3. TÉMAKÖR: NYOMÁS, HIDROSZTATIKAI NYOMÁS ÉS FELHAJTÓERŐ,
IDEÁLIS GÁZ NYOMÁSA, GÁZTÖRVÉNY, KÖRFOLYAMATOK
2. GYAKORLAT

<u>Nyomás gázokban, gáztörvény</u>

A gázra is igaz, hogy egy adott pontjában a nyomás minden irányban ugyanakkora.
A gázok sűrűsége sokkal kisebb, mint a folyadékoké, ezért a nehézségi erő hatása elhanyagolható, és nem túl nagy magasságú tartályok esetében az egész térfogatban állandónak tekinthető a nyomás.
A gázok állapotát ún. állapothatározókkal adjuk meg:

p nyomás
V térfogat
T hőmérséklet
n molszám

Az állapothatározók között az összefüggést az állapotegyenlet adja meg.
Ideális gázra felírhatjuk a **gáztörvény**t, ami egy tapasztalati összefüggés:

$$pV = nRT$$

T a K-ben kifejezett hőmérséklet;

K = °C + 273,15 ; de a feladatokban 273 közelítő értékkel számolunk.

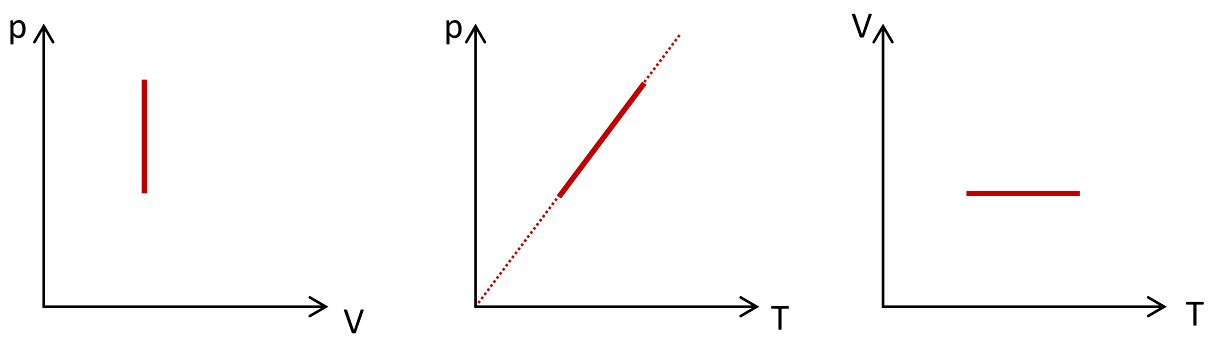
R = 8,314 J/(mol·K) az egyetemes gázállandó.

Általános esetben az állapothatározók közül több is változhat egyszerre, de gyakorlati szempontból érdekesek azok a folyamatok, amikor valamelyik állapotjelző állandó.

Izochor folyamat: V = konst.

Merev falú edénybe zárt gáz állapotváltozása.
Adott mennyiségű gáz (n = konst.) esetén a gáztörvényből látjuk, hogy

p / T = konst.



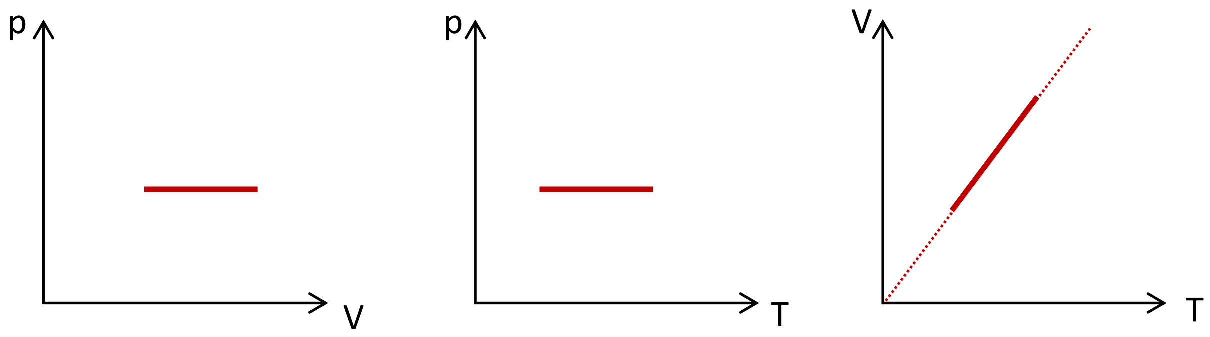
3B/K1 KÍSÉRLET: Levegővel töltött zárt palack aljából kivezetett U alakú csőben víz van. Kezdetben a cső két szárában azonos magasságban van a víz, mivel a bezárt levegő nyomása *megegyezik a külső légnyomással (a csőnek az a szára nyitott a légkörre). Ha megmelegítjük a palackba zárt levegőt kézzel, ill. hajszárítóval, akkor megnő a nyomása, és az U alakú csőben elmozdul a víz. (Ha a palack térfogatához hozzászámoljuk a csőben levő levegő térfogatát is, akkor ez szigorúan véve nem izochor folyamat, de vékony cső esetén a vízoszlop elmozdulásából származó térfogatváltozás elhanyagolható a palack térfogatához képest.)*

Izobar folyamat: p = konst.

Könnyen mozgó dugattyúval elzárt gáz állapotváltozása.

Adott mennyiségű gáz (n = konst.) esetén a gáztörvényből látjuk, hogy

V / T = konst.



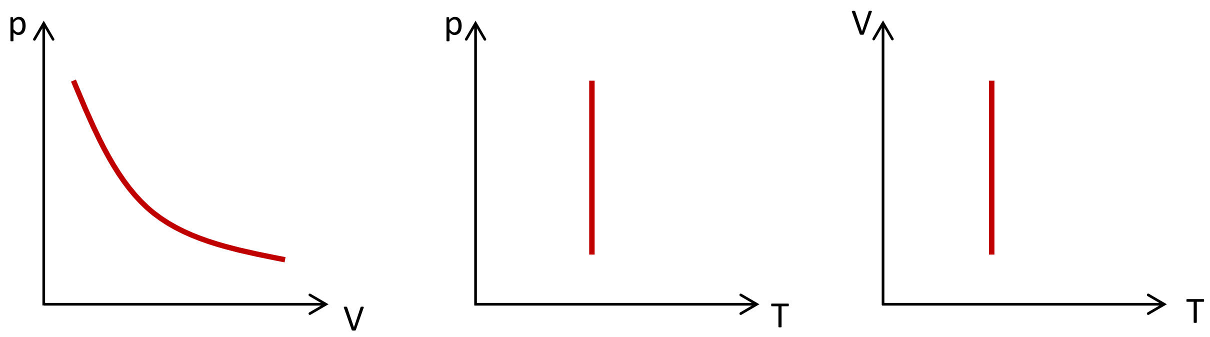
3B/K2 KÍSÉRLET: Egy palack szájára lufit húzunk, úgy, hogy minél kevesebb levegő legyen a lufiban, majd betesszük mélyhűtőbe (kb. 24 °C-os szobából kb. –17 °C-os fagyasztóba). A palackba zárt levegő térfogata csökken, és elkezdi behúzni a palackba a lufit, majd a palack elkezd behorpadni. A fagyasztóból kivéve a melegedést hajszárítóval segítjük, így nő a bezárt térfogat, és amikor a hőmérséklet a kezdeti szobahőmérséklet fölé emelkedik, akkor a lufi is elkezd megtelni levegővel.

Izoterm folyamat: T = konst.

Állandó hőmérsékleten végbemenő állapotváltozások.

Adott mennyiségű gáz (n = konst.) esetén a gáztörvényből látjuk, hogy

p·V = konst.



3B/K3 KÍSÉRLET: Cartesius-búvár.
Vízzel telt palackban van egy fejjel lefelé fordított (tehát alul nyitott) kémcső. A kémcsőben levő levegő miatt a kémcső + víz + levegő (a búvár) átlagsűrűsége kezdetben kisebb a víz sűrűségénél, ezért a búvár felúszik. Ha a palackot megnyomjuk, a kezünk által kifejtett nyomás a víz közvetítésével megnöveli a kémcsőbe zárt levegő nyomását, ezért annak a térfogata csökken, alulról víz áramlik bele, és a kémcső + víz + levegő átlagsűrűsége nagyobb lesz a víz sűrűségénél, ezért a búvár lesüllyed.

FELADATOK

3B/1. (MÁ 840.) 300 l térfogatú, 27 °C hőmérsékletű, 10^5 Pa nyomású gáz először állandó nyomáson 200 l-rel tágul, másodszor állandó térfogaton a hőmérséklete 123 °C-ra emelkedik.
a) Mekkora a gáz hőmérséklete az állandó nyomáson végbement állapotváltozása végén?
b) Mekkora a gáz nyomása az állandó térfogaton végbement állapotváltozása végén?

Megoldás

$V_0 = 300$ l $= 300$ dm$^3 = 0{,}3$ m^3; $p_0 = 10^5$ Pa; $T_0 = 27$ °C $= 300$ K

a) $p =$ konst., $\Delta V = 200$ l $= 200$ dm$^3 = 0{,}2$ m^3 $\rightarrow$ $T_1 = ?$

$V_1 = V_0 + \Delta V = 300 + 200 = 500$ l $= 500$ dm$^3 = 0{,}5$ m^3

izobár folyamat, tehát $V / T =$ konst.:

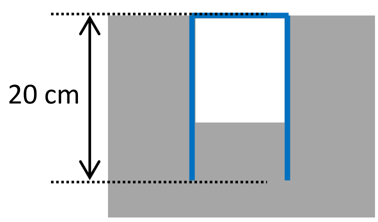
$V_0 / T_0 = V_1 / T_1 \rightarrow T_1 = V_1 / V_0 \cdot T_0 = 0{,}5/0{,}3 \cdot 300 = 500$ K $= 227$ °C.

b) $V =$ konst. , $T_2 = 123$ °C $= 396$ K $\rightarrow$ $p_2 = ?$

izoterm folyamat, tehát $p / T =$ konst.:

$p_0 / T_0 = p_2 / T_2 \rightarrow p_2 = T_2 / T_0 \cdot p_0 = 396/300 \cdot 10^5 = 1{,}32 \cdot 10^5$ Pa.

3B/2. (MÁ 830.) Egy 50 cm^2 alapterületű, 20 cm magas, elhanyagolható súlyú, alul nyitott, vékony falú dobozt addig nyomunk be higanyba, amíg éppen a felső szintjéig merül le. A hőmérséklet állandó, a külső levegő nyomása 10^5 Pa.



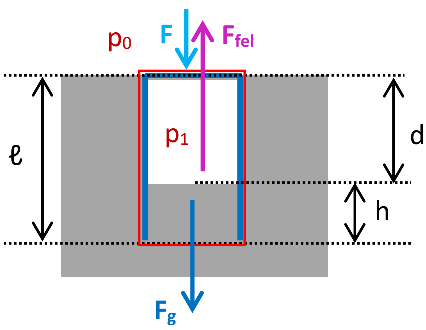
a) Mekkora a doboz belsejében ekkor a levegő nyomása?
b) Mekkora erővel kell a dobozt ebben a helyzetben leszorítanunk?

Megoldás

$p_0 = 10^5$ Pa; $A = 50$ cm$^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ m^2;

a doboz magassága $\ell = 20$ cm $= 0{,}2$ m;

a higany sűrűsége $\rho_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3.



Amikor a dobozt benyomjuk a higanyba, a benne levő levegő összenyomódik, és alulról higany áramlik be a helyére. Jelölje h a beáramlott higany magasságát, és d a csökkent térfogatú levegő magasságát, $h + d = \ell$.

A folyamat izoterm, $T =$ konst. $\rightarrow$ $pV =$ konst. $\rightarrow$ a bezárt levegő nyomása megnő.

Kezdetben a dobozban levő levegő nyomása p_0 volt, és a térfogata $V_0 = A\ell$;
a higanyba benyomva a levegő nyomása p_1 lett, és a térfogata $V_1 = Ad$, ezekkel:

$p_0 V_0 = p_1 V_1$: $p_0 A\ell = p_1 Ad$.

A dobozba bezárt gáz p_1 nyomása egyensúlyt tart a higany hidrosztatikai nyomásával és a felette levő légköri nyomással. A bezárt levegőoszlop aljára felírva:

$p_1 = p_0 + \rho_{Hg} g d$

Két egyenletünk van két ismeretlennel (p_1 és d):

$p_0 \ell = p_1 d$

$p_1 = p_0 + \rho_{Hg} g d$

Az elsőből $d = p_0 / p_1 \cdot \ell$, amit beírunk a második egyenletbe:

$p_1 = p_0 + \rho_{Hg} g p_0 / p_1 \cdot \ell \quad \rightarrow \quad p_1^2 - p_0 p_1 - \rho_{Hg} g p_0 \ell = 0$

$$p_1 = \frac{p_0 \pm \sqrt{p_0^2 + 4 \rho_{Hg} g p_0 l}}{2} = \frac{10^5 \pm \sqrt{10^{5^2} + 4 \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2}}{2} = 1{,}222 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

A másik gyök negatív, fizikailag értelmetlen.
Itt nem volt kérdés, de gyorsan kiszámíthatjuk, mekkora a levegőoszlop magassága:

$d = p_0 / p_1 \cdot \ell = 10^5 / 1{,}222 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1636$ m.

b) A higanyba belenyomott dobozra 3 erő hat: az F_g nehézségi erő, az F_{fel} felhajtóerő, és az általunk kifejtett F erő, a 3 erő eredője zérus kell legyen:

$F_{fel} - F_g - F = 0$ (a felfelé mutató erőket tekintve pozitívnak).

Mivel a dobozba alulról beáramlott a higany, most a doboz + levegő + benne levő higany rendszerre ható erőket kell felírnunk.
A nehézségi erő

$F_g = (m_{doboz} + m_{levegő} + m_{Hg})\, g$.

A feladat szövege szerint a doboz tömege elhanyagolható, és még inkább elhanyagolható a levegő tömege. A higany tömege pedig $m_{Hg} = \rho_{Hg} Ah$, és $h = \ell - d$, tehát

$F_g = \rho_{Hg} A(\ell - d)\, g$.

A felhajtóerő számításához a doboz térfogatát kell beírni:

$F_{fel} = \rho_{Hg} A\ell\, g$.

Az általunk kifejtendő erő

$F = F_{fel} - F_g = \rho_{Hg} A\ell g - \rho_{Hg} A(\ell - d) g = \rho_{Hg} Ad g$

Behelyettesítve

$F = 13{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 0{,}1636 \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 111{,}2$ N.

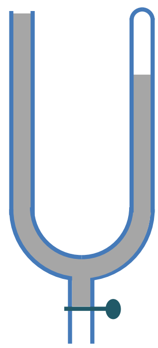
II. A b) feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy felhajtóerő helyett a közvetlenül a dobozra ható nyomóerőkkel számolunk. Azaz a dobozra hat egy nehézségi erő (ez most 0 az elhanyagolható tömege miatt), a doboz tetejére felfelé egy nyomóerővel a bezárt levegő, lefelé egy nyomóerővel a külső levegő, illetve a kérdéses F erő; ezek eredője kell, hogy nulla legyen:

$F_{ny,1} - F_{ny,0} - F_g - F = 0$ (a felfelé mutató erőket tekintve pozitívnak).

A doboz tömege elhanyagolható, vagyis $F_g = 0$. Az egyenletet a kérdéses F erőre rendezve, és a nyomóerőket a nyomásokkal kifejezve kapjuk:

$F = F_{ny,1} - F_{ny,0} = p_1 A - p_0 A = (p_1 - p_0)A = (1{,}2225 - 1)\, 10^5 \text{ Pa} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 111{,}2$ N.

3B/3. (MÁ 826.) Az 1 cm^2 keresztmetszetű, azonos szárhosszúságú U alakú cső egyik vége nyitott, a másik vége zárt. A cső zárt végében 20 cm^3 0 °C hőmérsékletű gázt a külső levegőtől higany választ el. A higany a nyitott csőszárat teljesen megtölti. A külső légnyomás 10^5 Pa, a higany hőtágulása elhanyagolható.



a) Mekkora a bezárt gáz nyomása?

b) A csapon át annyi higanyt engedünk ki, hogy a két csőben a higanyszintek különbsége eltűnjék. Mekkora ekkor a bezárt gáz térfogata?

Plusz feladatok:

c) Mennyi a kieresztett higanymennyiség térfogata?

d) Ezután mennyivel emeljük meg a rendszer hőmérsékletét, hogy a nyitott szárban 4 cm-rel magasabban legyen a higanyfelszín, mint a másik szárban?

<u>Megoldás</u>

A külső légnyomás $p_0 = 10^5$ Pa; $A = 1$ cm^2; a higany sűrűsége $\rho_{Hg} = 13{,}6{\cdot}10^3$ kg/m^3.

Az U alakú cső két szárában a nyomás egyenlő kell legyen (sztatika). Felírhatnánk a nyomások egyenlőségét az U alakú cső aljára, de egyszerűbb választás, ha a bezárt gázoszlop aljának a magasságát választjuk. A jobb oldalon a nyomás a bezárt gáz nyomása. A bal oldalon a nyomás a higany hidrosztatikai nyomása + a felette levő külső légnyomás (a cső azon az oldalon nyitott a légkörre).

a) A hidrosztatikai nyomáshoz szükségünk van a higanyoszlop magasságára, ami megegyezik a gázoszlop magasságával.

A bezárt gáz térfogata $V_1 = 20$ cm^3 $\rightarrow$ a gázoszlop magassága $h_1 = V_1/A = 20$ cm $= 0{,}2$ m.

A bezárt gáz nyomása a kiinduló állapotban p_1:

$$p_1 = p_0 + \rho_{Hg} g\, h_1 = 10^5 + 13{,}6{\cdot}10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}2 = 1{,}272{\cdot}10^5 \text{ Pa}.$$

b) Amikor kiengedünk higanyt, akkor a jobb oldali szárban nő a bezárt gáz térfogata. Izoterm folyamatot feltételezve $p{\cdot}V =$ konst. $\rightarrow$ csökken a bezárt gáz nyomása.

A feladat szövege szerint annyi higanyt engedünk ki, hogy a két oldalon a higany szintje megegyezzen $\rightarrow$ az egyensúly miatt a higanyszint feletti nyomás meg kell egyezzen a két oldalon. Bal oldalon a cső nyitott a légkörre, tehát a nyomás ott p_0 $\rightarrow$ akkor lesz egyensúlyban a két oldal, ha a bezárt gáz p_2 nyomása egyenlő p_0-lal, tehát $p_2 = p_0$.

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \rightarrow \quad V_2 = p_1 / p_2 \cdot V_1 = 1{,}272{\cdot}10^5 / 10^5 \cdot 20 \text{ cm}^3 = 25{,}44 \text{ cm}^3.$$

Plusz feladatok:

c) A jobb oldalon

$\Delta V_{jobb} = V_2 - V_1 = 25{,}44 - 20 = 5{,}44$ cm^3 -rel nőtt a levegő térfogata, tehát ennyivel csökkent a higany térfogata.

A bal oldalon ugyanannyi levegő van a higany fölött, mint a jobb oldalon (mert a higany szintje megegyezik a két oldalon), tehát a bal oldalról annyi higanyt kellett kiereszteni, amennyi a bezárt levegő térfogata a jobb oldalon:

$\Delta V_b = V_2 = 25{,}44$ cm^3,

Tehát

$\Delta V_{ki} = \Delta V_{bal} + \Delta V_{jobb} = 25,44 + 5,44 = 30,88\ cm^3$ higanyt kellett kiereszteni.

d) A bezárt gázt megmelegítve növekszik a nyomása és a térfogata is.
Ha Δh = 4 cm a magasságkülönbség a higanyszintek között, akkor a jobb oldalon 2 cm-rel süllyedt, a bal oldalon 2 cm-rel emelkedett a higany szintje (a csap be van zárva, a cső keresztmetszete a két oldalon megegyezik).
A bezárt gáz térfogatának változása

$\Delta V_3 = A \cdot 2\ cm = 2\ cm^3$,

a gáz térfogata

$V_3 = V_2 + \Delta V_3 = 25,44 + 2 = 27,44\ cm^3$ lesz.

A bezárt gáz nyomását a gázoszlop aljára felírt egyensúlyból tudjuk kiszámolni:

$p_3 = p_0 + \rho_{Hg} g\, \Delta h = 10^5 + 13,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,04 = 105440$ Pa.

Ez az állapotváltozás nem izobár, mert változott a gáz nyomása, és nem izochor, mert változott a gáz térfogata is. Írjuk fel a gáztörvényt a kiinduló és a végállapotra:

$p_2 V_2 = nR T_2$ ill. $p_3 V_3 = nR T_3$.

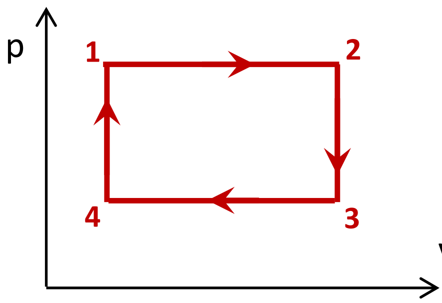
Mivel n nem változik, ezért most pV/T = konst.
A két egyenlet hányadosából kifejezhetjük T_3-at:

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{p_2 V_2} T_2 = \frac{105440 \cdot 27,44}{100000 \cdot 25,44} \cdot 273 = 310,5\ K.$$

$\Delta T = T_3 - T_2 = 310,5 - 273 = 37,5\ K = 37,5\ °C$-kal kell emelni a hőmérsékletet.

Plusz feladat:

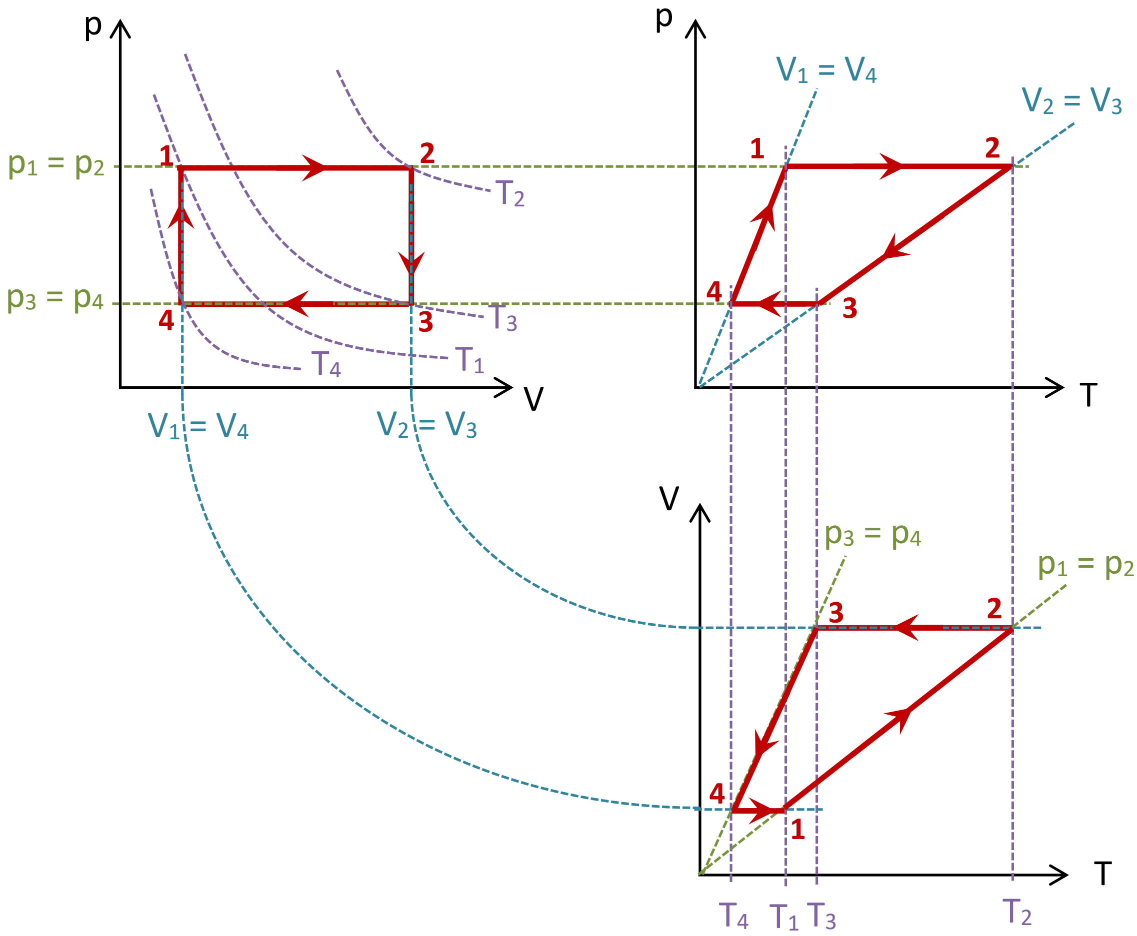
3B/4. (MÁ 900., DRS 15.23.) Az ábrán ideális gáz állapotváltozásainak diagramja látható a nyomás – térfogat (p – V) állapotsíkon. Rajzoljuk meg ugyanezt a körfolyamatot
a nyomás – hőmérséklet (p – T) és
a térfogat – hőmérséklet (V – T) állapotsíkon,
megjelölve a megfelelő pontokat!



<u>Megoldás</u>:
pV = nRT
Izotermák a p – V síkon:
$p \sim T \cdot (1/V)$: olyan hiperbolák, amik nagyobb T érték esetén feljebb vannak.
(Ezen a diagramon T_4 a legkisebb, T_2 a legnagyobb hőmérséklet, és itt most $T_1 < T_3$, de ez a téglalap alakjától függ.)

Izochor folyamatok a p – T síkon:
$p \sim (1/V) \cdot T$: olyan egyenesek, amiknek a meredeksége fordítottan arányos a V értékével.

Izobar folyamatok a V – T síkon:
$V \sim (1/p) \cdot T$: olyan egyenesek, amiknek a meredeksége fordítottan arányos a p értékével.



A megoldás lépéseit ld. a Stream videóban!

3B/K4 KÍSÉRLET: Egy üvegedényt félig megtöltünk vízzel, és egy olyan kupakkal zárjuk le, amibe egy kis lyukat fúrtunk. Fejjel lefelé fordítjuk az üveget, és megmérjük, mennyi víz folyik ki az üvegből.

Megjegyzés: látjuk, hogy csak kevés víz folyik ki, kb. az üvegben levő víz 1%-a. Emiatt számolhatunk úgy, hogy a vízoszlop magasságának változását elhanyagoljuk, csak a bezárt levegő térfogatának és nyomásának megváltozásával számolunk. Ez a számolás ekvivalens a 3HF/6. feladattal. A pontos számolást a következő (3B/5) feladatban mutatjuk be.

KIDOLGOZOTT GYAKORLÓ FELADATOK:

3B/5.

A 3B/K4 kísérletben a következők az adatok:
Az üveg teljes térfogata $V_{üveg}$ = 557 ml (a névleges térfogata 500 ml);
az üveg belső sugara r = 3,7 cm = 0,037 m;
az üvegbe töltött víz térfogata $V_{víz,0}$ = 280 ml;
az üvegbe töltött víz magassága a fejre állított üvegben kezdetben h_0 = 10,0 cm = 0,1 m.
Számoljuk ki, mennyi víz folyik ki a lyukon, ha fejre állítjuk az üveget!

Megoldás:

Kezdetben a bezárt levegő
térfogata $V_0 = V_{üveg} - V_{víz} = 277$ ml $= 277$ cm$^3 = 2{,}77\cdot10^{-4}$ m^3,
nyomása $p_0 = 10^5$ Pa.
A kifolyt víz térfogatát jelöljük ΔV-vel
$\rightarrow$ a végállapotban
a bezárt levegő térfogata $V_1 = V_0 + \Delta V$ (és a nyomása p_1);
a vízoszlop magassága $h_1 = h_0 - \Delta h = h_0 - \Delta V / A$,
ahol $A = r^2\pi = 0{,}037^2\cdot\pi$ m^2 az üveg belső keresztmetszete.

A bezárt levegő térfogatának növekedésére izoterm állapotváltozást feltételezve felírhatjuk, hogy

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 = p_1 (V_0 + \Delta V).$$

A bezárt levegő nyomása lecsökken a légköri nyomáshoz képest.
A kupakon levő lyuknál egyensúlyban van a külső (p_0) és a belső nyomás. A belső nyomás a bezárt levegő p_1 nyomásának és a maradék vízoszlop hidrosztatikai nyomásának az összege:

$$p_0 = p_1 + \rho g h_1 = p_1 + \rho g (h_0 - \Delta V / A).$$

Fejezzük p_1-et az első egyenletből, és írjuk be a második egyenletbe:

$$p_1 = p_0 V_0 / (V_0 + \Delta V) \quad \rightarrow$$
$$p_0 = p_0 V_0 / (V_0 + \Delta V) + \rho g (h_0 - \Delta V / A).$$

Ez egy másodfokú egyenlet ΔV-re. Rendezzük:

$$\cancel{p_0 V_0} + p_0 \Delta V = \cancel{p_0 V_0} + \rho g h_0 V_0 + \rho g h_0 \Delta V - \rho g V_0 \Delta V / A - \rho g (\Delta V)^2 / A \quad \rightarrow$$
$$(\rho g / A) \cdot (\Delta V)^2 + (p_0 + \rho g V_0 / A - \rho g h_0) \cdot \Delta V - \rho g h_0 V_0 = 0.$$

Behelyettesítve a számértékeket:
$\rho g / A = 1000\cdot10/(0{,}037^2\cdot\pi) = 2{,}325\cdot10^6$ kg/(s^{2}m^4);
$p_0 + \rho g V_0 / A - \rho g h_0 = 10^5 + 1000\cdot10\cdot2{,}77\cdot10^{-4}/(0{,}037^2\cdot\pi) - 1000\cdot10\cdot0{,}1 = 99644$ kg/(s^{2}m);
$\rho g h_0 V_0 = 1000\cdot10\cdot0{,}1\cdot2{,}77\cdot10^{-4} = 0{,}277$ kgm^2/s^2.
A másodfokú egyenlet:

$$2{,}325\cdot10^6 \, (\Delta V)^2 + 99644 \, \Delta V - 0{,}277 = 0.$$

Az egyenlet pozitív (fizikai értelemmel bíró) megoldása

$$\Delta V = 2{,}78\cdot10^{-6} \text{ m}^3 = 2{,}78 \text{ cm}^3.$$

Ennyi víznek kell kifolyni az üvegből, ha fejjel lefelé fordítjuk.
A videón látható kísérlet eredménye: $m_{víz}$ = 2,84 g.

3B/6. (MÁ 623.) Jégtábla úszik a vízen. Felső vízszintes lapjának területe 4 m^2. A jégtábla vastagsága 30 cm, a jég sűrűsége $0{,}92 \cdot 10^3$ kg/m^3.
Rámehet-e egy 80 kg tömegű ember anélkül, hogy elsüllyedne?

Megoldás

$A = 4$ m^2; $d = 30$ cm $= 0{,}3$ m; $\rho_{jég} = 0{,}92 \cdot 10^3$ kg/m^3; $\rho_{víz} = 10^3$ kg/m^3.
Jelölje m az ember tömegét, M a jégtábla tömegét, és
d_{be} a jégtábla vastagságának vízbe merülő részét, így a bemerülő térfogat $V_{be} = A\, d_{be}$.
A jégtáblára ható erők:

nehézségi erő (lefelé), a nagysága

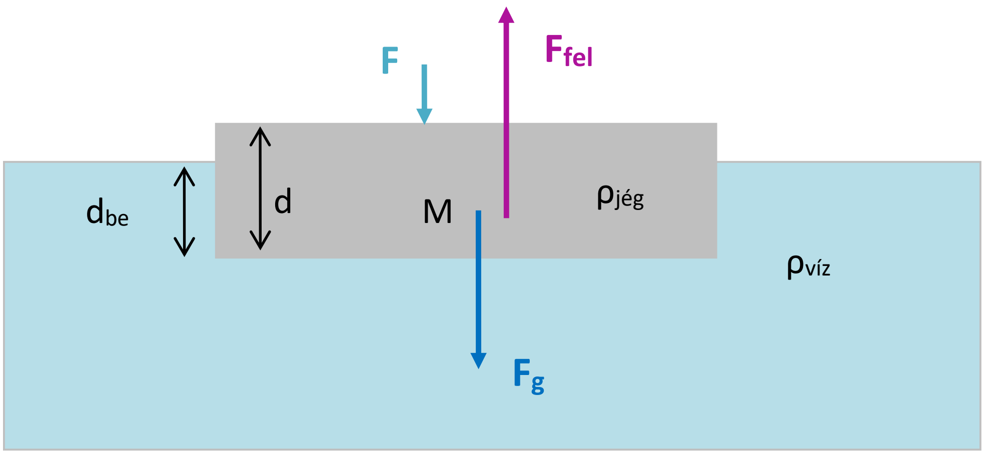
$$F_g = M\, g = \rho_{jég}\, V\, g = \rho_{jég}\, Ad\, g;$$

felhajtóerő (felfelé), a nagysága

$$F_{fel} = \rho_{víz}\, V_{be}\, g = \rho_{víz}\, A\, d_{be}\, g;$$

az ember által a jégtáblára kifejtett F erő (lefelé), a nagysága

F = mg (mivel az ember a jégtáblán nyugalomban van).



A jégtáblára felírható mozgásegyenlet (felfelé pozitív)

$$F_{fel} - F_g - F = 0,$$

azaz

$$\rho_{víz}\, A\, d_{be}\, g - \rho_{jég}\, Ad\, g - F = 0\, .$$

Fejezzük ki ebből az F erőt:

$$F = \rho_{víz}\, A\, d_{be}\, g - \rho_{jég}\, Ad\, g.$$

Látható, hogy F növekedésével d_{be} nő, tehát a jégtábla egyre mélyebbre merül. d_{be} maximális értéke d lehet, különben a jégtábla (rajta az emberrel) már nem úszik, hanem elmerül, tehát

$d_{be,max} = d$, és ez határozza meg F_{max} értékét.

Oldjuk meg kétféleképpen a feladatot!

I.) Fejezzük ki F_{max} értékét, és számoljuk ki, mekkora lehet az ember m_{max} tömege.

Az $F = \rho_{víz}\, A\, d_{be}\, g - \rho_{jég}\, Ad\, g$ képletbe beírva a $d_{be,max} = d$ értéket

$$F_{max} = \rho_{víz}\, Ad\, g - \rho_{jég}\, Ad\, g = (\rho_{víz} - \rho_{jég})\, Ad\, g\,,$$

a számértékeket behelyettesítve

$$F_{max} = (1000 - 920)\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 4\ \mathrm{m^2} \cdot 0{,}3\ \mathrm{m} \cdot 10\ \mathrm{m/s^2} = 960\ \mathrm{N} = m_{max}\, g$$

$\rightarrow$ m_{max} = 96 kg tömegű embert bír el a jégtábla, tehát a 80 kg tömegű emberrel nem süllyed el.

II.) Számoljuk ki, mennyire süllyed be a 80 kg tömegű emberrel a jégtábla, és ellenőrizzük, hogy ez kevesebb, mint a jégtábla vastagsága.

$$\rho_{víz}\, A\, d_{be}\, g - \rho_{jég}\, Ad\, g - F = 0 \quad \rightarrow$$

$$d_{be} = \frac{\rho_{jég}\, Ad\, g + F}{\rho_{víz}\, A\, g} = \frac{\rho_{jég}}{\rho_{víz}}\, d + \frac{F}{\rho_{víz}\, A\, g}\,.$$

A számértékeket behelyettesítve

$$d_{be} = \frac{920}{1000} \cdot 0{,}3 + \frac{800}{1000 \cdot 4 \cdot 10} = 0{,}296\ \mathrm{m}.$$

Mivel $d_{be} < d$, a jégtábla nem süllyed el a 80 kg-os emberrel.

<u>Megjegyzés:</u>

A II.) megoldásban levezetett $d_{be} = \frac{\rho_{jég}}{\rho_{víz}}\, d + \frac{F}{\rho_{víz}\, A\, g}$ képletből könnyen kiszámolhatjuk, mennyire süllyed be egy d vastagságú jégtábla pusztán a saját tömegétől (azaz ha F = 0):

$$d_{be} = \frac{\rho_{jég}}{\rho_{víz}}\, d = \frac{920}{1000} \cdot d\,,$$

tehát a vízbe merülő térfogat úgy aránylik a teljes térfogathoz, mint az úszó test sűrűsége a közeg sűrűségéhez.

Mennyire emelkedik meg a víz szintje, ha elolvad a jégtábla?

Képzeljük el, hogy egy valamekkora vízmennyiség tetejére adott tömegű vizet „ráteszünk” jég ill. víz formájában, és számoljuk ki, melyik esetben foglal el nagyobb térfogatot a vízben.

Amikor a jégtábla úszik, akkor a rá ható

$F_g = M\, g$ nehézségi erő és az

$F_{fel} = \rho_{víz}\, V_{be}\, g$ felhajtóerő nagysága egyenlő:

$$M\, g = \rho_{víz}\, V_{be}\, g\,,$$

tehát a bemerülő rész térfogata

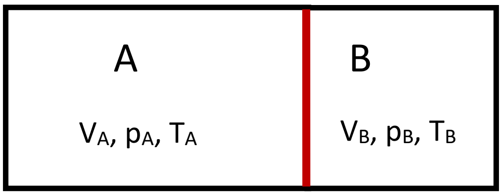
$V_{be} = M / \rho_{víz}$, ennyivel emelkedik a vízszint, ha rákerül a jégtábla.

Mivel

$$M / \rho_{víz} = V\,,$$

ezért látható, hogy a bemerülő rész térfogata éppen megegyezik a jég elolvadásával keletkező víz térfogatával. Tehát a vízszint nem változik, mert mindegy, hogy az adott tömeg jég vagy víz formájában kerül a víz tetejére.

3B/5. (MÁ 853.) Henger alakú zárt edényben súrlódásmentes, jól záródó, vékony dugattyú áll. Kiinduláskor a dugattyú bal oldalán 8 l normál állapotú, jobb oldalán 5 l normál állapotú gáz van bezárva. A jobb oldali teret 100 °C-ra megmelegítjük, miközben a dugattyútól balra levő részt továbbra is 0 °C-on tartjuk. A henger fala és a dugattyú hőszigetelőnek tekinthető.



a) Mekkora lesz az egyik, ill. a másik oldalon a nyomás, ha a dugattyút melegítés közben nem engedjük elmozdulni?
b) Mekkora lesz a bal, ill. a jobb oldali részben a gáz térfogata és nyomása, ha a dugattyú a melegítés folyamán elmozdulhat?

Adatok:
Kiindulási állapot:
V_{A1} = 8 l = 8 dm^3; V_{B1} = 5 l = 5 dm^3;
normál állapot:
p = 10^5 Pa, tehát $p_{A1} = p_{B1} = 10^5$ Pa;
t = 0 °C, T = 273 K, tehát $T_{A1} = T_{B1}$ = 273 K.

a) állapot:
$T_{A2} = T_{A1}$ = 273 K; $T_{B2} = T_{B1} + 100$ = 373 K.
A térfogatok nem változnak: $V_{A2} = V_{A1}$ = 8 dm^3; $V_{B2} = V_{B1}$ = 5 dm^3, izochor folyamat.
A bal oldali részben nem változik semmi, $p_{A2} = p_{A1} = 10^5$ Pa.
A jobb oldali rész nyomása nőni fog az izochor melegítés miatt. p_{B2} = ?
<u>Megoldás</u>:
V = konst. $\rightarrow$ p / T = konst.:

$$\frac{p_{B1}}{T_{B1}} = \frac{p_{B2}}{T_{B2}} \quad \rightarrow \quad p_{B2} = \frac{T_{B2}}{T_{B1}} p_{B1} = \frac{373}{273} \cdot 10^5 = 1{,}366 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

b) állapot:
$T_{A3} = T_{A2} = T_{A1}$ = 273 K; $T_{B3} = T_{B2}$ = 373 K.
A dugattyú elmozdulása miatt
a nyomások kiegyenlítődnek, $p_{A3} = p_{B3}$ = ?;
a térfogatok megváltoznak, V_{A3} = ?; V_{B3} = ?
<u>Megoldás</u>:
A kiindulási állapothoz képest a jobb oldali résznek 3 állapothatározója: a hőmérséklete, nyomása és térfogata is változik. Viszont ahhoz az állapothoz képest, amikor megmelegítettük és megnőtt a nyomása (amit az **a)** részben kiszámoltunk), a dugattyú elmozdulásakor már csak 2 állapothatározója: a nyomása és a térfogata változik. Ugyanígy a bal oldali résznek is változik a dugattyú elmozdulásakor a nyomása és a térfogata.
T = konst. $\rightarrow$ pV = konst.

A bal oldali részre

$p_{A3}V_{A3} = p_{A2}V_{A2}$;

a jobb oldali részre

$p_{B3}V_{B3} = p_{B2}V_{B2}$.

Tudjuk, hogy

$p_{A2} = p_{A1} = 10^5$ Pa;

$V_{A2} = V_{A1} = 8\ dm^3$;

$p_{B2} = 1{,}366 \cdot 10^5$ Pa;

$V_{B2} = V_{B1} = 5\ dm^3$;

a többi mennyiség (p_{A3}, V_{A3}, p_{B3} és V_{B3}) ismeretlen.

Felírhatjuk még, hogy

- a nyomások kiegyenlítődése miatt $p_{A3} = p_{B3}$ (a dugattyú addig mozdul el, amíg a két oldalon a nyomások ki nem egyenlítődnek), jelöljük ezt a közös nyomást p_3 -mal;
- amennyivel nő az egyik oldal térfogata, annyival csökken a másik oldalé. Mivel a jobb oldali részben volt nagyobb a nyomás, ezért a dugattyú balra mozdul el, a jobb oldali rész térfogata nő, a bal oldali részé csökken, tehát $V_{A3} = V_{A2} - \Delta V$ és $V_{B3} = V_{B2} + \Delta V$.

Ezeket beírva

$p_3 (V_{A2} - \Delta V) = p_{A2}V_{A2}$ és

$p_3 (V_{B2} + \Delta V) = p_{B2}V_{B2}$

egy kétismeretlenes egyenletrendszer p_3-ra és ΔV-re.

Szorozzunk be és adjuk össze a két egyenletet:

$p_3 V_{A2} - p_3 \Delta V = p_{A2}V_{A2}$

$p_3 V_{B2} + p_3 \Delta V = p_{B2}V_{B2}$

$\rightarrow$ $p_3 (V_{A2} + V_{B2}) = p_{A2}V_{A2} + p_{B2}V_{B2}$,

amiből

$p_3 = (p_{A2}V_{A2} + p_{B2}V_{B2}) / (V_{A2} + V_{B2})$.

Behelyettesítve

$p_3 = (10^5 \cdot 8 + (373/273) \cdot 10^5 \cdot 5) / (8+5) = 1{,}141 \cdot 10^5$ Pa,

ennyi lesz a nyomás mindkét oldalon.

(Ellenőrzés: $p_{A2} < p_3 < p_{B2}$, a bal oldali nyomás nőtt, a jobb oldali nyomás csökkent.)

Visszahelyettesítve a fenti egyenletekbe

$V_{A3} = V_{A2} - \Delta V = p_{A2}V_{A2} / p_3 = 10^5 \cdot 8 / (1{,}141 \cdot 10^5) = 7{,}012\ dm^3$;

$V_{B3} = V_{B2} + \Delta V = p_{B2}V_{B2} / p_3 = 1{,}366 \cdot 10^5 \cdot 5 / (1{,}141 \cdot 10^5) = 5{,}988\ dm^3$.

(Ellenőrzés: $V_{A3} + V_{B3} = 13$ l.)

GYAKORLÓ FELADATOK

Hidrosztatika:

587., 589., 591., 592., 593., 594., 595., 598., 599.a)b), 601.

Felhajtóerő:

608., 609., 610., 611., 612., 613., 614., 615., 616., 617., 619., 624., 625., 626.

Gáztörvény:

818., 819., 820., 821., 822., 823., 824., 825., 827., 829., 832., 838., 839., 842., 843., 844., 848., 849., 850., 851.a), 855., 857., 858., 859., 860., 861., 864., 871., 876., 901., 903.a), 914.a)

SZIMULÁCIÓK

Felhajtóerő: https://phet.colorado.edu/sims/density-and-buoyancy/buoyancy_en.html

Ideális gáz: https://phet.colorado.edu/en/simulation/gas-properties