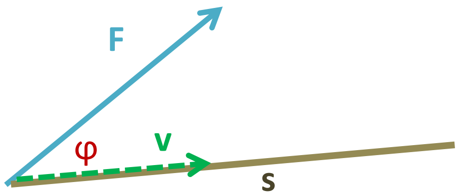
# 4. TÉMAKÖR: MUNKA, MECHANIKAI ÉS BELSŐ ENERGIA, ENERGIAMEGMARADÁS, BERNOULLI-EGYENLET

1. GYAKORLAT

## Munka

Adott erő által egy testen végzett munka függ az erő nagyságától és a test által megtett úttól, és attól is, hogy az erő mekkora szöget zár be az elmozdulás irányával.




$W = F\, s \cos\varphi$

A munka mértékegysége: Joule [J] = [N·m] = [kg·m²/s²]

A **2B/1.** feladat **d)** és **e)** részében azt számoltuk ki, hogy mekkora nagyságú erő szükséges a testet a lejtővel párhuzamosan, illetve vízszintesen tolva ahhoz, hogy a test állandó sebességgel feljusson a lejtő tetejére. Láttuk, hogy a szükséges erő nagysága eltérő volt a két esetben, viszont súrlódásmentes esetben a test ugyanolyan állapotban kerül fel a lejtő tetejére mindkét esetben, tehát a végzett munka meg kell egyezzen. Ez is szemlélteti, hogy nem a teljes erő végez munkát, hanem az erőnek csak az elmozdulás irányába eső komponense.

A súrlódást elhanyagolva

a lejtővel párhuzamos erő $F_{párh} = mg\sin\alpha$ ,

az általa végzett munka $W_{párh} = F_{párh} \cdot s \cdot \cos 0° = mg\sin\alpha \cdot s$;

a vízszintes erő $F_v = mg\sin\alpha/\cos\alpha$,

az általa végzett munka $W_v = F_v \cdot s \cdot \cos\alpha = (mg\sin\alpha/\cos\alpha) \cdot s \cdot \cos\alpha = mg\sin\alpha \cdot s$.

tehát $W_{párh} = W_v$.

Felületre merőleges erővel nem lehetne feltolni a testet.

Az **F** erőnek csak az elmozdulás irányába eső komponense végez munkát.

Ha $\varphi = 0$, akkor $\cos\alpha = 1 \;\rightarrow\; W = F\,s$;

ha $\varphi$ hegyesszög, akkor $\cos\varphi > 0 \;\rightarrow\; W > 0$;

ha $\varphi = 90°$, akkor $\cos\varphi = 0 \;\rightarrow\; W = 0$;

ha $\varphi$ tompaszög, akkor $\cos\varphi < 0 \;\rightarrow\; W < 0$.

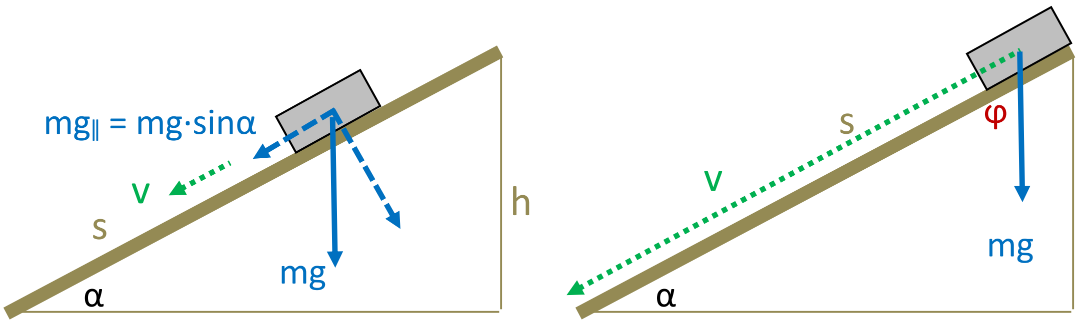
ha $\varphi = 180°$, akkor $\cos\varphi = -1 \;\rightarrow\; W = -F\,s < 0$.

A kényszererők (felület nyomóereje; kötél, rúd által kifejtett erők) mindig merőlegesek az elmozdulás irányára ($\varphi = 90°$) $\rightarrow$ a kényszererők által végzett munka mindig zérus.

A csúszási súrlódási erő és a közegellenállási erő ellentétes irányú a sebességgel ($\varphi = 180°$) $\rightarrow$ az általuk végzett munka negatív.

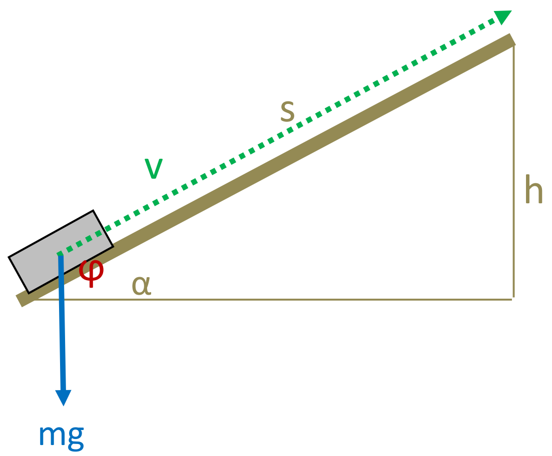
A nehézségi erő által végzett munka:
Ha egy α hajlásszögű lejtőn lefelé megtesz s utat a test, akkor az általa végzett munka

$W_g = mg_{\parallel} \cdot s = mg\sin\alpha \cdot (h/\sin\alpha) = mgh$




A végzett munka nagysága független a lejtő hajlásszögétől, csak az elért magasság számít.
Ha a test a lejtőn felfelé halad, akkor a nehézségi erő által végzett munka negatív:

$W_g = -\,mgh$




Ha mi toljuk fel a testet a lejtőn, akkor nekünk ennek a munkának a –1 -szeresét kell végeznünk a nehézségi erő ellenében (a súrlódást most elhanyagoljuk). Ez a munka tehát csak a lejtő magasságától függ. Kisebb hajlásszögű lejtőn kisebb erőt kell kifejtenünk hosszabb úton, nagyobb hajlásszögű lejtőn nagyobb erőt kell kifejtenünk rövidebb úton.

Az mgh mennyiséget (a nehézségi erőhöz tartozó) **helyzeti** vagy **potenciális energiá**nak nevezzük:

$E_{pot} = mgh.$

Az energia munkavégző-képesség, ha a test rendelkezik valamennyi energiával, akkor annak csökkenésével párhuzamosan munkát tud végezni, pl. csigán átvetett fonál segítségével fel tud emelni egy másik testet.

A munkát mindig egy adott erőre számoljuk, nem feltétlenül csak ennek az erőnek a hatására mozog a test úgy, ahogy mozog. A test mozgását az eredő erő határozza meg. Írjuk fel most az eredő erő által végzett munkát, majd fejezzük ki azt, hogy mekkora sebességre gyorsul fel a test az eredő erő (az összes erő) munkájának hatására s úton!

$W_e = F_e\, s = ma\, s$

Írjuk fel a gyorsulás és az s úton elért végsebesség összefüggését:

$F_e = ma \quad \rightarrow \quad a = \text{konst., és legyen } v_0 = 0 \quad \rightarrow \quad s = ½at^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{2s/a}$

$\rightarrow \quad v = at = a\sqrt{2s/a} = \sqrt{2sa} \quad \rightarrow \quad a = v^2/(2s)$

Helyettesítsük be ezt a munka képletébe:

$W_e = ma\, s = m \cdot v^2/(2s) \cdot s = ½mv^2$ .

(Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha nem tesszük fel, hogy a gyorsulás állandó.)

Az ½$mv^2$ mennyiséget a test **mozgási** vagy **kinetikus energiáján**ak nevezzük:

$E_{kin} = ½mv^2$.

A mozgási energia csökkenésével párhuzamosan a test munkát tud végezni, pl. másik testtel való ütközés során deformációs munkát.

Ha a testre a nehézségi erőn kívül valamilyen más erő is hat, akkor az általa végzett munka megváltoztathatja a test helyzeti és / vagy mozgási energiáját:

$W_{egyéb} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin}$.

Pl. az általunk kifejtett erő hatására emelkedhet, gyorsulhat vagy lassulhat a test; a súrlódás vagy a közegellenállás hatására csökken a sebessége, tehát csökken a mozgási energiája.
Ha a nehézségi erőn kívül más erő nem végez munkát a testen – tehát elhanyagolható a súrlódás és a közegellenállás, és mi sem fejtünk ki erőt a testre –, azaz $W_{egyéb} = 0$, akkor

$\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = 0$,

vagyis

$E_{pot} + E_{kin} = \text{konst.}$

A helyzeti és a mozgási energia összege a test **mechanikai energiá**ja:

$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin}$.

**A mechanikai energia megmarad**, azaz $E_{mech}$ = konst., ha a testen csak a nehézségi erő végez munkát (A testre hathat pl. felület által kifejtett nyomóerő, de annak a munkája zérus, mivel merőleges az elmozdulásra; de súrlódási erő nem hathat, mivel annak a munkája mindig negatív.)

A helyzeti energia átalakulhat mozgási energiává, pl. hajításkor a lefelé mozgó test h magassága csökken, azaz $E_{pot} = mgh$ csökken, és ezzel párhuzamosan a sebessége nő, azaz $E_{kin} = ½mv^2$ nő; illetve fordítva is történhet, a mozgási energia átalakulhat helyzeti energiává, pl. a felfelé mozgó test sebessége csökken, azaz $E_{kin} = ½mv^2$ csökken, ezzel párhuzamosan a h magassága nő, azaz $E_{pot} = mgh$ nő.
Több test esetén a több testből álló rendszer összes mechanikai energiája marad meg.

Ha a súrlódás vagy a közegellenállás nem elhanyagolható, akkor a test veszít a sebességéből, vagy egy felfelé irányuló mozgásnál az elért maximális magassága kisebb lesz, vagyis veszít a mozgási és / vagy helyzeti energiájából. A súrlódási erő és a közegellenállási erő által végzett munka mindig negatív, ezért ezek csökkentik a test ill. rendszer mechanikai energiáját. Energiaveszteség léphet fel még deformáció esetén is. Ezekben az esetekben csökken a test ill. rendszer mechanikai energiája, ami a testek egészének helyéből és sebességéből adódik. De az energia nem vész el, csak átalakul: a mechanikai energia csökkenésekor nő a testek **U belső energiá**ja, ami a testeket alkotó részecskék rendezetlen mozgásából és elektromos erőkhöz kapcsolódó potenciális energiájából adódik. Ezt is figyelembe véve felírhatjuk az energia-megmaradást kibővítve a test U belső energiájával:

$$\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} + \Delta U = \Delta E_{mech} + \Delta U = 0,$$

vagyis

$$E_{pot} + E_{kin} + U = E_{mech} + U = \text{konst.}$$

Elektromágneses erőket figyelembe véve az összenergia még bővül az elektromágneses tér energiájával is.

<u>Milyen folyamatok során alakulhatnak át egymásba az egyes energiafajták?</u>

$E_{mech} \rightarrow E_{mech}$: munkavégzéssel; pl. hajításnál esés közben a nehézségi erő által végzett munka növeli a mozgási energiát (nő a sebesség), miközben csökken a helyzeti energia.

$E_{mech} \rightarrow U$: munkavégzéssel, pl. a súrlódási erő által végzett munka növeli a test belső energiáját, ami a test hőmérsékletének növekedését okozza.

*4A/K1 KÍSÉRLET: Hőmérőt dörzsölünk egy kartonpapíron, a műszerről leolvasható, hogy a hőmérő melegszik.*

$U \rightarrow E_{mech}$: munkavégzéssel, pl. egy dugattyúval elzárt gáz kitágulásakor a dugattyú (és az arra helyezett test) helyzeti energiáját növeli, miközben a gáz lehűl, tehát a belső energiája csökken.

$U \rightarrow U$: hőátadással (hőközléssel), pl. két eltérő hőmérsékletű test érintkezésekor a melegebb hőt ad át a másiknak, lehűl, csökken a belső energiája; a másik felmelegszik, nő a belső energiája.

*4A/K2 KÍSÉRLET: A már bemutatott kézzel melegítős palack esetén a kezünk felmelegíti a palackba zárt gázt ($U \rightarrow U$); majd a gáz kitágulva térfogati munkát végez, amikor az alul kivezetett U alakú csőben levő vízoszlopot megemeli, eközben a gáz lehűl ($U \rightarrow E_{mech}$).*

**A termodinamika főtételei**

I. főtétel:

Zárt rendszer összes energiája állandó:

$$E_{össz} = \text{konst.} \text{ (energiamegmaradás).}$$

Nyílt rendszer összes energiája munkavégzés vagy hőközlés hatására változhat meg:

$$\Delta E_{össz} = W + Q,$$

W: a rendszeren végzett munka,

Q: a rendszerrel közölt hő.

A II. főtétel lényege: mindig lépnek fel veszteségek (entrópia…).

**Ideális gáz belső energiája, térfogati munka**

Ideális gáz belső energiája

$$U = \frac{f}{2} n R T,$$

ahol f a molekulák szabadsági foka:

gömbszimmetrikusra f = 3; hengeresre f = 5; egyébre f = 6.

Az ideális gáz belső energiája tehát a hőmérsékletével arányos.

Egy dugattyúval bezárt $p_1$ nyomású gáz az A felületű dugattyúra $F_{ny1} = p_1 A$ erőt fejt ki. Ha a dugattyú nincs rögzítve, elmozdulhat, és a gáz térfogata megnő. Ha a dugattyú elmozdulása s, akkor a gáz térfogatának növekedése $\Delta V = A s$.

A gáz által végzett (térfogati) munka:

$$W_{gáz} = F_{ny1} s = p_1 A s = p_1 \Delta V.$$

Amikor egy külső erő összenyomja a bezárt gázt, akkor $\Delta V < 0$ $\rightarrow$ a gáz által végzett munka negatív, $W_{gáz} < 0$.

Ha a folyamat közben a nyomás nem tekinthető állandónak, akkor a gáz által végzett munka

$W_{gáz} = \int p \, dV$, ami a p – V síkon a görbe alatti terület.

A $\Delta E_{össz} = W + Q$ összefüggésben W a rendszeren végzett munkát jelenti. Térfogati munka esetén ez az ellentettje a gáz által végzett $W_{gáz} = p \Delta V$ munkának.

Kitáguláskor ($\Delta V > 0$) a gáz végez térfogati munkát, vagyis a gáz által végzett munka pozitív: $W_{gáz} > 0$, és a gázon a környezete által végzett munka negatív: $W < 0$;

a gáz összenyomódásakor ($\Delta V < 0$) a környezet végez a gázon munkát, vagyis a környezet által végzett munka pozitív: $W > 0$; és a gáz által végzett munka negatív: $W_{gáz} < 0$.

Ideális gáz belső energiája megváltozhat térfogati munkával és hőközléssel:

$$\Delta U = -p \Delta V + Q$$

$\Delta V$ a gáz térfogatának növekedése (összenyomáskor negatív),

Q a gázzal közölt hő.

**4A/1.** Egy m = 45 g tömegű gumilabdát $h_0$ = 1,6 m magasságból leejtünk (0 kezdősebességgel).

**a)** Mekkora sebességgel érkezik le a padlóra?

**b)** A padlón pattanáskor az energiája 80%-a marad meg. Milyen magasra emelkedik fel ezután?

<u>Megoldás</u>:

**a)** Ha eltekinthetünk a közegellenállás okozta veszteségtől, akkor a labda összes mechanikai energiája végig állandó. Az energiamegmaradást úgy írjuk fel, hogy megjelöljük a mozgás szakaszainak egyes pontjait, és az egyes állapotok mechanikai energiájának egyenlőségét írjuk fel. Ebben a feladatban:

- a labda elengedése előtti állapotot jelölje 0 index,

  ekkor $h_0 = 1,6$ m;

  $v_0 = 0$;

- a labda földre érkezésének pillanatát 1 index;

  ekkor $h_1 = 0$;

  $v_1$ és energiamegmaradással számolható;

A labda 0 és 1 állapotát összehasonlítva:

$E_{pot,0} + E_{kin,0} = E_{pot,1} + E_{kin,1}$

$m\,g\,h_0 + 0 = 0 + ½\,m\,v_1^2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 10\ \mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}6\ \mathrm{m}} = 5{,}657$ m/s.

**b)** Tökéletesen rugalmas ütközésnél a labda mechanikai energiája megmaradna, és ekkor ugyanolyan magasra pattanna, mint amilyen magasról elengedtük. A valódi ütközések nem tökéletesen rugalmas ütközések, a mechanikai energia nem marad meg, hanem minden ütközésnél energiaveszteség lép fel. A mechanikai energia megmaradó hányadát ε-nal szokás jelölni (tehát 1–ε a veszteség), jelen esetben ε = 0,8.

A labda visszapattanása utáni állapotok:

- a labda visszapattanása utáni pillanatot jelölje 2 index,

  ekkor $h_2 = 0$;

  $v_2$ értéke $v_1$ és ε értékéből számolható;

- a labda felpattanva eléri a maximális magasságot, ezt jelölje 3 index,

  ekkor $v_3 = 0$;

  $h_3$ értéke energiamegmaradással számolható $v_2$-ből.

A labda 1 és 2 állapotát összehasonlítva:

$\varepsilon\, E_{kin,1} = E_{kin,2}$ ,

azaz: $\varepsilon\, ½\, m\, v_1^2 = ½\, m\, v_2^2$.

A feladat megoldásához nem szükséges, de ebből számolható a labda visszapattanás utáni sebességének nagysága: $v_2 = \sqrt{\varepsilon} \cdot v_1 = 5{,}060$ m/s.

A labda 2 és 3 állapotát összehasonlítva:

$E_{pot,2} + E_{kin,2} = E_{pot,3} + E_{kin,3}$

$0 + ½\, m\, v_2^2 = m\, g\, h_3 + 0$.

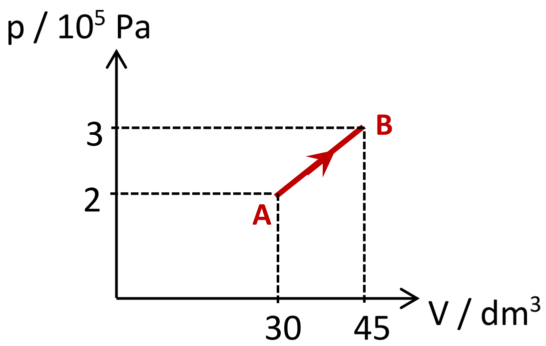
Ugyanakkor tudjuk, hogy $E_{kin,2} = \varepsilon\, E_{kin,1} = \varepsilon\, E_{pot,1} = \varepsilon\, m\, g\, h_0$, ezt felhasználva:

$\varepsilon\, m\, g\, h_0 = m\, g\, h_3$ , ahonnan $h_3 = \varepsilon\, h_0 = 0{,}8 \cdot 1{,}6$ m $= 1{,}28$ m.

**4A/2. (MÁ 903.)** Az ábra kétatomos molekulájú gázban végbemenő folyamatot ad meg. A molekulák száma $1{,}2 \cdot 10^{24}$.

**a)** Mekkora a hőmérséklet az A, ill. a B állapotban?

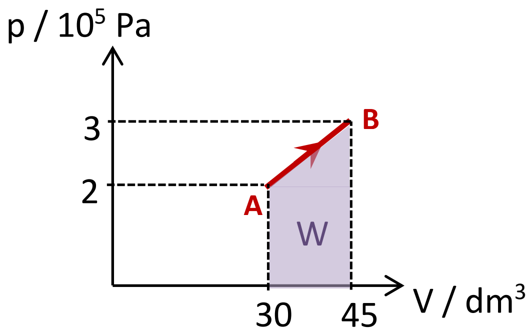
**b)** Mekkora hőmennyiséget vesz fel a gáz a folyamat során?



Megoldás:
Adatok:
$n = 1{,}2 \cdot 10^{24} / N_A = 1{,}2 \cdot 10^{24} / 6 \cdot 10^{23} = 2$ mol;
$f = 5$ (kétatomos gáz);
és az ábráról leolvasható, hogy
$p_A = 2 \cdot 10^5$ Pa; $p_B = 3 \cdot 10^5$ Pa;
$V_A = 30$ dm$^3$ = $3 \cdot 10^{-2}$ m$^3$; $V_B = 45$ dm$^3$ = $4{,}5 \cdot 10^{-2}$ m$^3$.

**a)** $p_A V_A = n R T_A \rightarrow T_A = p_A V_A / (n R) = 2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-2} / (2 \cdot 8{,}314) = 360{,}8$ K;
$T_B = p_B V_B / (n R) = 3 \cdot 10^5 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2} / (2 \cdot 8{,}314) = 811{,}9$ K.

**b)** $\Delta U = W + Q$
$\Delta U$ a gáz belső energiájának növekedése, $W$ a gázon végzett munka, $Q$ a gázzal közölt hő.
Mivel ebben a folyamatban a gáz kitágul, a gáz által végzett munka pozitív, a gázon végzett munka negatív, $W < 0$.
A gázon végzett munka állandó nyomás esetén $W = -p \Delta V$ képlettel számolható, most azonban a nyomás is változik a gáz tágulása közben. Ilyenkor a munka nagyságát a p – V síkon a görbe alatti terület (jelen esetben egy trapéz területe) adja meg. A negatív előjelet is figyelembe véve a gázon végzett munka




$$W = -½ (p_A + p_B) (V_B - V_A) = -0{,}5 (2+3) \cdot 10^5 \cdot (4{,}5-3) \cdot 10^{-2} = -3750 \text{ J.}$$

A gáz belső energiájának változása

$$\Delta U = \frac{f}{2} n R \Delta T = \frac{f}{2} n R (T_B - T_A) = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 8{,}314 \cdot (811{,}9 - 360{,}8) = 18752 \text{ J.}$$

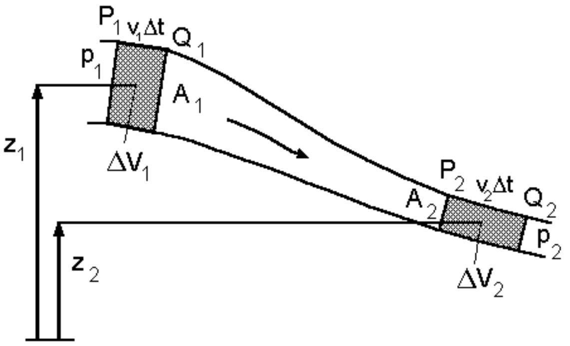
A gázzal közölt hő

$$Q = \Delta U - W = 18752 - (-3750) = 22502 \text{ J.}$$

**Bernoulli egyenlet**
Fluidumok stacionárius áramlása esetén mi lesz a megmaradó mennyiség?
Tegyük fel, hogy a fluidum sűrűsége állandó (folyadékok esetén ez jó közelítés), és a viszkozitása elhanyagolható, tehát nem lép fel a fluidum belső súrlódásából származó veszteség. Az áramlás stacionárius, azaz időben állandó (az áramlás sebessége eltérő lehet a tér különböző pontjain, de a tér egy adott pontjában időben nem változik).
A fluidum egy részecskéjének mozgását egy áramvonallal ábrázolhatjuk, és felvehetünk az áramvonal mentén egy áramlási csövet, ami a környező részecskék áramlását is mutatja.
Az ábrán jelölt áramlási csőben a fluidum áramlásakor a $P_1$ és $P_2$ közötti térfogat átmegy a $Q_1$ és $Q_2$ közötti térfogatba.
Eközben a környezete térfogati munkát végez rajta:

a $P_1Q_1$ szakaszon a fluidum térfogata csökken $\Delta V_1$-gyel, a $P_2Q_2$ szakaszon pedig nő $\Delta V_2$-vel, így a fluidumon végzett térfogati munka

$$W = p_1\,\Delta V_1 - p_2\,\Delta V_2\ .$$




Belátható, hogy $\Delta V_1 = \Delta V_2$. Az áramlást tekinthetjük úgy, hogy a $P_2Q_1$ közös részt elhagyjuk, és úgy tekintjük, mintha a $P_1Q_1$ közti térfogat ment volna át a $P_2Q_2$ térfogatba.
A stacionárius áramlás miatt a $P_1Q_1$ rész $\Delta m_1$ tömege és a $P_2Q_2$ rész $\Delta m_2$ tömege egyenlő, mivel az időegység alatt beáramló tömeg az áramlási cső végén ki is áramlik. Mivel a fluidum sűrűsége állandó ($\rho = \Delta m_1 / \Delta V_1 = \Delta m_2 / \Delta V_2 =$ konst.), ezért a $P_1Q_1$ rész $\Delta V_1$ térfogata és a $P_2Q_2$ rész $\Delta V_2$ térfogata is egyenlő, tehát $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.
A térfogati munka tehát

$$W = p_1\,\Delta V - p_2\,\Delta V = (p_1 - p_2)\,\Delta V.$$

Az áramlás energiaviszonyait pedig úgy írhatjuk fel, hogy miközben a $\Delta m$ tömeg az 1-es állapotból a 2-es állapotba kerül

- megváltozhat a helyzeti energiája, ha az áramlási cső magassága megváltozik ($z_1$-ről $z_2$-re);
- megváltozhat a mozgási energiája, ha a cső keresztmetszetének változása miatt az áramlás sebessége megváltozik ($v_1$-ről $v_2$-re).

Felírhatjuk tehát, hogy

$$W = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin}.$$

A Δ… megváltozásokat mindig úgy írjuk fel, hogy a későbbi értékből vonjuk ki a korábbi értéket, tehát

$$\Delta E_{pot} = E_{pot,2} - E_{pot,1} = \Delta m\, g\, z_2 - \Delta m\, g\, z_1 = \Delta m\, g\, (z_2 - z_1) = \rho\, \Delta V\, g\, (z_2 - z_1),$$

$$\Delta E_{kin} = E_{kin,2} - E_{kin,1} = \tfrac{1}{2}\,\Delta m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\,\Delta m\, v_1^2 = \tfrac{1}{2}\,\Delta m\,(v_2^2 - v_1^2) = \tfrac{1}{2}\,\rho\,\Delta V\,(v_2^2 - v_1^2).$$

Ezeket behelyettesítve a $W = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin}$ összefüggésbe

$$(p_1 - p_2)\,\Delta V = \rho\,\Delta V\, g\,(z_2 - z_1) + \tfrac{1}{2}\,\rho\,\Delta V\,(v_2^2 - v_1^2) \quad \rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \rho\, g\,(z_2 - z_1) + \tfrac{1}{2}\,\rho\,(v_2^2 - v_1^2) \quad \rightarrow$$

$$p_1 + \rho\, g\, z_1 + \tfrac{1}{2}\,\rho\, v_1^2 = p_2 + \rho\, g\, z_2 + \tfrac{1}{2}\,\rho\, v_2^2\ ,$$

vagyis

$$p + \rho\, g\, z + \tfrac{1}{2}\,\rho\, v^2 = \text{konst.} \qquad \text{egy áramlási cső mentén.}$$

Ez a Bernoulli-egyenlet.

Látható, hogy egy áramlási cső mentén a nyomás kisebb a nagyobb magasságokban és ott, ahol nagyobb az áramlási sebesség.

*4A/K3 KÍSÉRLET: Felfüggesztett pingponglabda és a fal között elfújunk. A pingponglabda a fal felé mozdul amiatt, hogy az áramló levegő nyomása lecsökken.*

*4A/K4 KÍSÉRLET: Egymástól pár cm-re felfüggesztünk egy kilyukasztott kartonlapot és egy sima papírlapot. Átfújunk a kartonpapíron levő lyukon. A papírlap a kartonlaphoz tapad, mivel a befújt levegő a karton és a papírlap között nagy sebességgel áramlik oldalra, ami miatt a nyomása lecsökken, és a papírlapot a túloldalról a légköri nyomás a kartonhoz nyomja.*

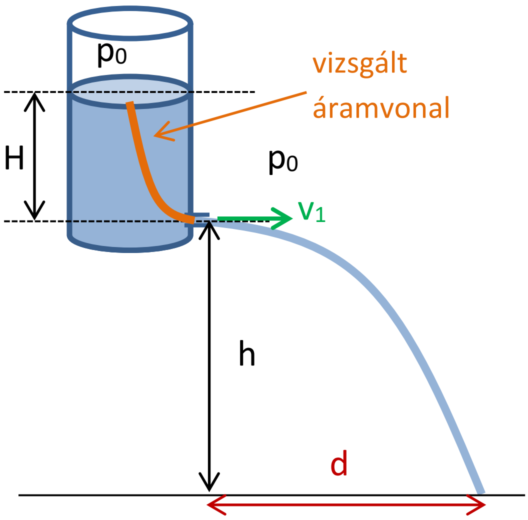
*4A/K5 KÍSÉRLET: Hajszárító fölött pingponglabdát táncoltatunk. A pingponglabdát oldalra kicsit meglökve nem esik le, hanem visszatáncol a hajszárító csöve fölé. Ennek az az oka, hogy a hajszárítóból függőlegesen felfelé nagy sebességgel kiáramló levegő nyomása kisebb, mint a normál légköri nyomás, tehát a pingponglabdának oldal irányban egy nagyobb nyomású levegő felé kellene elmozdulnia.*

**4A/3.** Egy felül nyitott palack aljából kis vízszintes csövön keresztül folyik ki a víz. A palackban a vízszint magassága a kifolyás magasságához képest H = 10 cm. A víz kifolyási magassága h = 40 cm-rel van a föld fölött. Számoljuk ki, mekkora a vízszintesen mért távolság a víz kifolyási csöve alatti pont és a földet érési pontja között!

<u>Megoldás</u>:

H = 10 cm = 0,1 m; h = 40 cm = 0,4 m.

Írjuk fel a Bernoulli egyenletet az ábrán berajzolt áramlási csőre! A $p + \rho g z + ½\rho v^2$ mennyiség egyenlő az áramlási cső két végpontján, vagyis a víz tetejénél (0 index) és azon a ponton, ahol kifolyik a palackból (1 index):




$$p_0 + \rho\, g\, z_0 + ½\, \rho\, v_0^2 = p_1 + \rho\, g\, z_1 + ½\, \rho\, v_1^2 .$$

A vízszint teteje nyitott a légkörre, $p_0$ a légköri nyomás; és a kilépési pont is nyitott a légkörre, ezért $p_1 = p_0$.

A vízszint süllyedésének $v_0$ sebességét elhanyagolhatjuk ahhoz a $v_1$ sebességhez képest, amivel a víz kilép a csövön, $v_0 \approx 0$.

Ha a z = 0 szintet a víz földet érési magasságánál választjuk, akkor $z_0 = H + h$ és $z_1 = h$.

Ezekkel

$$\cancel{p_0} + \rho\, g\,(H + h) + 0 = \cancel{p_0} + \rho\, g\, h + ½\, \rho\, v_1^2 \quad \rightarrow \quad g\,H = v_1^2 / 2 \quad \rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{2gH} .$$

A víz kifolyási sebessége tehát a fölötte levő vízoszlop magasságának gyökével arányos, az edény alján lévő kis nyíláson ugyanakkora sebességgel folyik ki a víz, mintha H magasságból szabadon esett volna.

A számértékeket behelyettesítve

$v_1 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}1} = 1{,}414$ m/s.

A kilépő víz további mozgását $v_1$ kezdősebességű vízszintes hajításnak tekinthetjük, h magasságból indulva a leérkezés ideje:

$$h - \tfrac{1}{2} g t_h^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = \sqrt{2h/g}\,,$$

és ezzel kiszámolható a vízszintesen megtett távolság:

$$d = v_1 t_h = \sqrt{2gH} \cdot \sqrt{2h/g} = 2\sqrt{Hh}\,,$$

behelyettesítve

$$d = 2\sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}4} = 0{,}4 \text{ m}.$$

*4A/K6 KÍSÉRLET: Egy palack egymás alatt 3 helyen át van lyukasztva, a lyukakban kis vízszintes csövek vannak, amiken folyik ki a víz (a palack nincs lezárva). Látható a vízsugarak parabolapályáján, hogy lefelé haladva egyre nagyobb a víz kezdősebessége.*

*4A/K7 KÍSÉRLET: Egy felfelé szűkülő edény aljának két pontjáról van kivezetve két cső, az egyik helyen magas, a másik helyen alacsony fölötte a vízoszlop. A víz ugyanakkora sebességgel áramlik ki mindkét csövön, mert az áramvonal mindenhol felmegy a víz tetejéig. (Az előző anyagban láttuk, hogy a nyomások is megegyeznek ezen a két ponton.)*

---

**SZIMULÁCIÓK**

hullámvasút ill. gördeszka pálya, súrlódással, energiával

https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/energy-skate-park

hidrosztatikai nyomás; áramlás:

https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/fluid-pressure-and-flow

---

**KIEGÉSZÍTŐ FELADAT ÉRDEKLŐDŐKNEK**

**4A/4.** Van két kis gumilabdánk, az A labda tömege $m_A$ = 43,54 g, a B labda tömege $m_B$ = 16,22 g. $h_0$ = 1,6 m magasságból úgy ejtjük le a két labdát, hogy elengedéskor a B labda éppen az A labda fölött van (össze is érnek a labdák). Milyen magasra pattanna fel a B labda a labdák földdel való ütközése után, ha eltekinthetnénk a közegellenállás okozta veszteségtől, és az ütközéseket tökéletesen rugalmasnak tekinthetnénk?

Megoldás:

Ha eltekinthetünk a közegellenállás okozta veszteségtől, és az ütközéseket tökéletesen rugalmasnak tekinthetjük, akkor a két labda összes mechanikai energiája végig állandó. Az energiamegmaradást úgy írjuk fel, hogy megjelöljük a mozgás szakaszainak egyes pontjait, és az egyes állapotok mechanikai energiájának egyenlőségét írjuk fel. Ebben a feladatban:

- a labdák elengedése előtti állapotot jelölje 0 index,
  - ekkor $h_{A0} = h_{B0} = h_0 = 1{,}6$ m;
  - $v_{A0} = v_{B0} = 0$;
- a labdák földre érkezésének pillanatát 1 index;
  - ekkor $h_{A1} = h_{B1} = 0$;
  - $v_{A1}$ és $v_{B1}$ energiamegmaradással számolható;
- az alsó (A) labda visszapattanása utáni pillanatot jelölje 2 index,
  - ekkor $h_{A2} = h_{B2} = 0$;
  - $v_{A2} = -v_{A1}$, mert tökéletesen rugalmasan visszapattan a földről,
  - $v_{B2} = v_{B1}$, mert még nem ütközött a felfelé jövő A labdával;
- a két labda ütközése utáni pillanatot jelölje 3 index,
  - ekkor $h_{A3} = h_{B3} = 0$;
  - $v_{A3}$ és $v_{B3}$ impulzus- és energiamegmaradással számolható;
- a labdák felpattanva elérik a maximális magasságot (nem egyszerre), ezt jelölje 4 index,
  - ekkor $v_{A4} = v_{B4} = 0$;
  - $h_{A4}$ és $h_{B4}$ energiamegmaradással számolható.

A labdák sebessége földet éréskor:

az A labda 0 és 1 állapotát összehasonlítva:

$$E_{pot,A0} + E_{kin,A0} = E_{pot,A1} + E_{kin,A1}$$

$$m_A\, g\, h_{A0} + 0 = 0 + ½\, m_A\, v_{A1}^2 \quad \rightarrow \quad v_{A1} = \sqrt{2gh_{A0}} = \sqrt{2gh_0}\,,$$

ill. hasonlóan a B labdára $v_{B1} = \sqrt{2gh_{B0}} = \sqrt{2gh_0}$.

Az alsó labda földdel való ütközését tökéletesen rugalmas ütközésnek feltételezve az ütközés után a sebességek nagysága

$$v_{A2} = v_{A1} = \sqrt{2gh_0} \quad \text{ill.} \quad v_{B2} = v_{B1} = \sqrt{2gh_0}\,.$$

A labdák sebessége az ütközésük után:

A labdák tökéletesen rugalmasan ütköznek, ilyenkor megmarad

- a két test összes mechanikai energiája:

az ütközés előtt

$E_{mech,A2} = E_{pot,A2} + E_{kin,A2} = 0 + ½\, m_A\, v_{A2}^2$ és $E_{mech,B2} = E_{pot,B2} + E_{kin,B2} = 0 + ½\, m_B\, v_{B2}^2$

$E_{mech,AB2} = ½\, m_A\, v_{A2}^2 + ½\, m_B\, v_{B2}^2$;

az ütközés után hasonlóan

$E_{mech,AB3} = ½\, m_A\, v_{A3}^2 + ½\, m_B\, v_{B3}^2$;

ezek egyenlőek:

$$½\, m_A\, v_{A2}^2 + ½\, m_B\, v_{B2}^2 = ½\, m_A\, v_{A3}^2 + ½\, m_B\, v_{B3}^2 \quad (1)$$

- a két test összes impulzusa.

**Impulzusmegmaradás**

A test ill. rendszer impulzusának változása a külső erők eredőjének hatására történik:

$$\frac{\Delta \mathbf{I}}{\Delta t} = \mathbf{F_{k,e}}\ .$$

A test ill. rendszer impulzusa állandó, ha a külső erők eredője zérus. Jó közelítéssel állandónak tekinthetjük az impulzust akkor is, ha egy nagyon rövid $\Delta t$ idő alatt végbemenő mozgást vizsgálunk, mint amilyen az ütközés is, mivel $\Delta \mathbf{I} = \mathbf{F_{k,e}}\cdot\Delta t \approx 0$.
Tehát feltesszük, hogy a rendszer ütközés előtti és ütközés utáni impulzusa egyenlő.

Az impulzus vektormennyiség. Jelen esetben egy egyenes mentén mozognak a testek, ezért egy skalár egyenletet írunk fel. Az egyenletbe nem írunk előjeleket a sebességeknek, de választunk egy pozitív irányt – legyen ez a felfelé mutató irány –, és a sebességek értékének az előjele az irányuknak megfelelő lesz.

A két labda összes impulzusa az ütközés előtt

$I_{AB2} = I_{A2} + I_{B2} = m_A\, v_{A2} + m_B\, v_{B2}$;

az ütközés után

$I_{AB3} = I_{A3} + I_{B3} = m_A\, v_{A3} + m_B\, v_{B3}$;

ezek egyenlőek:

$$m_A\, v_{A2} + m_B\, v_{B2} = m_A\, v_{A3} + m_B\, v_{B3} \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletrendszerben a két ismeretlen $v_{A3}$ és $v_{B3}$. Rendezzük az egyenleteket:

(1): $m_A\, (v_{A2}^2 - v_{A3}^2) = m_B\, (v_{B3}^2 - v_{B2}^2)$

$m_A\, (v_{A2} - v_{A3})(v_{A2} + v_{A3}) = m_B\, (v_{B3} - v_{B2})(v_{B3} + v_{B2})$

(2): $m_A\, (v_{A2} - v_{A3}) = m_B\, (v_{B3} - v_{B2})$

Ezeket elosztva egymással

$$v_{A2} + v_{A3} = v_{B3} + v_{B2} \quad \to \quad v_{A3} = v_{B3} + v_{B2} - v_{A2}$$

Ezt helyettesítsük be a (2) egyenletbe:

$$m_A\, v_{A2} + m_B\, v_{B2} = m_A\, v_{B3} + m_A\, v_{B2} - m_A\, v_{A2} + m_B\, v_{B3}$$

Ebből kifejezhető $v_{B3}$:

$$v_{B3} = \frac{2\, m_A\, v_{A2} + (m_B - m_A)\, v_{B2}}{m_A + m_B}.$$

Hasonló képletet kapunk $v_{A3}$-ra, ha $v_{B3}$ kifejezését behelyettesítjük a $v_{A3} = v_{B3} + v_{B2} - v_{A2}$ képletbe:

$$v_{A3} = \frac{2\,m_B\,v_{B2} + (m_A - m_B)\,v_{A2}}{m_A + m_B}.$$

A behelyettesítésnél ügyelni kell arra, hogy $v_{B2} < 0$, mert a felfelé irányt vettük fel pozitívnak, és a B test sebessége még lefelé irányult a két labda ütközése előtt.

Most megkaptuk a labdák ütközés utáni sebességét az ütközés előtti sebességükkel kifejezve. Fejezzük ki ezeket a sebességeket a labdák kiindulási magasságával.
A $v_{A2}$ és $v_{B2}$ sebességek az előjelet is figyelembe véve

$$v_{A2} = \sqrt{2gh_0} \quad \text{és} \quad v_{B2} = -\sqrt{2gh_0}\,.$$

Behelyettesítve

$$v_{B3} = \frac{2\,m_A\sqrt{2gh_0} + (m_B - m_A)(-\sqrt{2gh_0})}{m_A + m_B} = \frac{2\,m_A - (m_B - m_A)}{m_A + m_B}\sqrt{2gh_0} = \frac{3\,m_A - m_B}{m_A + m_B}\sqrt{2gh_0}.$$

A számértékeket beírva

$$v_{B3} = \frac{3 \cdot 43{,}54 - 16{,}22}{43{,}54 + 16{,}22}\sqrt{2gh_0} \approx 1{,}914\sqrt{2gh_0}\,.$$

Az utolsó lépés kiszámolni azt, hogy ha a felső labda ekkora sebességgel pattan fel a földről, akkor milyen magasra jut. Ezt megint energiamegmaradással számolhatjuk:

A B labda 3 és 4 állapotát összehasonlítva:

$$E_{pot,B3} + E_{kin,B3} = E_{pot,B4} + E_{kin,B4}$$

$$0 + ½\,m_B\,v_{B3}^2 = m_B\,g\,h_{B4} + 0 \quad \rightarrow$$

$$h_{B4} = v_{B3}^2 / (2g) = \left(\frac{3\,m_A - m_B}{m_A + m_B}\right)^2 \cdot 2g\,h_0 / (2g) = \left(\frac{3\,m_A - m_B}{m_A + m_B}\right)^2 \cdot h_0$$

A számértékeket behelyettesítve

$$h_{B4} = 1{,}914^2\,h_0 = 3{,}665 \cdot 1{,}6 = 5{,}863 \text{ m}.$$

A kísérletet megcsinálva az látható, hogy ennél sokkal alacsonyabbra pattan fel a labda, nagyjából 2,5 m magasra. A legnagyobb veszteséget az okozza, hogy az ütközések nem tekinthetők tökéletesen rugalmas ütközésnek, amikor a mechanikai energia megmarad, hanem minden ütközésnél energiaveszteség lép fel. A mechanikai energia megmaradó hányadát ε-nal szokás jelölni (tehát 1–ε a veszteség).
Az alsó labda földdel való ütközésekor

$$\varepsilon_{A12} = (½\,m_A\,v_{A2}) / (½\,m_A\,v_{A1}) < 1 \quad \rightarrow \quad v_{A2} < v_{A1}.$$

A két labda ütközésekor

$$\varepsilon_{AB23} = (½\,m_A\,v_{A3}^2 + ½\,m_B\,v_{B3}^2) / (½\,m_A\,v_{A2}^2 + ½\,m_B\,v_{B2}^2) < 1\,.$$

3 labda ütközése: [https://www.youtube.com/watch?v=2UHS883_P60](https://www.youtube.com/watch?v=2UHS883_P60)