**Biomérnökök feladata** (8:15):

**1.)** Egy $m$ tömegű testet helyezünk egy $\alpha$ hajlásszögű lejtőre. Számoljon g=10 m/s$^2$ nehézségi gyorsulással!

**a)** Mekkora tapadási súrlódási együttható esetén marad nyugalomban a test? (8 pont)

**b)** Ezután meglökjük a testet lefelé, a csúszási súrlódási együttható $\mu$. Mekkora lesz a test gyorsulása? (5 pont)

**c)** Mekkora, a lejtővel párhuzamos erőt kell a testre kifejteni, hogy meglökés után állandó sebességgel csússzon a lejtőn? Fölfelé, vagy lefelé kell ezt az erőt kifejteni? (7 pont)

Megoldás:

**1.) a)** A testre hat az $F_g = mg$ nehézségi erő, az $F_{ny}$ nyomóerő a lejtőre merőlegesen és az $F_t$ tapadási súrlódási erő. A mozgásegyenletet célszerű a lejtővel párhuzamos és a lejtőre merőleges komponensekre bontani. Írjuk fel először a mozgásegyenlet lejtőre merőleges komponensét, felhasználva azt a kényszerfeltételt, hogy a gyorsulás lejtőre merőleges komponense nulla:

$ma_\perp = 0 = F_{ny} - F_{g,\perp}$ (**1 pont**). A nehézségi erő lejtőre merőleges komponensét beírva:

$0 = F_{ny} - mg\cos\alpha \Rightarrow F_{ny} = mg\cos\alpha$ (**1 pont** az mgcosα**, 1 pont** az $F_{ny}$ kifejezése). (*Ha valamelyik másik részfeladattal kezd, és ott írja fel ezeket az egyenleteket, akkor oda jár a 3 pont.*)

A mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponense: $ma = F_{g,\parallel} - F_t$ (**1 pont**), ezt tovább alakítva és felhasználva, hogy a nyugalomban levő test gyorsulása 0: $0 = mg\sin\alpha - F_t$ (**1 pont**), vagyis a nyugalomban maradáshoz $F_t = mg\sin\alpha$ tapadási súrlódási erő szükséges. Ennek kisebbnek kell lennie a tapadási súrlódási erő maximumánál, azaz:

$F_{t,max} = \mu_t mg\cos\alpha \geq mg\sin\alpha$ (**1 pont**). Ezt rendezve: $\mu_t \geq \mathrm{tg}\,\alpha$ (rendezés **1 pont**, végeredmény **1 pont**). (*Ha csak egyenlőséggel számol, arra nem jár pontlevonás.*)

**b)** A test mozog, tehát ekkor az $F_s$ csúszási súrlódási erő hat a sebességgel ellentétes irányba, azaz a lejtővel párhuzamosan fölfelé. A mozgásegyenlet lejtőre merőleges komponense ugyanaz, mint az a) feladatban. A mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponense (a lefelé irányt véve pozitívnak): $ma = F_{g,\parallel} - F_s$ (**1 pont**),

ezt tovább alakítva $ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ (**1 pont**),

ebből a test gyorsulása $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, (képlet **1 pont**, helyes végeredmény **1 pont**, mértékegység **1 pont**).

**c)** A lefelé csúszó test gyorsulása pozitív, tehát a párhuzamos erő nélküli erők eredője lefelé mutat, vagyis egy fölfelé mutató $F_p$ erővel kell a testre hatnunk. Továbbá az állandó sebesség miatt a gyorsulás 0, ezekkel a mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponense:

$ma = 0 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - F_p$ (**2 pont**).

Ebből a párhuzamos erő nagysága $F_p = mg(\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)$ (képlet **1 pont**, behelyettesítés **1 pont**, helyes végeredmény **1 pont**, mértékegység **1 pont**). Pozitív erő jött ki, tehát valóban a lejtővel párhuzamosan, ***fölfelé*** kell mutatnia az erőnek (**1 pont**).

Alternatív megoldás: az $F_p$ erő a b) feladatbeli eredő erő ellentettje kell legyen, azaz $F_p = -ma = -1{,}332$ N (a mínusz előjel jelzi, hogy fölfelé mutat). Erre ugyanúgy jár a ***7 pont***.

A paramétereket és eredményeket a következő táblázat tartalmazza:

| $m$ | $\alpha$ | $\mu$ | $\mu_t$ | $a$ | $F_p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,7 kg | 21° | 0,18 | 0,3839 | 1,903 m/s$^2$ | 1,332 N |
| 0,9 kg | 23° | 0,23 | 0,4245 | 1,790 m/s$^2$ | 1,611 N |

**Vegyészmérnökök feladata** (10:15):

**1.)** Egy $m$ tömegű testet helyezünk egy $\alpha$ hajlásszögű lejtőre. Számoljon g=10 m/s$^2$ nehézségi gyorsulással!

**a)** Ezután meglökjük a testet lefelé, a csúszási súrlódási együttható $\mu$. Mekkora lesz a test gyorsulása? (8 pont)

**b)** A lejtő tetejére teszünk egy súrlódásmentes csigát, ezen átvetünk egy nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű kötelet. A kötél egyik végét az m tömegű testhez rögzítjük, a másik, függőlegesen lógó végére egy M tömegű testet teszünk. Mekkora legyen M, hogy a rendszer súrlódás nélkül is nyugalomban maradjon? (5 pont)

**c)** Mekkora lesz a **b)** feladatban a kötélerő? (2 pont)

**d)** A lejtőn a tapadási súrlódási együttható $\mu_t$. Mekkora hajlásszög esetén marad nyugalomban a test, ha kezdősebesség nélkül a lejtőre helyezzük? (5 pont)

Megoldás:

**1.) a)** A testre hat az $F_g = mg$ nehézségi erő, az $F_{ny}$ nyomóerő a lejtőre merőlegesen és az $F_s$ csúszási súrlódási erő a sebességgel ellentétes irányba, azaz a lejtővel párhuzamosan fölfelé. A mozgásegyenletet célszerű a lejtővel párhuzamos és a lejtőre merőleges komponensekre bontani. Írjuk fel először a mozgásegyenlet lejtőre merőleges komponensét, felhasználva azt a kényszerfeltételt, hogy a gyorsulás lejtőre merőleges komponense nulla:

$ma_\perp = 0 = F_{ny} - F_{g,\perp}$ (**1 pont**). A nehézségi erő lejtőre merőleges komponensét beírva:

$0 = F_{ny} - mg\cos\alpha \Rightarrow F_{ny} = mg\cos\alpha$ (**1 pont** az mgcosα, **1 pont** az $F_{ny}$ kifejezése). (*Ha valamelyik másik részfeladattal kezd, és ott írja fel ezeket az egyenleteket, akkor oda jár a 3 pont.*)

A mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponense (a lefelé irányt véve pozitívnak):

$ma = F_{g,\parallel} - F_s$ (**1 pont**),

ezt tovább alakítva $ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ (**1 pont**),

ebből a test gyorsulása $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, (képlet **1 pont**, helyes végeredmény **1 pont**, mértékegység **1 pont**).

**b)** A lejtőn levő $m$ tömegű testre hat a nehézségi erő, a nyomóerő és az $F_k$ kötélerő, a $M$ tömegű testre pedig a nehézségi erő és a kötélerő. Ezúttal csak a mozgásegyenlet kötél irányú komponenseit írjuk fel, a pozitív irányt a lejtőn lefelé, a függőleges kötéldarabon fölfelé választjuk. Mivel a rendszer nyugalomban van, ezért a gyorsulás 0.

A lejtőn levő testre: $ma = 0 = mg\sin\alpha - F_k$ (**1 pont**), a függőlegesen lelógó testre:

$Ma = 0 = F_k - Mg$ (**1 pont**). A két egyenletet összeadva a kötélerő kiesik:

$0 = mg\sin\alpha - Mg$ (***2 pont*** jár akkor is, ha egyből ezt az összevont alakot írja fel helyesen).

Ebből a keresett tömeg $M = m\sin\alpha$ (képlet **1 pont**, helyes végeredmény **1 pont**, mértékegység **1 pont**).

**c)** A kötélerő kifejezhető valamelyik testre felírt mozgásegyenletből:

$F_k = Mg$, vagy $F_k = mg\sin\alpha$ (képlet **1 pont**, helyes végeredmény **1 pont**).

**d)** A nyugalomban levő testre tapadási súrlódási erő hat, ezzel a mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponense: $ma = F_{g,\parallel} - F_t$ (**1 pont**), ezt tovább alakítva és felhasználva, hogy a nyugalomban levő test gyorsulása 0: $0 = mg\sin\alpha - F_t$ (**1 pont**), vagyis a nyugalomban maradáshoz $F_t = mg\sin\alpha$ tapadási súrlódási erő szükséges. Ennek kisebbnek kell lennie a tapadási súrlódási erő maximumánál, azaz: $F_{t,max} = \mu_t mg\cos\alpha \geq mg\sin\alpha$ (**1 pont**). Ezt rendezve: $\mu_t \geq \mathrm{tg}\,\alpha$, ebből $\alpha \leq \arctan(\mu_t)$ (rendezés **1 pont**, végeredmény **1 pont**). (*Ha csak egyenlőséggel számol, arra nem jár pontlevonás.*)

A paramétereket és eredményeket a következő táblázat tartalmazza:

| $m$ | $\alpha$ | $\mu$ | $\mu_t$ | a | M | $F_k$ | $\alpha_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,9 kg | 20° | 0,22 | 0,30 | 1,353 m/s$^2$ | 0,3078 kg | 3,078 N | 16,70° |
| 0,5 kg | 25° | 0,19 | 0,25 | 2,504 m/s$^2$ | 0,2113 kg | 2,113 N | 14,04° |

**Megjegyzések a pontozáshoz**

- A félkövér, dőlt pontszámok az alternatív megoldáshoz tartoznak, nem összeadandóak a sima félkövér pontszámokkal.
- Ha egy fejben is elvégezhető átalakítás, behelyettesítés nincs részletezve, de helyes a végeredmény, akkor is jár az összes pont. Ha ilyen esetben helytelen a végeredmény, akkor a nem részletezett átalakítás, behelyettesítés pontja sem jár.
- Az itt leírtaktól eltérő megoldásokra is jár az összes pont, amennyiben azok helyesek és a nem triviális lépések meg vannak indokolva.
- Ha egy helytelenül kiszámolt részeredménnyel számol tovább helyesen, akkor a további számolásokra jár minden pont.