

2. TÉMAKÖR: DINAMIKA

1. GYAKORLAT

NEWTON AXIÓMÁK

I. axióma: tehetetlenség törvénye.

Magára hagyott test nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez (azaz: $\mathbf{v} = \text{konst.}$), ha a test mozgását olyan vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, ami inerciarendszer. Magára hagyott test: nincs kölcsönhatásban más testtel, ha megfelelően távol van más testektől. Mi az inerciarendszer? Olyan vonatkoztatási rendszer, amiben érvényes Newton I. axiómája. Vagyis körbeért a definíció. Feloldás: az állítás az, hogy létezik inerciarendszer. A Földet inerciarendszernek tekintjük olyan mozgások vizsgálatánál, amelyeknél a megtett távolságok elhanyagolhatóak a Föld méretéhez képest – de nagyobb távolságot átfogó mozgásoknál már nem tekinthetünk el a Föld forgásától, keringésétől, és így nem tekinthető inerciarendszernek. Vagy: állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszer alkalmas inerciarendszernek.

II. axióma: a dinamika alaptörvénye.

A test gyorsulása arányos a rá ható erővel: $\mathbf{a} \sim \mathbf{F}$,

az arányossági tényező a test tömege: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Az m tömeg a tehetetlenség mértéke [kg],

az F erő a kölcsönhatás mértéke [N].

2A/K1 KÍSÉRLET: egy kiskocsit gyorsítottunk egy csigán átvett fonálon lógó tömeggel. A kiskocsiba az egyes kísérletekben különböző terhelő tömegeket tettünk.

Rugós kisautó terhelésével otthon is végezhető hasonló kísérlet. A kisautó gyorsulása ugyan változik időben, ugyanakkor az autó tömegének növelésével szemmel láthatóan csökken a gyorsulás.

III. axióma: kölcsönhatás törvénye.

Jelölje \mathbf{F}_{AB} az A test által a B testre kifejtett erőt, és \mathbf{F}_{BA} a B test által az A testre kifejtett erőt; a két erő egyenlő nagyságú, megegyező hatásvonalú és ellentétes irányú: $\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB}$, azaz $\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = \mathbf{0}$.

Az erő-ellenő (akció-reakció) megnevezés azt sugallja, hogy az egyik váltja ki a másikat, időben késleltetés van közöttük, de ez nem igaz, egyszerre, egy időben lépnek fel.

2A/K2 KÍSÉRLET: 2 rugós erőmérő egymást húzza. A 2 rugó mindig egyformán nyúlik meg. Akkor is, ha az egyik erőmérő végét rögzítjük, és csak a másikat húzzuk, akkor is, ha mindkettőt húzzuk.

IV. axióma: szuperpozíció törvénye (az erők összegzése).

Ha egy testre egyszerre több erő is hat, akkor a test gyorsulását az erők vektori eredője határozza meg: $\mathbf{F}_{\text{eredő}} = \Sigma \mathbf{F}_i$, az $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletbe az erők vektori eredőjét kell írni: $\Sigma \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$.

Ez azt is jelenti, hogy az egyszerre fellépő erők nem befolyásolják egymást (vagyis a kölcsönhatások egymástól függetlenek).

MOZGÁSEGYENLET

Az $m\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}_i$ egyenletbe behelyettesítjük az egyes kölcsönhatásoknak megfelelő erőtvényeket (ld. később), így tudjuk a test gyorsulását. A kezdősebesség és a kezdeti helyvektor (vagy bármely

időpontban a sebesség és a helyvektor) ismeretében meg tudjuk határozni a sebességet és a helyvektort az idő függvényében.

ERŐTÖRVÉNYEK

avagy: mitől, hogyan függ az egyes kölcsönhatásokban fellépő erő?

Nehézségi erő a Föld felszínén

A Föld által bármely testre kifejtett vonzóerő.

Nagysága: $F_g = mg$, ahol

g a gravitációs gyorsulás, aminek értéke kis mértékben függ attól, hogy a Föld mely pontján van a test (ld. később), Magyarországon $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$;

iránya: függőlegesen lefelé.

A g értéke függ a földrajzi szélességtől egyrészt, mert a Föld nem gömb alakú, másrészt, mert a Föld forog, és függ a tengerszint feletti magasságtól is.

A földi nehézségi erő az általános tömegvonzási erőből származik, ahol a két egymást vonzó test közül az egyik a Föld. Az általános tömegvonzási (gravitációs) erő bármely két test között fellép, a nagysága a távolság növekedésével csökken, de sehol nem zérus.

Kérdés: a Föld és egy ember közötti kölcsönhatásban melyikre hat nagyobb tömegvonzási erő?

Ha a test szabadon mozog \rightarrow hajítás;

ha van felület, köté, rúd \rightarrow „kényszererő.”

Kényszererők: felület, köté, rúd

A testek mozgását felület, köté, rúd korlátozza, ezt a geometriai kényszert a test és a felület, köté, rúd között ható erővel írjuk le.

Csak az irányukat tudjuk (a geometriai kényszer miatt), a nagyságukat nem, az mindig az adott problémából adódik!

A testre a felület által kifejtett F_{ny} nyomóerő:

iránya: a felületre merőleges (ha görbült a felület, akkor a pontbeli érintősíkra merőleges); csak nyomni tud;

nagysága akkora, hogy a test a felületen maradjon.

A testre a köté által kifejtett $F_{kötél}$ kötélerő:

iránya: csak húzni tudja a testet, kötéirányban;

nagysága: ugyanakkora az erő nagysága a köté két végén; akkora, hogy a test a köté hosszánál távolabbra nem kerülhet a köté rögzítési pontjától.

A testre rúd által kifejtett $F_{rúd}$ rúderő:

iránya: húzni és nyomni is tudja a testet, rúdirányban;

nagysága abból adódik, hogy a rúd hossza nem változhat.

Súrlódási erők**Csúszási súrlódási erő**

Szilárd felület és a hozzá képest mozgásban levő test között lép fel (a felületek között ható kémiai erők és a felületek érdessége miatt).

Nagysága: $F_s = \mu F_{ny}$, ahol:

F_{ny} a testre ható nyomóerő,

μ a csúszási súrlódási együttható;

iránya: a sebességgel ellentétes irányú.

Tapadási súrlódási erő

Szilárd felület és a hozzá képest nyugalomban levő test között lép fel, ha valamilyen külső erő el akarja mozdítani őket egymáshoz képest.

Nagysága: akkora, amekkora ahhoz szükséges, hogy a test nyugalomban maradjon,

de nem lehet nagyobb, mint $F_{t,max} = \mu_t F_{ny}$, ahol:

F_{ny} a testre ható nyomóerő,

μ_t a tapadási súrlódási együttható;

(ha ennél nagyobb erőre lenne szükség, akkor a test elkezd mozogni a felülethez képest);

iránya: a felülettel párhuzamos; ellentétes irányú azzal, amerre a többi külső erő eredője el akarja mozdítani a testet.

Kiegészítő anyag:

Gördülési ellenállás: $F_{gördülési} = \mu_{gördülési} F_{ny}$

Azonos felületek között $\mu_{gördülési} < \mu_{csúszási} < \mu_{tapadási}$.

Fontos megjegyezni, hogy a súrlódási erők közül egy időpontban mindig csak az egyik léphet fel! A test ugyanis vagy tapad, vagy csúszik, esetleg gördül; de ezek kizárják egymást, nem léphet fel egyszerre kettő közülük.

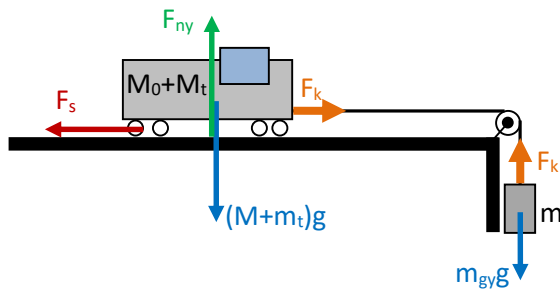
Közegellenállási erő

Fluidum (folyadék, gáz) és a hozzá képest mozgásban levő test között lép fel. Iránya: a sebességgel ellentétes irányú, nagysága függ a sebesség nagyságától.

FELADATOK

2A/1. A 2A/K1 kísérletben egy kiskocsit gyorsítottunk egy csigán átvett fonálon lógó tömeggel. A kiskocsiba az egyes kísérletekben különböző terhelő tömegeket tettünk. A fonál nyújthatatlan, a tömegét a kiskocsi tömegébe mértük bele.

Vezessük le, mekkora lesz a kiskocsi gyorsulása a kiskocsiba rakott terhelő tömeg és a függőlegesen lógó gyorsító tömeg függvényében!

Megoldás

A kiskocsi tömege M_0 , a bele rakott terhelő tömeg M_t . Ezt a két testet kezelhetjük egy testnek az egyenletek felírásakor, mert a terhelő tömeg nem mozdul el a kiskocsihoz képest. A függőlegesen lógó gyorsító test tömege m .

A kiskocsi mozgása vízszintes, a gyorsító tömegé függőleges irányú, de a sebességük nagysága meg kell egyezzen minden pillanatban, mert a fonál hossza állandó közöttük. Mivel a sebességük nagysága megegyezik, a gyorsulásuk nagysága is megegyezik. A testeket összekötő fonál ugyanakkora erővel hat mindkét testre, de az erő iránya változik a fonál irányát követve.

A kiskocsira felírhatjuk, hogy a rá ható függőleges erők eredője zérus kell legyen, és ebből tudjuk, hogy $F_{ny} = (M_0 + M_t) g$.

A kiskocsit fékezi a kerekek gördülési ellenállása, ez az erő a csúszási súrlódási erőhöz hasonlóan írható fel, nagysága a nyomóerő nagyságával arányos:

$$F_s = \mu F_{ny} = \mu (M_0 + M_t) g.$$

A gyorsulás meghatározásához fel kell írni

a kiskocsira ható vízszintes erők eredőjét:

$$(M_0 + M_t) a = F_k - F_s = F_k - \mu (M_0 + M_t) g ;$$

a gyorsító tehernél pedig a függőleges erők eredőjét:

$$m a = m g - F_k .$$

(Az előjeleket itt most annak megfelelően választottuk meg, hogy tudjuk, hogy merre mozognak a testek.)

A két egyenletet összeadva a kötélerő kiesik:

$$(M_0 + M_t + m) a = m g - \mu (M_0 + M_t) g,$$

és kifejezhető belőle a gyorsulás a tömegek függvényében:

$$a = \frac{m - \mu (M_0 + M_t)}{M_0 + M_t + m} g .$$

MEGJEGYZÉS: Az $(M_0 + M_t + m) a = m g - F_s$ egyenleten azt látjuk, hogy ha egy rendszernek tekintjük a testeket, akkor erre a rendszerre a rendszeren kívüli külső erők eredője $m g - F_s$. Természetesen nem csak ezek a külső erők hatnak a rendszerre, mert hat $(M_0 + M_t) g$ és F_{ny} is, de azok eredője zérus.

SZIMULÁCIÓK, VIDEÓK:

Vízszintes síkon gyorsított test súrlódással:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/forces-1d>

Lejtő, állítható súrlódási együtthatókkal:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ramp-forces-and-motion>

A tapadási súrlódási erő attól függ, hogy a felületek mekkora erővel nyomják egymást:

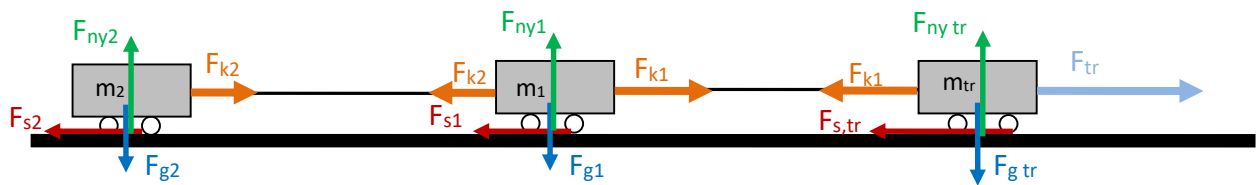
<http://www.videoman.gr/106419>

<https://www.youtube.com/watch?v=bgyrrjmavy4>

KIDOLGOZOTT GYAKORLÓ FELADAT

2A/2. Egy traktor két pótkocsit vontat nyújthatatlan drótkötelekkel. Mekkora a traktor húzóereje és mekkora erő feszíti a köteleket, ha indításnál a traktor 1 perc alatt egyenletesen gyorsít fel 43,2 km/h sebességre?

A traktor tömege 3 t, a pótkocsik tömege 2-2 t, a gördülő ellenállási együttható $\mu_g = 0,08$.

Megoldás

Adatok:

pótkocsik: $m_1 = m_2 = 2 \text{ t} = 2000 \text{ kg}$; traktor: $m_{tr} = 3 \text{ t} = 3000 \text{ kg}$;

$v_0 = 0$; $v_{vég} = 43,2 \text{ km/h} = 12 \text{ m/s}$; $\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$.

Milyen erők hatnak?

F_{tr} az út által az traktorra a mozgás irányába kifejtett erő:

irány a gyorsítás irányába mutat,
nagysága ismeretlen;

F_{k1} ill. F_{k2} a két kötél erő:

irány a kötélek irányában ható húzóerő,
nagysága ismeretlen;

$F_{g, tr}$, F_{g1} és F_{g2} a Föld által a traktorra, ill. pótkocsikra kifejtett nehézségi erő,

irány függőlegesen lefelé mutat,
nagysága $F_g = mg$;

$F_{ny, tr}$, F_{ny1} és F_{ny2} a talaj által a traktorra, ill. pótkocsikra kifejtett nyomóerő.

irány a talajra merőlegesen felfelé mutat,
nagysága akkora, amekkora ahhoz szükséges, hogy a test éppen a felületen mozogjon;

$F_{s, tr}$, F_{s1} és F_{s2} a gördülési súrlódási erő,

irány a mozgással ellentétes irányba mutat,
nagysága $F_s = \mu_g \cdot F_{ny}$.

Az erők egy része vízszintes, másik része függőleges. A kiszámolandó erők vízszintesek, de mivel a vízszintes súrlódási erők nagysága a függőleges nyomóerők nagyságától függ, először azokat kell tudnunk.

Mivel a testek a talajon mozognak, a függőleges erők eredője zérus kell legyen, hiszen nem lehet gyorsulásuk függőlegesen felfelé vagy lefelé → ebből tudjuk a nyomóerőket:

$$F_{ny, tr} = m_{tr} g, F_{ny1} = m_1 g, F_{ny2} = m_2 g.$$

A súrlódási erők nagysága így $F_s = \mu F_{ny} = \mu mg$ mindegyik testre:

$$F_{s tr} = \mu F_{ny tr} = \mu m_{tr} g; F_{s1} = \mu F_{ny1} = \mu m_1 g; F_{s2} = \mu F_{ny2} = \mu m_2 g.$$

Vízszintesen az x tengely pozitív irányának azt az irányt választjuk, amerre a traktor gyorsít → a súrlódási erők előjele mindig negatív.

A kötélrő egy-egy kötélt két végén egyenlő, de a két kötéltben eltérő nagyságú.

Fel fogjuk írni minden testre az $ma_x = \Sigma F_{ix}$ egyenletet.

Tudjuk, hogy a drótkötél nyújthatatlan, ezért a kocsik közötti távolság nem változhat, vagyis minden pillanatban megegyezik a sebességük, így mindhárom test (a két kocsi és a traktor) gyorsulása megegyezik (jelöljük ezt a_x helyett egyszerűen a -val):

$$\text{traktor: } m_{tr} a = F_{tr} - F_{k1} - F_{s tr}$$

$$\text{első pótkocsi: } m_1 a = F_{k1} - F_{k2} - F_{s1}$$

$$\text{második pótkocsi: } m_2 a = F_{k2} - F_{s2}$$

A súrlódási erők nagyságát behelyettesítve:

$$\text{traktor: } m_{tr} a = F_{tr} - F_{k1} - \mu m_{tr} g$$

$$\text{első pótkocsi: } m_1 a = F_{k1} - F_{k2} - \mu m_1 g$$

$$\text{második pótkocsi: } m_2 a = F_{k2} - \mu m_2 g$$

Ezekből sorra kiszámolhatók a kérdéses erők, ha ismerjük a gyorsulást.

A gyorsulást ki tudjuk abból számítani, hogy a traktor 1 perc alatt gyorsít fel álló helyzetből 43,2 km/h sebességre:

$$a = \Delta v / \Delta t = (43,2/3,6 - 0) / 60 = 12 / 60 = 0,2 \text{ m/s}^2.$$

Tehát az erők:

$$F_{k2} = m_2(a + \mu g) = 2000 \cdot (0,2 + 0,08 \cdot 10) = 2000 \text{ N},$$

$$F_{k1} = F_{k2} + m_1(a + \mu g) = (m_1 + m_2)(a + \mu g) = (2000 + 2000) \cdot (0,2 + 0,08 \cdot 10) = 4000 \text{ N},$$

$$F_{tr} = F_{k1} + m_{tr}(a + \mu g) = (m_1 + m_2 + m_{tr})(a + \mu g) = (2000 + 2000 + 3000) \cdot (0,2 + 0,08 \cdot 10) = 7000 \text{ N}.$$

MEGJEGYZÉSEK

➤ A drótkötelek tömegét elhanyagoltuk. Ha figyelembe kellene venni a tömegüket, akkor nem lenne igaz, hogy a két végükön ébredő erő megegyezik, hanem a kötelekre is fel kellene írni mozgásegyenletet és abból tudnánk kiszámolni az erőket.

➤ Vegyük észre, hogy a fenti feladatban a gyorsulás az egyes testekre felírt egyenletekből kifejezve

$$a = \frac{F_{tr} - (F_{k1} + F_{s tr})}{m_{tr}} = \frac{F_{k1} - (F_{k2} + F_{s1})}{m_1} = \frac{F_{k2} - F_{s2}}{m_2},$$

vagyis az egyes testekre az előre- ill. a hátrafelé ható erők különbsége arányos a tömegükkel (ugyanaz igaz kötelekre is).

➤ Tekintsük a 3 testet egy rendszernek és adjuk össze a 3 testre felírt mozgásegyenletet:

$$(m_{tr} + m_1 + m_2) a = F_{tr} - (F_{s tr} + F_{s1} + F_{s2})$$

Ekkor az F_{k1} , F_{k2} kötélrők kiesnek, mivel ők a 3 testből álló rendszerben belső erők.

A 3 testből álló rendszer gyorsulását a külső erők eredője határozza meg:

$$a = \frac{F_{tr} - (F_{s\ tr} + F_{s1} + F_{s2})}{m_{tr} + m_1 + m_2}.$$

➤ A függőleges komponensekre is felírhattuk volna az $ma_z = \Sigma F_{iz}$ egyenleteket pl. a pozitív irányt felfelé választva, és tudjuk, hogy $a_z = 0$ kell legyen:

$$\text{traktor: } m_{tr} a_{tr\ z} = -m_{tr} g + F_{ny\ tr} = 0$$

$$\text{első pótkocsi: } m_1 a_{1\ z} = -m_1 g + F_{ny1} = 0$$

$$\text{második pótkocsi: } m_2 a_{2\ z} = -m_2 g + F_{ny2} = 0$$

➤ Felírhatjuk a mozgásegyenleteket vektori alakban is: $m \mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}_i$:

$$\text{traktor: } m_{tr} \mathbf{a}_{tr} = m_{tr} \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny\ tr} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{s\ tr}$$

$$\text{első pótkocsi: } m_1 \mathbf{a}_1 = m_1 \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny1} + \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \mathbf{F}_{s1}$$

$$\text{második pótkocsi: } m_2 \mathbf{a}_2 = m_2 \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny2} + \mathbf{F}_{k2} + \mathbf{F}_{s2}$$