

1. Vízszintes síkon gurul egy  $m_k$  tömegű kiskocsi  $v_k$  sebességgel. Tomi, aki  $m_T$  tömegű, fel akarja gyorsítani a kiskocsi sebességét  $n$ -szeresére, ezért hátulról nekifut  $v_T$  sebességgel, felugrik rá, majd elrugaszkodik róla a menetiránnyal ellentétes irányba. A kiskocsi mozgása súrlódásmentesnek tekinthető.

$m_k$ ,  $v_k$ ,  $n$ ,  $m_T$  és  $v_T$  véletlenszerűen megadott értékek voltak.

Pl.  $m_k = 16$  kg,  $v_k = 1,8$  m/s,  $n = 2,3$ ,  $m_T = 26$  kg,  $v_T = 3,5$  m/s.

a) Mekkora lesz a kiskocsi sebessége, amikor Tomi felugrik rá?

Impulzus-megmaradást felírva:

$$m_k v_k + m_T v_T = (m_k + m_T) u_{\text{közös}} \rightarrow u_{\text{közös}} = (m_k v_k + m_T v_T) / (m_k + m_T)$$

Pl.  $u_{\text{közös}} = (16 \cdot 1,8 + 26 \cdot 3,5) / (16 + 26) = 2,852$  m/s.

b) Mekkora legyen Tomi sebessége a talajhoz képest, amikor leugrik a kiskocsiról?

Impulzus-megmaradást felírva a felugrás előtti és a leugrás utáni állapotokra:

$$m_k v_k + m_T v_T = m_k (n v_k) + m_T u_T \rightarrow u_T = (m_k v_k (1 - n) + m_T v_T) / m_T$$

Pl.  $u_T = (16 \cdot 1,8 \cdot (1 - 2,3) + 26 \cdot 3,5) / 26 = 2,06$  m/s.

c) kérdés: véletlenszerűen lettek elosztva az alábbi kérdések:

c) Mekkora a kiskocsi impulzusának változása, amikor Tomi felugrik rá?

$$\Delta p_{k,\text{fel}} = m_k (u_{\text{közös}} - v_k)$$

Pl.  $\Delta p_{k,\text{fel}} = 16 \cdot (2,852 - 1,8) = 16,84$  kgm/s.

c) Mekkora a kiskocsi impulzusának változása, amikor Tomi leugrik róla?

$$\Delta p_{k,\text{le}} = m_k (n v_k - u_{\text{közös}})$$

Pl.  $\Delta p_{k,\text{le}} = 16 \cdot (2,3 \cdot 1,8 - 2,852) = 20,60$  kgm/s.

c) Mekkora Tomi impulzusának változása, amikor felugrik a kiskocsira?

$$\Delta p_{T,\text{fel}} = m_T (u_{\text{közös}} - v_T)$$

Pl.  $\Delta p_{T,\text{fel}} = 26 \cdot (2,852 - 3,5) = -16,84$  kgm/s.

c) Mekkora Tomi impulzusának változása, amikor leugrik a kiskocsiról?

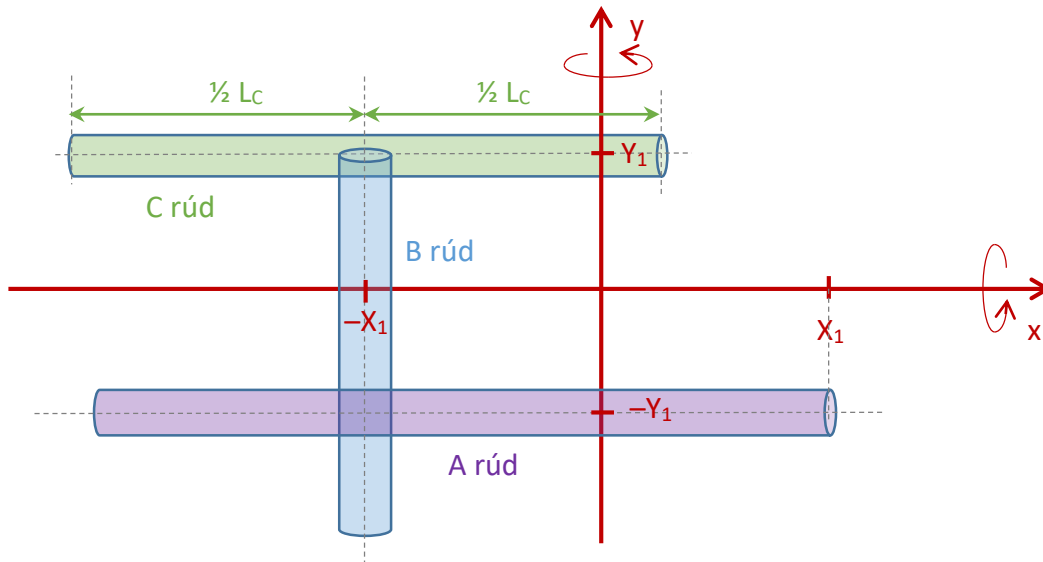
$$\Delta p_{T,\text{le}} = m_T (u_T - u_{\text{közös}})$$

Pl.  $\Delta p_{T,\text{le}} = 26 \cdot (2,06 - 2,852) = -20,60$  kgm/s.

c) Mekkora Tomi impulzusának változása a felugrás előtti kezdőállapotot és a leugrás utáni végállapotot összehasonlítva?

$$\Delta p_{T,\text{össz}} = m_T (u_T - v_T)$$

Pl.  $\Delta p_{T,\text{össz}} = 26 \cdot (2,06 - 3,5) = -37,44$  kgm/s.



2. Az ábrán látható szerkezet adatai:

A rúd hossza  $L_A$ , sugara  $r_A$ , tömege  $m_A$ ;

B rúd hossza  $L_B$ , sugara  $r_B$ , tömege  $m_B$ ;

C rúd hossza  $L_C$ , sugara  $r_C$ , tömege  $m_C$ ;

$X_1 = \dots$ ;  $Y_1 = \dots$ . A rudak homogén hengerek.

$L_A, L_B, L_C, r_A, r_B, r_C, m_A, m_B, m_C, X_1$  és  $Y_1$  véletlenszerűen megadott értékek voltak.

Pl.  $L_A = 47 \text{ cm} = 0,47 \text{ m}$ ;  $L_B = 131 \text{ cm} = 1,31 \text{ m}$ ;  $L_C = 7,9 \text{ cm} = 0,079 \text{ m}$ ;

$r_A = 6,9 \text{ cm} = 0,069 \text{ m}$ ;  $r_B = 4,5 \text{ cm} = 0,045 \text{ m}$ ;  $r_C = 6,8 \text{ cm} = 0,068 \text{ m}$ ;

$m_A = 14 \text{ kg}$ ;  $m_B = 16 \text{ kg}$ ;  $m_C = 2,4 \text{ kg}$ ;  $X_1 = 5,8 \text{ cm} = 0,058 \text{ m}$ ;  $Y_1 = 8,8 \text{ cm} = 0,088 \text{ m}$ .

a) Mennyi a három részből álló szerkezet tömegközéppontjának x koordinátája?

$$x_s = \frac{(X_1 - \frac{L_A}{2})m_A - X_1 m_B - X_1 m_C}{m_A + m_B + m_C}$$

$$x_s = \frac{(0,058 - \frac{0,47}{2}) \cdot 14 - 0,058 \cdot 16 - 0,058 \cdot 2,4}{14 + 16 + 2,4} = -0,1094 \text{ m} = -10,94 \text{ cm.}$$

b) Mennyi a három részből álló szerkezet tömegközéppontjának y koordinátája?

$$y_s = \frac{-Y_1 m_A + (Y_1 - \frac{L_B}{2})m_B + Y_1 m_C}{m_A + m_B + m_C}$$

$$y_s = \frac{-0,088 \cdot 14 + (0,088 - \frac{1,31}{2}) \cdot 16 + 0,088 \cdot 2,4}{14 + 16 + 2,4} = -0,3115 \text{ m} = -31,15 \text{ cm.}$$

c) kérdés: véletlenszerűen lettek elosztva az alábbi kérdések:

Rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontjára  $(1/3)mL^2$ , a felezőpontjára  $(1/12)mL^2$ ; henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére  $(1/2)mR^2$ .

c) Mekkora az A rúd tehetetlenségi nyomatéka az x tengelyre?

$$\Theta_{A,x} = \frac{1}{2} m_A r_A^2 + m_A Y_1^2$$

$$\Theta_{A,x} = 0,5 \cdot 14 \cdot 0,069^2 + 14 \cdot 0,088^2 = 0,1417 \text{ kgm}^2$$

c) Mekkora a B rúd tehetetlenségi nyomatéka az x tengelyre?

$$\Theta_{B,x} = \frac{1}{12} m_B L_B^2 + m_B (Y_1 - L_B/2)^2$$

$$\Theta_{B,x} = \frac{1}{12} \cdot 16 \cdot 1,31^2 + 16 \cdot (0,088 - 1,31/2)^2 = 7,432 \text{ kgm}^2$$

c) Mekkora a C rúd tehetetlenségi nyomatéka az x tengelyre?

$$\Theta_{C,x} = \frac{1}{2} m_C r_C^2 + m_C Y_1^2$$

$$\Theta_{C,x} = 0,5 \cdot 2,4 \cdot 0,068^2 + 2,4 \cdot 0,088^2 = 0,02413 \text{ kgm}^2$$

c) Mekkora az A rúd tehetetlenségi nyomatéka az y tengelyre?

$$\Theta_{A,y} = \frac{1}{12} m_A L_A^2 + m_A (X_1 - L_A/2)^2$$

$$\Theta_{A,y} = \frac{1}{12} \cdot 14 \cdot 0,47^2 + 14 \cdot (0,058 - 0,47/2)^2 = 0,6963 \text{ kgm}^2$$

c) Mekkora a B rúd tehetetlenségi nyomatéka az y tengelyre?

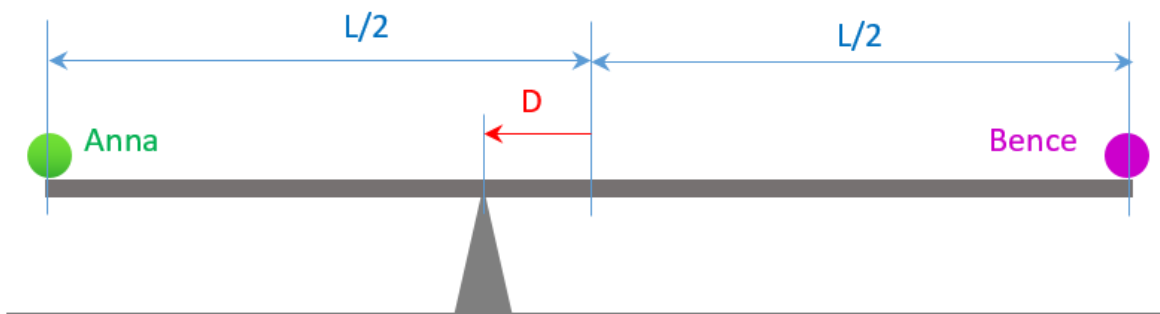
$$\Theta_{B,y} = \frac{1}{2} m_B r_B^2 + m_B X_1^2$$

$$\Theta_{B,y} = 0,5 \cdot 16 \cdot 0,045^2 + 16 \cdot 0,058^2 = 0,07002 \text{ kgm}^2$$

c) Mekkora a C rúd tehetetlenségi nyomatéka az y tengelyre?

$$\Theta_{C,y} = \frac{1}{12} m_C L_C^2 + m_C X_1^2$$

$$\Theta_{C,y} = \frac{1}{12} \cdot 2,4 \cdot 0,079^2 + 2,4 \cdot 0,058^2 = 0,009322 \text{ kgm}^2$$



3. Az ábrán látható mérleghinta rúdja egy olyan  $L$  hosszú,  $m_{\text{rúd}}$  tömegű inhomogén rúd, aminek a súlypontja a rúd felétől  $D$  távolságra van. A rudat a súlypontja alatt támasztjuk alá. A rúd vízszintes helyzetében a súlyponthoz közelebbi végére ül Anna, a másik oldalra Bence. Anna tömege  $m$ .  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

$L$ ,  $m_{\text{rúd}}$ ,  $D$  és  $m$  véletlenszerűen megadott értékek voltak.

Pl.  $L = 5,8 \text{ m}$ ;  $m_{\text{rúd}} = 38 \text{ kg}$ ;  $D = 0,52 \text{ m}$ ;  $m = 31 \text{ kg}$ .

a) Mekkora forgatónyomaték hat a rúd alátámasztási pontjára, ha Bence is  $m$  tömegű, és ő is a rúd végén ül? Előjeles választ kérünk (a pozitív irány az óramutató járásával ellentétes irány).

A nehézségi erők forgatónyomatékát kell kiszámolnunk. Mivel a rúd vízszintes helyzetű, ezért az erőkar egyenlő a gyerekek távolságával az alátámasztási ponttól, vagyis

Anna esetén  $k_A = L/2 - D$ , Bence esetén  $k_B = L/2 + D$ .

A forgatónyomaték Anna irányában pozitív, Bence irányában negatív, tehát

$$M = M_A - M_B = m_A g k_A - m_B g k_B = mg (L/2 - D) - mg (L/2 + D) = -2mg D$$

Pl.  $M = 31 \cdot 10 \cdot (5,8/2 - 0,52) - 31 \cdot 10 \cdot (5,8/2 + 0,52) = -2 \cdot 31 \cdot 10 \cdot 0,52 = -322,4 \text{ Nm}$ .

b) Mennyivel kellene közelebb csúsznia Annához az  $m$  kg-os Bencének, hogy a forgatónyomaték zérus legyen?

Mivel a gyerekek tömege egyenlő, akkor lesz zérus a forgatónyomaték, ha az erőkarok is megegyeznek. Anna távolsága az alátámasztástól  $k_A = L/2 - D$ , ennyi kell legyen Bence távolsága is. Kezdetben az ő távolsága  $k_B = L/2 + D$  volt, vagyis  $k_B - k_A = (L/2 + D) - (L/2 - D) = 2D$  távolsággal kell előrébb csúsznia.

Pl.  $k_A = 5,8/2 - 0,52 = 2,38 \text{ m}$ ;  $k_B = 5,8/2 + 0,52 = 3,42 \text{ m}$ ;  $3,42 - 2,38 = 1,04 \text{ m}$ .

c) Ha Bence a rúd végén ül, hány kg tömegűnek kellene lennie ahhoz, hogy a forgatónyomaték zérus legyen?

A forgatónyomaték felírását ld. az a) kérdésnél.

$$M = M_A - M_B = m_A g k_A - m_B g k_B = m_A g (L/2 - D) - m_B g (L/2 + D)$$

$$M = 0 \rightarrow m_B = m_A (L/2 - D) / (L/2 + D)$$

Pl.  $m_B = 31 \cdot (5,8/2 - 0,52) / (5,8/2 + 0,52) = 31 \cdot 2,38 / 3,42 = 21,57 \text{ kg}$ .

**d) kérdés: véletlenszerűen lett elosztva az alábbi két kérdés:**

**d)** Annától (vagyis a rúd Anna oldali végétől) milyen távolságra kellene alátámasztani a mérleghintát, hogy a forgatónyomaték zérus legyen, ha Bence is  $m$  tömegű, és ő is a rúd végén ül?

Ott kell alátámasztani, ahol a rúd és a két gyerek tömegközéppontja van. Ha az  $x$  tengelyt úgy vesszük fel, hogy az origó a rúd Anna oldali végénél van, akkor a kiszámolt  $x_s$  koordináta a kérdéses távolságot adja meg.

$$x_s = \frac{x_A m_A + x_B m_B + x_{rúd} m_{rúd}}{m_A + m_B + m_{rúd}} = \frac{0 \cdot m + L \cdot m + (L/2 - D) \cdot m_{rúd}}{2m + m_{rúd}}$$

$$\text{Pl. } x_s = \frac{5,8 \cdot 31 + (5,8/2 - 0,52) \cdot 38}{2 \cdot 31 + 38} = 2,702 \text{ m.}$$

**d)** Milyen messze kellene lennie a rúd súlypontjának a rúd közepétől, hogy zérus legyen a forgatónyomaték, ha Bence  $m$  kg-os és a rúd végén ül, és az alátámasztási pontot nem mozdítjuk el?

Az alátámasztás fölött kell lennie a rúd és a két gyerek tömegközéppontjának, és keressük a rúd súlypontját. Ha az  $x$  tengelyt úgy vesszük fel, hogy az origó a rúd közepénél van, és Anna irányába pozitív, akkor a kiszámolt  $x_{rúd}$  koordináta a kérdéses távolságot adja meg.

$$x_s = \frac{x_A m_A + x_B m_B + x_{rúd} m_{rúd}}{m_A + m_B + m_{rúd}} = \frac{L/2 \cdot m - L/2 \cdot m + x_{rúd} \cdot m_{rúd}}{2m + m_{rúd}} = D \rightarrow x_{rúd} = D (2m + m_{rúd}) / m_{rúd}$$

$$\text{Pl. } x_{rúd} = \frac{5,8/2 \cdot 31 - 5,8/2 \cdot 31 + x_{rúd} \cdot 38}{2 \cdot 31 + 38} = \frac{x_{rúd} \cdot 38}{2 \cdot 31 + 38} = 0,52 \rightarrow x_{rúd} = 0,52 \cdot (2 \cdot 31 + 38) / 38 = 1,368 \text{ m.}$$