Transzportfolyamatok

2. (d)

Hővezetési problémák –

Kezdeti érték nélküli feladatok

Utolsó módosítás: 2019. március 5.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Kezdeti érték nélküli problémák (1)

A fél-végtelen közeg a $0 < x < \infty$ tartományban helyezkedik el.

Az x=0 pontban a $T(0,t) = \mu(t)$ peremfeltétel teljesüljön.

A téregyenlet:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

A peremfeltétel legyen (Fourier):

$$\mu(t) = A\cos \omega t$$

Célszerű komplex alakban írni:

$$T(0,t) = Ae^{i\omega t}$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Kezdeti érték nélküli problémák (2)

Keressük a megoldást

$$T(x,t) = Ae^{\alpha x + \beta t}$$

alakban.

Behelyettesítés után a paraméterekre:

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2}\beta$$

$$\beta = i\omega$$

Innen:

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right]$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Kezdeti érték nélküli problémák (3)

Ezzel a hőmérséklet eloszlásra kapott függvény valós része:

$$T(x,t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t \right)$$

A korlátosságot csak a negatív előjellel vett függvény elégíti ki, így a hőmérséklet eloszlás:

$$T(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x - \omega t \right)$$

Kezdeti érték nélküli problémák (4)

Hőmérsékleti hullámok

A rezgések amplitúdója a mélységgel exponenciálisan csökken (*Fourier I. törvénye*):

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}$$

A hőmérsékletingadozásoknak a talajban fáziseltolódásuk van (*Fourier II. törvénye*):

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x$$

Kezdeti érték nélküli problémák (5)

A hőmérsékletingadozás talajba való behatolásának mélysége a felületi hőmérsékletingadozás periódusától függ:

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}$$

Következmény: kisebb periódusidő, kisebb – hőmérsékletingado-zás – behatolási mélység.
A T_1 és T_2 periódusidők esetén az azonos csillapodási arány a az x_1 és x_2 értékeknél:

$$\sqrt{\frac{\frac{2\pi}{T_1}}{2a^2}}x_1 = \sqrt{\frac{\frac{2\pi}{T_2}}{2a^2}}x_2$$

Így:

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}x_1$$

Fourier III. törvénye

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Kezdeti érték nélküli problémák (6)

Pl. az évi és napi hőingadozások

$$T_2 = 365T_1$$

esetén a behatolási mélységek viszonya:

$$x_2 = \sqrt{365}x_1 \approx 19{,}1x_1$$

A hőmérséklet maximumának késése

A x mélységbeli fáziskéséshez tartozó idő:

$$\omega t = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x \quad \rightarrow \quad t_{késés} = \sqrt{\frac{1}{2a^2\omega}}x$$

Kezdeti érték nélküli problémák (7)

Mérési adatokból a hőmérséklet a mélység függvényében:

Mélység (m)	Amplitúdó (°C)
0	19,5
1	11,5
2	6,8
3	4,2
4	2,6

A diffúzivitás az adatokból:

$$a^2 = \frac{\omega x^2}{2\ln^2 \frac{A(x)}{A}} \approx 4 * 10^{-7}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

Így a késés:

$$t_{késés} \sim 10^7\,\mathrm{s} \sim 4\ \text{hónap}$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék