszültségtenzor

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alakot ölti, ahol $p = \frac{F}{A}$. A deformációs tenzor (111) szerint

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} p \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & -p \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & -p \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \end{pmatrix}.$$

A rugalmas tulajdonságok jellemzésére bevezetik az E Young-moduluszt, amivel az $\frac{F}{A}$, egységnyi felüleltre ható erő és a $\delta l/l$ relatív megnyúlás arányát jellemzik:

$$\frac{\delta l}{l} E = \frac{F}{A}.$$

Mivel az ε_{11} komponens az x tengely irányában létrejött $\delta l/l$ relatív megnyúlással egyenlő, felírhatjuk, hogy

$$p \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} E = \frac{F}{A},$$

amiből

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Vegyük észre, hogy a deformációtenzor ε_{22} és ε_{33} elemei nem nullák, hanem negatív értéket vesznek fel. A közeg a húzásra merőleges irányban zsugorodik, ún. haránt-összehúzódást szenved el. A haránt-összehúzódás mértékének jellemzésére, annak a relatív megnyúláshoz viszonyított (negatív) arányát szokták bevezetni (Poisson-szám):

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

2. Ha a vizsgált testet pl. a külső légnyomás hatásának tesszük ki, egyenletes p nyomás jelenik meg a felszínén, ami a test belsejében is tovaterjedhet. A kialakult feszültség tenzora

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

lehet. A deformáció (111) alapján

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{p}{3K}\delta_{ij}.$$

A relatív térfogatváltozás

$$\frac{\delta V}{V} = \varepsilon_{ii},$$

azaz

$$p = -K\frac{\delta V}{V},$$

ami indokolja, hogy K -t kompressziómodulusnak neveztük.

3. A közeg z tengelyre merőleges síkjában egy A méretű felületre F nagyságú y irányú (nyíró)erővel hatunk, aminek a segítségével tiszta nyírást szeretnénk létrehozni. A megfelelő elmozdulás tér

$$s_i = \begin{pmatrix} 0 \\ Cx_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alakú lehet, ahol C konstans jellemzi a nyírás szögét. A deformációtenzor ennek megfelelően

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C}{2} \\ 0 & \frac{C}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

A (108) egyenletből a feszültségtenzor

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu C \\ 0 & \mu C & 0 \end{pmatrix},$$

ahol a feszültségtenzor definíciója szerint

$$\mu C = \frac{F}{A}$$

kell legyen. Az s_i elmozdulástér megadott komponensei szerint a nyírás szöge éppen egyenlő C -vel ami azt jelenti, hogy μ Lamé-állandó nem más, mint a kísérleti fizikában megismert G nyírási modulus

$$\mu = G.$$

29. A mozgásegyenlet megoldása, hullámok

A rugalmas, anizotrop közeg mozgását meghatározó egyenletek ezek szerint:

$$\begin{aligned}\rho d_t v_i &= f_i + \partial_j \sigma_{ij} \text{ (mozgásegyenlet),} \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ (Hooke-törvény),} \\ \partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i) &= 0 \text{ (kontinuitási egyenlet).}\end{aligned}$$

A Hooke-törvény szerint a feszültségtenzort behelyettesíthetjük a mozgásegyenletbe:

$$\rho d_t v_i = f_i + \partial_j C_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

A sebesség szubsztanciális deriváltja $d_t v_i = \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i$, amiben a második, konvektív tag rugalmas testekben elhanyagolhatóan kicsi járulékot ad az első, helyi gyorsulásnak megfelelő tag mellett. Homogén közeg esetén a Hooke-tenzor nem függ a helytől. Ha ezek után figyelembe vesszük, hogy $v_i = \partial_t s_i$, valamint azt, hogy mi a deformációs tenzor definíciója, az alábbi mozgásegyenletet nyerjük:

$$\rho \partial_t^2 s_i = f_i + C_{ijkl} \partial_j (\partial_k s_l + \partial_l s_k) / 2.$$

A Hooke-tenzor harmadik és negyedik indexében szimmetrikus és így a zárójelben található két tag a Hooke-tenzorral megszorozva ugyanazt az eredményt szolgáltatja. Ezt is figyelembe véve, az egyenlet végső alakja:

$$\rho \partial_t^2 s_i = f_i + C_{ijkl} \partial_j \partial_k s_l.$$

A nyert mozgásegyenlet egy lineáris, inhomogén parciális differenciálegyenlet, aminek standard alakját átrendezés után kapjuk:

$$\rho \partial_t^2 s_i - C_{ijkl} \partial_j \partial_k s_l = f_i. \quad (112)$$

Fontos speciális eset a statikus egyensúly esete, amikor az elmozdulástér időben nem változik, azaz $\partial_t s_i = 0$. Ekkor az egyenlet a

$$C_{ijkl} \partial_j \partial_k s_l = -f_i$$

parciális differenciálegyenletre redukálódik, aminek a megoldását f_i és a peremfeltételek ismeretében kísérhetjük meg.

Amorf közeg esetén a Hooke-tenzort (109) adja meg, amivel

$$[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \partial_j \partial_k s_l = -f_i.$$

Az indexek összeajtése után az egyenlet

$$(\lambda + \mu) \partial_i \partial_k s_k + \mu \partial_k \partial_k s_i = -f_i,$$

ami vektorjelöléssel:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{s} + \mu \Delta \mathbf{s} = -\mathbf{f}.$$

Amikor külső erőtér nincs jelen, a (112) egyenlet homogén, lineáris, másodrendű, parciális differenciálegyenlet(rendszer).

Keressük az egyenlet síkhullám megoldásait. Az n_p komponensekkel bíró \mathbf{n} egységvektor ($n_p n_p = 1$) irányában, v terjedési sebességgel mozgó síkhullám \mathbf{r} hely- és t időfüggésének általános alakja

$$s_i(\mathbf{r}, t) = S_i \Psi(\mathbf{nr} - vt),$$

ahol S_i egy rögzített vektor komponenseit jelöli és Ψ tetszőleges (kétszer deriválható) egyváltozós függvény. Mindenhol indexes írásmódot alkalmazva ($\mathbf{nr} = n_p r_p$), helyettesítsük be a próbamegoldást a mozgásegyenletbe:

$$\rho S_i \partial_t^2 \Psi(n_p r_p - vt) = S_l C_{ijkl} \partial_j \partial_k \Psi(n_p r_p - vt).$$

Elvégezve a deriválásokat, látszólag egy Ψ -re vonatkozó közönséges, másodrendű differenciálegyenletet kapunk

$$\rho S_i \Psi'' v^2 = S_l C_{ijkl} n_j n_k \Psi''.$$

Az egyenletet az egyik oldalra rendezzük és Ψ'' -t kiemeljük

$$(\rho S_i v^2 - S_l C_{ijkl} n_j n_k) \Psi'' = 0.$$

Látható, hogy az egyenletnek akkor lehet nemtriviális megoldása, ha a zárójelben álló kifejezés eltűnik

$$\rho S_i v^2 - S_l C_{ijkl} n_j n_k = 0. \quad (113)$$

Az összefüggés, ami a $C_{ijkl} n_j n_k$ mátrix ρv^2 sajátértékhez tartozó sajátvektoregyenlete, feltételi egyenletet jelent a bevezetett S_i , v , és n_p konstansokra nézve. A kiértékeléshez az első tagban fellépő S_i tényezőt az $S_i = \delta_{il} S_l$ alakkal helyettesítjük, ekkor az egyenletben kiemelhetjük S_l -et:

$$S_l (\rho \delta_{il} v^2 - C_{ijkl} n_j n_k) = 0. \quad (114)$$

A kapott egyenlet egy homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszer az S_l komponensekre nézve, aminek akkor van nemtriviális megoldása, ha az egyenlet determinánsa eltűnik:

$$\det(\rho \delta_{il} v^2 - C_{ijkl} n_j n_k) = 0. \quad (115)$$

Írjuk fel részletesen a determinánst:

$$\begin{vmatrix} \rho v^2 - C_{1jk1} n_j n_k & -C_{1jk2} n_j n_k & -C_{1jk3} n_j n_k \\ -C_{2jk1} n_j n_k & \rho v^2 - C_{2jk2} n_j n_k & -C_{2jk3} n_j n_k \\ -C_{3jk1} n_j n_k & -C_{3jk2} n_j n_k & \rho v^2 - C_{3jk3} n_j n_k \end{vmatrix} = 0. \quad (116)$$

Látható, hogy kifejtés esetén a determináns v^2 -re nézve egy $P_3(v^2)$ harmadfokú polinom, aminek általános esetben három különböző gyöke lehet. Megoldva a $P_3(v^2) = 0$ egyenletet, v^2 -re nézve és elvégezve a négyzetgyökvonást, hat különböző sebességértéket kapunk, amelyek között azonban, páronként szerepelnek egymás

ellentétei: $v_1, -v_1, v_2, -v_2, v_3, -v_3$. Az ellentétes párok ugyanahhoz a terjedési sebességhez tartoznak, csak ellenkező irányú hullámterjedésnek felelnek meg, amit nem szükséges külön vizsgálni.

Így, ha n_p rögzítésével kiválasztunk egy terjedési irányt, a $P_3(v^2) = 0$ egyenlet megoldásával három különféle lehetséges sebességértéket nyerünk (v_1, v_2, v_3) . Kiválasztjuk a q -adik lehetséges sebességértéket, amit $v_{(q)}$ -val jelölünk és megoldjuk a (114) homogén egyenletet $S_{(q)i}$ -re nézve. Az elmozdulástér ezzel:

$$s_{(q)i}(\mathbf{r}, t) = S_{(q)i} \Psi(n_p r_p - v_{(q)} t),$$

ahol Ψ tetszőleges függvény.

Adott terjedési irányhoz tehát háromféle hullám tartozik, amelyek rezgési iránya a térben rögzített és általában, a terjedési iránnyal bezárt szöge nem vesz fel speciális értéket (a hullám nem longitudinális vagy transzverzális).

Érdeemes külön megvizsgálni az izotrop, amorf közeg esetét. Az amorf közegre vonatkozó (109) Hooke-tenzort a (116) determinánsba történő behelyettesítése helyett helyettesítsük be a (113) egyenletbe:

$$\rho v^2 S_i - [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] n_j n_k S_l = 0.$$

Az egyenletben a lehetséges indexegybejtések elvégzése után két oldalra gyűjtjük az i és az l indexet viselő \mathbf{S} komponenseket

$$\frac{(\rho v^2 - \mu)}{\lambda + \mu} S_i = n_i n_l S_l. \quad (117)$$

Az egyenlet az $n_i n_l$ mátrix sajátvektor-egyenlete, aminek a $\Lambda = \frac{(\rho v^2 - \mu)}{\lambda + \mu}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora \mathbf{S} . Az $n_i n_l$ mátrix projektor mátrixa, azaz olyan \hat{P} lineáris operátor mátrixa, amire fennáll, hogy

$$\hat{P} \hat{P} = \hat{P}, \quad (118)$$

hiszen $n_i n_i = 1$ miatt

$$(n_k n_i) (n_i n_l) = n_k n_l.$$

Egy projektor Λ sajátértéke 0 vagy 1 lehet, hiszen ha a hozzátartozó sajátvektor \mathbf{w} és így

$$\hat{P} \mathbf{w} = \Lambda \mathbf{w},$$

akkor egyrészt

$$\hat{P} \hat{P} \mathbf{w} = \Lambda^2 \mathbf{w},$$

másrészt (118) miatt

$$\hat{P} \hat{P} \mathbf{w} = \hat{P} \mathbf{w} = \Lambda \mathbf{w}.$$

Összevetve kapjuk, hogy

$$\Lambda^2 = \Lambda, \text{ tehát } \Lambda (\Lambda - 1) = 0,$$

amiből $\Lambda = 0$ vagy $\Lambda = 1$.

Az első esetben:

$$\frac{(\rho v^2 - \mu)}{\lambda + \mu} = 0,$$

amiből $v_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. A második esetben

$$\frac{(\rho v^2 - \mu)}{\lambda + \mu} = 1,$$

amiből $v_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$. Összesen kétféle sebességértéket kaptunk, mivel a váltott előjel az ellentétes irányú hullámterjedésnek felel meg.

Vizsgáljuk meg az S_l vektorkomponenseket. Az első esetben, amikor $v_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, a (117) egyenlet szerint

$$n_i n_l S_l = 0$$

lesz. Mivel az n_i értékek közül nem lehet mindegyik nulla, a $n_l S_l$ szorzat el kell tűnjön, azaz a rezgés irányát megadó \mathbf{S} vektor merőleges a terjedés irányát megadó \mathbf{n} vektorra. A kapott hullám tehát transzverzális hullám, aminek terjedési sebessége $v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Vizsgáljuk meg a másik esetet, amikor $v^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\rho}$. A (117) egyenlet szerint

$$S_i = n_i n_l S_l \quad (119)$$

A jobb oldalon az \mathbf{S} és az \mathbf{n} vektor skaláris szorzata van megszorozva az n_i vektorkomponenssel és így \mathbf{S} párhuzamos \mathbf{n} -nel. Ez longitudinális hullámot jelent, aminek sebessége $v = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$.

Érdeemes megmutatni, hogy a longitudinális hullám rotációja eltűnik. Vegyük ugyanis az $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}\Psi(n_p r_p - vt)$ megoldás rotációjának k -edik komponensét:

$$rot[\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)]_k = \varepsilon_{kji} \partial_j s_i(\mathbf{r}, t).$$

Behelyettesítve a fenti alakot:

$$\varepsilon_{kji} \partial_j s_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{kji} \partial_j S_l \Psi(n_p r_p - vt) = \varepsilon_{kji} n_j S_l \Psi'(n_p r_p - vt).$$

Használjuk ki S_i (119)-beli előállítását:

$$rot[\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)]_k = \varepsilon_{kji} n_j n_l S_l \Psi'(n_p r_p - vt).$$

Mivel $n_j n_i$ szimmetrikus mátrix, ε_{kji} pedig antiszimmetrikus az (j, i) indexpárban, a mindkét indexet egybeejtő szorzatuk nulla.

Hasonlóan, a transzverzális hullám esetén, írjuk fel $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ divergenciáját:

$$divs(\mathbf{r}, t) = \partial_i s_i(\mathbf{r}, t) = n_i S_i \Psi'(n_p r_p - vt).$$

Transzverzális hullám esetén az $n_i S_i$ szorzat értéke volt nulla, tehát annak a divergenciája tűnik el.

30. Folytonos rendszerek Lagrange-formalizmusa

Tekintsük egy olyan kifeszített, rugalmas (pl. gumi)szál viselkedését, amelyen longitudinális hullámok keletkezhetnek. Legyen a szál keresztmetszete A , Young-modulusa E , térfogati tömegsűrűsége ρ és ennek megfelelően a lineáris tömegsűrűsége $\eta = \rho A$.

Modellezzük a szál viselkedését egy sűrűn, egyenletes a távolságban elhelyezett m tömegű tömegpontokból és azokat összekötő D rugóállandójú rugókból álló lineáris rendszerrel. Az x tengely mentén elhelyezett j -edik tömegpont egyensúlyi koordinátája $a_j = ja$, és az ettől való eltérést jelöljük q_j -vel. A j -edik rugó megnyúlása $\Delta q_j = q_{j+1} - q_j$. A rendszer L_a Lagrange-függvénye (ahol az index az a paraméterre utal) felírható a tömegpontok kinetikus energiája és a rugókban felhalmozott potenciális energia segítségével:

$$L_a = \sum_j \frac{1}{2} [m\dot{q}_j^2 - D(q_{j+1} - q_j)^2].$$

A Lagrange-egyenleteket felírva

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L_a = \frac{\partial}{\partial q_j} L_a,$$

a következő Newton-egyenleteket nyerjük:

$$m\ddot{q}_j = D(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}). \quad (120)$$

A rendszer potenciális energiája a q_j koordináták kvadratikus formája, így az egyenlet megoldását

$$q_j = A_j \exp(-i\omega t)$$

alakú normálrezgések alakjában kereshetjük. Behelyettesítve a (120) mozgásegyenletbe, az A_j együtthatókra a következő feltételt nyerjük:

$$\omega^2 mA_j + D(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}) = 0. \quad (121)$$

A (121) homogén egyenletrendszer megoldása $A_j = A \exp ika_j$ alakban kereshető, ahol k később meghatározandó paraméter. Behelyettesítve, az

$$\omega^2 mA \exp ika_j + D[A \exp ika(j+1) - 2A \exp ika_j + A \exp ika(j-1)] = 0$$

feltételi egyenletet nyerjük. Egyszerűsítés után

$$\omega^2 m + D[\exp ika - 2 + \exp(-ika)] = 0,$$

vagy

$$\omega^2 m + 2D[\cos(ka) - 1] = 0.$$

Fejezzük ki ω -t amivel az $\omega = \omega(k)$, ún. diszperziós összefüggést nyerjük

$$\omega = 2\sqrt{\frac{D}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right). \quad (122)$$

A megoldás hullámszerű:

$$q_j = A_j \exp(-i\omega t) = A \exp i(kx - \omega t),$$

ahol $x = aj$ jelöli a j -edik tömegpont egyensúlyi helykoordinátáját. Az ω körfrekven-
ciához tartozó k ún. hullámszám lehetséges értékét pedig a diszperziós összefüggés
szolgáltatja.

Hasonlítsuk össze a számítást a modellezett rugalmas szál viselkedésével. A szál
 η lineáris tömegsűrűsége kifejezhető az m tömeg és az a távolság segítségével:

$$\eta = \frac{m}{a}.$$

Másrészt, a j -edik rugóban ébredő erő $F = D\Delta q_j$, aminek meg kell egyeznie a ru-
galmas szálban ébredő erővel. A rugalmas szálban fellépő feszültség egyenlő a $\frac{\Delta q_j}{a}$
lokális relatív megnyúlás és az E Young-modulusz szorzatával. Az erőt a feszültség
és a keresztmetszet szorzata adja:

$$D\Delta q_j = AE \frac{\Delta q_j}{a},$$

azaz

$$D = \frac{EA}{a}.$$

Sűrítjük a tömegpontokat úgy hogy η és E állandók maradnak. Vizsgáljuk meg, mi
történik határmenetben a mozgásegyenlettel. Ehhez a (120) egyenletben helyettesít-
sünk $m = aA\rho$ és $D = EA/a$ szerint és osszuk az egyenletet aA -val:

$$\rho \ddot{q}_j = \frac{E}{a} \left(\frac{\Delta q_j}{a} - \frac{\Delta q_{j-1}}{a} \right).$$

Ha a tömegpontok sűrítése esetén, a szál egy adott x helyén való viselkedését
vizsgáljuk, mindig azt a j indexet kell tekintenünk, amire fennáll, hogy $x = aj$ ál-
landó. Ennek értelmében az egész értékű j helyett x -szel is indexelhetjük a tömegeket,
aminek megfelelően az időfüggő $q_j(t)$ helyett $q(x, t)$, \dot{q}_j helyett pedig $\frac{\partial q(x, t)}{\partial t}$ írandó,
ahol $x = aj$.

Tekintsünk most egy $x_0 = aj$ helyet és tartson a nullához a fenti feltételekkel. Az
egyenlet bal oldala $\eta \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \Big|_{x=x_0}$ -hoz fog tartani. A jobb oldalon a zárójelben álló két
tag pedig, rendre $\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=x_0+a}$ -hoz és $\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$ -hoz tart. Ezek különbsége osztva a -val,
 $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0}$ -hoz tart, aminek eredményeképpen az egyenlet határértékben a következő
alakot veszi fel

$$\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}.$$

A kapott egyenlet a hullámeqyenlet egy dimenziós alakja, ami megegyezik a rugalmas
szálra más módszerrel levezetett mozgásegyenlettel.

A (122) diszperziós összefüggésbe is írjuk be a rugalmas szál paramétereit

$$\omega = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sin \left(\frac{ka}{2} \right),$$

aminek határértéke midőn a tart nullához:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \omega = k \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

A kapott eredmény megegyezik a folytonos rugalmas szál esetében ismert eredménnyel.

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik az $a \rightarrow 0$ határmenet hatására az L_a Lagrange-függvénnyel. Helyettesítsük be a szál paramétereit

$$L_a = \sum_j \frac{1}{2} \left[a \eta \dot{q}_j^2 - \frac{EA}{a} (q_{j+1} - q_j)^2 \right],$$

és emeljük ki a -t

$$L_a = a \sum_j \frac{1}{2} \left[\eta \dot{q}_j^2 - EA \left(\frac{\Delta q_j}{a} \right)^2 \right].$$

Ha a tart nullához, a kerek zárójelben álló hányados $\frac{\partial q}{\partial x}|_{x=a_j}$ -hez tart.

Ugyanakkor az összegben, valamilyen rögzített x_1 és x_2 értékek közötti szakaszon vett járulék éppen az egyenletes a távolságokban vett tagok összege, ami ilyen módon éppen az (x_1, x_2) szakaszon vett téglányösszegnek felel meg. Így ha a tart nullához, a Lagrange-függvény határértéke a következő integrál lesz

$$L_a \rightarrow L = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \left[\eta \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - EA \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

Szokás az integrandust (lineáris) Lagrange-sűrűségnek nevezni és \mathcal{L} -lel jelölni. Tehát

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\eta \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - EA \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right], \text{ amivel } L = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L} dx. \quad (123)$$

A hullámegyenlet előbbi "levezetése" a Newton-egyenletből történt. Most viszont alkalmazzuk a $\delta S = 0$ Hamilton-elvet a fenti Lagrange-függvényre. Kiírva, a

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

variációs egyenletet kell megoldanunk. Részletesen

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L} dx dt = 0,$$

ahol \mathcal{L} argumentuma $\frac{\partial q}{\partial t}$ és $\frac{\partial q}{\partial x}$. Általános esetben \mathcal{L} függhet még $q(x, t)$ -től, és az x, t változóktól is.

Fejtsük ki a δS variációt, figyelembe véve azt, hogy a Hamilton-elv értelmében az idő szerint nem variálunk és így a variálás bevihető az integrál jel mögé:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L} \left(\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x}, q, x, t \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \delta \mathcal{L} \left(\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x}, q, x, t \right) dx dt.$$

Az integrandus variációját a szokásos módon írjuk fel:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}}\delta\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}}\delta\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q,$$

amivel

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}}\delta\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}}\delta\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q \right) dx dt.$$

Mivel az idő szerint nem variálunk, a variáció és a t szerinti parciális deriválás felcserélhető:

$$\delta\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial(\delta q)}{\partial t}.$$

Hasonló módon, mivel az x indexváltozó, ("az x -edik tömegpont" azonosítója) ami szerint az integrálban a variáció műveletétől függetlenül elvégzendő összegzést hajtunk végre, az x szerinti parciális deriválás is felcserélhető a variálással:

$$\delta\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial(\delta q)}{\partial x}.$$

Az integrandus két első tagja ennek alapján átírható:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}}\frac{\partial(\delta q)}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}}\frac{\partial(\delta q)}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q \right) dx dt. \quad (124)$$

Most alakítsuk át az integrandus első két tagját az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}}\frac{\partial(\delta q)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}}\delta q \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}}\delta q, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}}\frac{\partial(\delta q)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}}\delta q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}}\delta q. \end{aligned}$$

Helyettesítsünk be a (124) integrálba:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}} \right) \delta q + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}}\delta q \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}}\delta q \right) \right] dx dt. \quad (125)$$

A második tagon végezzük el a t idő szerinti, a harmadik tagon pedig az x hely szerinti integrálást:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}} \right) \delta q(x, t) dx dt \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}} \Big|_{t_2} \delta q(x, t_2) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial t}} \Big|_{t_1} \delta q(x, t_1) \right) dx + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}} \Big|_{x_2} \delta q(x_2, t) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial q}{\partial x}} \Big|_{x_1} \delta q(x_1, t) \right) dt. \end{aligned} \quad (126)$$

A Hamilton-elv szerint a mozgás kezdő t_1 és végső t_2 időpontjánál nem variálunk, azaz $\delta q(x, t_1) = \delta q(x, t_2) = 0$, aminek következtében, a második integrál értéke nulla.

A (123) Lagrange-függvény az x_1 és x_2 pontokban rögzített, külső erőhatásnak ki nem tett húr mozgásának leírására alkalmas, mivel sem a húr belsejében, sem a végein nem vettük figyelembe egy esetleges külső erő munkáját, aminek megfelelően $\delta q(x_1, t)$ és $\delta q(x_2, t)$ szintén nulla és így a harmadik integrál szintén eltűnik.

Az első integrálban viszont $\delta q(x, t)$ a teljes $(t_1, t_2) \otimes (x_1, x_2)$ tartomány belsejében szabadon adható meg, így az integrál csak úgy tűnhet el, ha $\delta q(x, t)$ együtthatója zérus:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} = 0. \quad (127)$$

A kapott egyenlet a húr Euler–Lagrange-egyenlete, ami a (123) egyenletben adott \mathcal{L} Lagrange-sűrűség felhasználásával valóban a külső erők hatása nélkül, szabadon mozgó húr mozgásegyenletét szolgáltatja. Helyettesítsünk be:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} = \eta \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} = -EA \frac{\partial q}{\partial x},$$

amiből a mozgásegyenlet:

$$-\eta \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + EA \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0, \quad \text{azaz} \quad \rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}.$$

Érdemes észrevenni, hogy a Lagrange-függvény szerkezete a húr esetén is olyan alakú volt, mint a véges szabadsági fokú rendszereknél, tehát a kinetikus és potenciális energia különbségeként volt felírható: $L = K - U$. Az eltérés mindössze abban áll, hogy a diszkrét esetben fellépő összegzések helyett integrálok szerepelnek. A kinetikus energia az $\frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2$ kinetikus energiasűrűség integráljaként áll elő:

$$K = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 A dx.$$

Az U potenciális energia a közeg Φ rugalmas energiájának felel meg, amit szintén energiasűrűség integráljaként adhatunk meg:

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}E \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 A dx.$$

A diszkrét tömegpontokból álló rendszer Lagrange-függvényében az i -edik tömegpontra ható külső $F_i(t)$ erő jelenlétét egy $q_i F_i(t)$ tag bevezetésével vehettük figyelembe. Ha a húr (közegre) egy külső térfogati erő is hat, az általában egy helytől és időtől függő, $\xi(x, t)$ lineáris, azaz $\xi(x, t)/A$ térfogati erősűrűséggel jellemezhető. Folytonos esetben, ennek megfelelően a Lagrange-függvényben megjelenő korrekciós tag $\int_{x_1}^{x_2} q(x, t) \xi(x, t) dx$ alakú lesz. Hasonló módon, ha az x_1 és x_2 végpontokban $F_1(t)$ és $F_2(t)$, előre definiált erők hatnak, hatásukat a Lagrange-függvényben az

$$F_2(t) q(x_2, t) - F_1(t) q(x_1, t)$$

tag hozzáadásával kell megjeleníteni. A Lagrange-függvény alakja tehát ekkor

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + q \xi(x, t) \right] dx + F_2(t) q(x_2, t) - F_1(t) q(x_1, t). \quad (128)$$

Az L Lagrange-függvény kétféle tagot tartalmaz. Az első, egy az $\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + q \xi(x, t) \right]$ lineáris Lagrange-sűrűség integráljaként előálló, a húr belső tartományának tulajdonságait leíró tag. A további két tag, nem sűrűségintegrálként előálló járulékok, a húr peremének viselkedésével kapcsolatos.

Készítsük el a $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt$ variációt. Az első tag δS_1 variációját a (126) egyenletbe helyettesítve nyerjük, amelynek a jobb oldalán álló második tagjáról láttuk, hogy értéke a Hamilton-elv szerint nulla, így azt nem írjuk ki:

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \right) \delta q(x, t) dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \right|_{x_2} \delta q(x_2, t) - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \right|_{x_1} \delta q(x_1, t) \right) dt, \end{aligned}$$

ahol a (128) Lagrange-függvény szerint

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \xi(x, t), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} = \eta \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} = -EA \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Az utolsó két tagból származó δS_2 járulékok pedig a szokásos eljárás szerint állíthatóak elő:

$$\delta S_2 = \int_{t_1}^{t_2} (F_2(t) \delta q(x_2, t) - F_1(t) \delta q(x_1, t)) dt.$$

A teljes δS variáció ezek szerint

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_1 + \delta S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \right) \delta q(x, t) dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \right|_{x_2} + F_2(t) \right) \delta q(x_2, t) - \left(\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x}} \right|_{x_1} + F_1(t) \right) \delta q(x_1, t) \right] dt, \end{aligned}$$

azaz behelyettesítve

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\xi(x, t) - \eta \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + EA \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) \delta q(x, t) dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(-EA \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x_2} + F_2(t) \right) \delta q(x_2, t) - \left(-EA \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x_1} + F_1(t) \right) \delta q(x_1, t) \right] dt. \end{aligned}$$

A $(t_1, t_2) \otimes (x_1, x_2)$ tartomány belsejében $\delta q(x, t)$, valamint az x_1 és x_2 értékekhez tartozó éleken $\delta q(x_1, t)$ és $\delta q(x_2, t)$, egymástól függetlenül választható meg, és így a

$\delta S = 0$ feltétel kielégítéséhez mind a három integrálkifejezésnek külön-külön el kell tűnnie. Az első integrál akkor válik azonosan zérussá, ha $\delta q(x, t)$ együtthatója nulla:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0,$$

azaz

$$\eta \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \xi(x, t),$$

ami éppen a húr mozgásegyenlete külső $\xi(x, t)$ lineáris erőssűrűség jelenléte esetén.

A második és harmadik integrál eltűnése kétféle esetben is megvalósulhat.

1. A húr vége rögzített, ekkor a megfelelő $\delta q(x_1, t) = 0$ vagy $\delta q(x_2, t) = 0$ feltétel áll fenn.
2. A húr megfelelő végére adott, $F_1(t)$ vagy $F_2(t)$ erő hat, ekkor $\delta q(x_1, t)$ vagy $\delta q(x_2, t)$ szabadon választható és az integrál eltűnésének feltétele, hogy

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_{x_1} + F_1(t) = 0 \text{ vagy } \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_{x_2} + F_2(t) = 0,$$

azaz

$$EA \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x_1} - F_1(t) = 0 \text{ vagy } EA \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x_2} - F_2(t) = 0$$

legyen.

A két eset a megfelelő határfeltételeket rögzíti.

A húr példája alapján fel tudjuk írni a háromdimenziós, rugalmas közeg L Lagrange-függvényét. Ebben két féle tag szerepel: egyrészt a kinetikus és rugalmas potenciális energia különbségét tartalmazó, valamint az f_i sűrűségű tömegerők hatását leíró \mathcal{L} Lagrange-sűrűség térfogati integrálja, másrészt a közeg felületén, kívülről ható σ_{ij}^K feszültségek járuléka, ami felületi integrál formájában adható meg:

$$L = \int_V \mathcal{L} dV + \int_f \sigma_{ij}^K s_i df_j,$$

ahol

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial s_i}{\partial t} \frac{\partial s_i}{\partial t} - \frac{1}{2} C_{ijkl} \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \frac{\partial s_k}{\partial x_l} + f_i s_i. \quad (129)$$

A $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt$ kifejezés variációja "recept" szerint készülhet. Az első, térfogati integrál variációja

$$\delta S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}_i} \delta \frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}_i} \delta \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} \delta s_i \right) dV dt.$$

A variálás és a hely és idő szerinti deriválás itt is felcserélhető, azaz

$$\delta \frac{\partial s_i}{\partial t} = \frac{\partial (\delta s_i)}{\partial t}$$

és

$$\delta \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\delta s_i)}{\partial x_j}.$$

Alakítsuk át az integrált a következő azonosságokkal

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial t}} \frac{\partial (\delta s_i)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial t}} \delta s_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial t}} \delta s_i, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} \frac{\partial (\delta s_i)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} \delta s_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} \delta s_i \end{aligned}$$

és írjuk fel a felületi integrál variációját

$$\delta S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_f \sigma_{ij}^K \delta s_i df_j dt,$$

amivel a teljes variáció:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_1 + \delta S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} \right) \delta s_i dV dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial t}} \delta s_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} \delta s_i \right) \right] dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_f \sigma_{ij}^K \delta s_i df_j dt. \end{aligned}$$

A második integrál első tagján elvégezve az idő szerinti integrálást ismét olyan kifejezést kapunk, amely a kezdő és vég időpontokban szorzótényezőként tartalmazza az elmozdulástér (térváltozó) variációját, ami a Hamilton-elv szerint nulla.

Az integrál második tagját a Gauss-tétel alapján alakítsuk felületi integrállá:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} \delta s_i \right) dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} \delta s_i df_j dt.$$

Így végeredményben δS -re a következő alakot nyerjük:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} \right) \delta s_i dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_f \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} + \sigma_{ij}^K \right) \delta s_i df_j dt.$$

A tartomány belsejében a teljes időintervallumban δs_i tetszőleges lehet, ezért az első integrál akkor tűnhet el, ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} = 0. \quad (130)$$

A nyert eredmény a háromdimenziós térben érvényes mozgásegyenlet.

A második, felületi integrál kétféle módon is eltűnhet.

1. Ha a felszínen a közeg rögzített, δs_i nulla.
2. Ha a felszínen a közeg nem rögzített, δs_i együtthatója kell eltűnjön:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} + \sigma_{ij}^K \right) df_j = 0.$$

Az egyenlet a közeg mozgásegyenleteit kiegészítő peremfeltétel, aminek konkrét tartalmáról behelyettesítéssel győződhetünk meg.

A Lagrange-sűrűség (129) alakját behelyettesítve a (130) egyenletbe a mozgásegyenletet nyerjük, ugyanis

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} = f_i, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial t}} = \rho \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} = -C_{ijkl} \frac{\partial^2 s_k}{\partial x_j \partial x_l},$$

amiből

$$f_i - \rho \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} + C_{ijkl} \frac{\partial^2 s_k}{\partial x_j \partial x_l} = 0.$$

A kapott egyenlet megegyezik a (112) egyenlettel, mivel C_{ijkl} szimmetrikus a második indexpárban.

Vizsgáljuk meg a peremfeltétel második esetét.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial s_i}{\partial x_j}} = -C_{ijkl} \frac{\partial s_k}{\partial x_l},$$

ami a Hooke-törvény szerint a feszültségtenzor ellentétével egyenlő:

$$-C_{ijkl} \frac{\partial s_k}{\partial x_l} = -\sigma_{ij}.$$

Egyenletben:

$$(-\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^K) df_j = 0, \text{ tehát } \sigma_{ij}^K df_j = \sigma_{ij} df_j$$

azaz a közegben ébredő, a felületre ható feszültségnek meg kell egyeznie a felületre kívülről alkalmazott σ_{ij}^K feszültségből származó erővel.