

Fizika 1 - Mechanika számolási gyakorlat pót zh2 2023. jún. 1. megoldás

1. Vízszintes, súrlódásmentes síkon egy rugó végére 20 dkg tömegű golyót rögzítettünk. A rugó másik vége rögzítve van. A 40 cm-es rugó 16 cm-rel való kihúzásához 2 N erőre van szükség.

- a) Mekkora a rugóállandó? 0,5 p.
b) Mekkora munkát végeztünk a rugó kihúzásakor? 1 p.
A golyót elengedjük a 16 cm-es kihúzásról.
c) Mekkora lesz a rezgésidő? 1 p.
d) Mekkora a golyó maximális sebessége? 1 p.
e) Mekkora erővel hat a rugó a golyóra 4 s-mal a golyó elengedése után? 2 p.

Megoldás:

- a) $k = F/\Delta\ell = 2/0,16 = 12,5 \text{ N/m}$ 0,5 p.
b) Az általunk végzett munka a rugó által végzett munka -1 -szerese. A rugó által végzett munka
 $W = -\Delta E_{\text{pot}} = -(\frac{1}{2}kx_{\text{vég}}^2 - \frac{1}{2}kx_{\text{kezdeti}}^2) = \frac{1}{2}k(x_{\text{kezdeti}}^2 - x_{\text{vég}}^2) = 0,5 \cdot 12,5 \cdot (0 - 0,16^2) = -0,16 \text{ J}$,
tehát az általunk a rugóerő ellenében végzett munka $+0,16 \text{ J}$. 1 p.
c) $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{0,20/12,5} = 0,7948 \text{ s}$ 1 p.
d) $v_{\text{max}} = A\omega$; $A = |\Delta x(0)| = 0,16 \text{ m}$; $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{12,5/0,20} = 7,906 \text{ s}^{-1}$; $v_{\text{max}} = 1,265 \text{ m/s}$ 1 p.
e) $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0,16\cos(7,906t)$; $x(4) = 0,16\cos(7,906 \cdot 4) = 0,1566 \text{ m}$;
 $F = -kx$, tehát $F(4) = -k x(4) = -12,5 \cdot 0,1566 = -1,957 \text{ N}$;
vagy:
 $a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -0,16 \cdot 0,7906^2\cos(7,906t) = -10\cos(7,906t)$,
 $a(4) = -10\cos(7,906 \cdot 4) = -9,787 \text{ m/s}^2$; $F = ma$, tehát $F(4) = 0,20 \cdot (-9,787) = -1,957 \text{ N}$. 2 p.

2. A szekrény tetején, 2,2 m magasan van egy rugó vízszintes helyzetben. A rugó úgy van rögzítve, hogy alapállapotban a rugó vége éppen a szekrény széléig ér. Összenyomjuk a rugót 30 cm-rel és összekötjük egy kötéllel, ekkor a rugót 150 N erővel tartja a kötel összenyomva. Az összenyomott rugó elé teszünk egy 2,5 kg-os testet. Elvágjuk a kötelet, a rugó gyorsítja a testet és lelöki a szekrényről. A test egy 1 m magas asztalra esik rá. Töltse ki az alábbi táblázatot!

A súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható.

A helyzeti energiát a **padló szintjén** vegye nullának (onnan a szekrény teteje 2,2 m, az asztal lapja 1 m.)

Megoldás:

A rugóállandó: $k = F/\Delta\ell = 150/0,3 = 500 \text{ N/m}$

0,5 p.

A táblázatban be vannak számozva az állapotok, az energiák annak megfelelően vannak indexelve.

A test potenciális energiája $E_{\text{pot}} = mgh$:

a szekrény tetején $h_{123} = 2,2 \text{ m} \rightarrow E_{\text{pot,test,123}} = 2,5 \cdot 10 \cdot 2,2 = 55 \text{ J}$,

az asztal fölött 1 m-rel $h_4 = 2 \text{ m} \rightarrow E_{\text{pot,test,4}} = 2,5 \cdot 10 \cdot 2 = 50 \text{ J}$,

az asztalon $h_5 = 1 \text{ m} \rightarrow E_{\text{pot,test,5}} = 2,5 \cdot 10 \cdot 1 = 25 \text{ J}$.

A rugó potenciális energiája

30 cm-rel összenyomva $x_1 = 0,3 \text{ m} \rightarrow E_{\text{pot,rugó,1}} = \frac{1}{2}kx^2 = 0,5 \cdot 500 \cdot 0,3^2 = 22,5 \text{ J}$,

10 cm-rel összenyomva $x_2 = 0,1 \text{ m} \rightarrow E_{\text{pot,rugó,2}} = \frac{1}{2}kx^2 = 0,5 \cdot 500 \cdot 0,1^2 = 2,5 \text{ J}$,

az asztal szélénél $x_{345} = 0 \rightarrow E_{\text{pot,rugó,345}} = 0$.

A kezdeti állapotban $v_1 = 0 \rightarrow E_{\text{kin,1}} = 0$,

ebben az állapotban ki tudjuk számolni a mechanikai energiát:

$E_{\text{mech,1}} = E_{\text{pot,test,1}} + E_{\text{pot,rugó,1}} + E_{\text{kin,1}} = 55 + 22,5 + 0 = 77,5 \text{ J}$.

Mivel a súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható, ezért $E_{\text{mech}} = \text{konst.}$

0,5 p.

Ebből ki tudjuk számolni minden állapotra a mozgási energiát: $E_{\text{kin}} = E_{\text{mech}} - (E_{\text{pot,test}} + E_{\text{pot,rugó}})$.

		a test mozgási energiája [J]	a test + rugó rendszer potenciális energiája [J]	a test + rugó rendszer mechanikai energiája [J]		
1	amikor a rugó 30 cm-rel van összenyomva	0	$55+22,5 = 77,5$	77,5	2	
2	amikor a rugó 10 cm-rel van összenyomva	20	$55+2,5 = 57,5$	77,5	1,5	
3	amikor a test a szekrény szélére ér	22,5	$55+0 = 55$	77,5	1	
4	amikor a test 1 m-rel van magasabban az asztalnál	27,5	$50+0 = 50$	77,5	1	
5	amikor a test az asztalra érkezik	52,5	$25+0 = 25$	77,5	1	

3. Egy $m_1 = 2,4$ kg-os és egy $m_2 = 0,6$ kg-os test ütközik egymással egy vízszintes, súrlódásmentes síkon. Az m_1 test az ütközés helyére $2,5$ m/s sebességgel érkezett. Az ütközést tökéletesen rugalmatlannak tekinthetjük, az összekapcsolódott testek u sebességgel mozognak abba az irányba, amerre m_1 mozgott az ütközés előtt.

Töltse ki az alábbi táblázatot u kétféle értékére!

Az értékeket előjellel együtt adja meg, úgy, hogy **a pozitív irány m_1 sebességének iránya legyen.**

Megoldás:

Impulzus-megmaradással számolhatunk, mivel $\Sigma F_{\text{külső}} = 0$.

Az össz-impulzust az ütközés utáni állapotból tudjuk kiszámolni:

$$p_{\text{össz}} = (m_1 + m_2) u: \quad p_{\text{össz,A}} = (2,4+0,6) \cdot 2,3 = 6,9 \text{ kg m/s}; \quad p_{\text{össz,B}} = (2,4+3,6) \cdot 1,7 = 5,1 \text{ kg m/s}.$$

Ütközés előtt $p_1 = m_1 v_1 = 2,4 \cdot 2,5 = 6 \text{ kg m/s}$ és $p_2 = m_2 v_2 = 0,6 v_2$.

Impulzus-megmaradás:

$$p_1 + p_2 = p_{\text{össz}}: \quad 6 + 0,6v_2 = p_{\text{össz}}$$

$$\rightarrow v_2 = (p_{\text{össz}} - 6) / 0,6: \quad v_{2,A} = (6,9-6)/0,6 = 1,5 \text{ m/s}; \quad v_{2,B} = (5,1-6)/0,6 = -1,5 \text{ m/s}.$$

m_1 impulzusának változása az ütközés során

$$\Delta p_1 = m_1 (u - v_1): \quad \Delta p_{1,A} = 2,4(2,3-2,5) = -0,48 \text{ kg m/s}; \quad \Delta p_{1,B} = 2,4(1,7-2,5) = -1,92 \text{ kg m/s}$$

m_2 impulzusának változása az ütközés során

$$\Delta p_2 = m_2 (u - v_2): \quad \Delta p_{2,A} = 0,6(2,3-1,5) = 0,48 \text{ kg m/s}; \quad \Delta p_{2,B} = 0,6(1,7-(-1,5)) = 1,92 \text{ kg m/s},$$

de ezeket nem is kell így kiszámolni, mivel $\Delta p_2 = -\Delta p_1$ (mert $p_{\text{össz}} = \text{konst.}$)

A rendszer össz-energiája

$$E_{\text{kin,össz}} = E_{\text{kin,1}} + E_{\text{kin,2}}$$

Az ütközés előtt

$$E_{\text{kin,össz}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 0,5 \cdot 2,4 \cdot 2,5^2 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot v_2^2 = 7,5 + 0,3v_2^2:$$

$$E_{\text{kin,össz,A}} = 7,5 + 0,3 \cdot 1,5^2 = 8,175 \text{ J}; \quad E_{\text{kin,össz,B}} = 7,5 + 0,3 \cdot (-1,5)^2 = 8,175 \text{ J}.$$

Az ütközés után

$$E_{\text{kin,össz}} = \frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}m_2u^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2 = 0,5 \cdot (2,4 + 0,6) \cdot u^2 = 1,5 u^2:$$

$$E_{\text{kin,össz,A}} = 1,5 \cdot 2,3^2 = 7,935 \text{ J}; \quad E_{\text{kin,össz,B}} = 1,5 \cdot 1,7^2 = 4,335 \text{ J}.$$

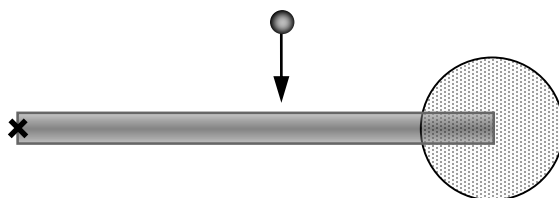
A mechanikai energia nem marad meg, mert az ütközés rugalmatlan (csökken a deformációs munka miatt).

	$u_A = 2,3 \text{ m/s}$	$u_B = 1,7 \text{ m/s}$		
a rendszer össz-impulzusa	6,9 kg m/s	5,1 kg m/s	1	
m_2 sebessége az ütközés előtt	1,5 m/s	-1,5 m/s	2	
m_1 impulzusának változása az ütközés során	-0,48 kg m/s	-1,92 kg m/s	1	
m_2 impulzusának változása az ütközés során	0,48 kg m/s	1,92 kg m/s	1	
a rendszer össz-energiája az ütközés előtt	8,175 J	8,175 J	1	
a rendszer össz-energiája az ütközés után	7,935 J	4,335 J	1	

4. Az 1,2 m hosszú, 0,8 kg tömegű rúd végéhez egy 10 cm sugarú, 0,2 kg tömegű korongot erősítettünk az ábrán látható módon. A rúd + korong rendszer a rúd másik végén átmenő, a rúdra merőleges tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat vízszintes síkban.

Tehetetlenségi nyomaték képletek:

rúd a felezőpontján átmenő, rúdra merőleges tengelyre	rúd a végpontján átmenő, rúdra merőleges tengelyre	henger, korong
$\frac{1}{12} m \ell^2$	$\frac{1}{3} m \ell^2$	$\frac{1}{2} m R^2$



- a) Milyen távol van a forgástengelytől a rúd + korong rendszer tömegközéppontja? 1,5 p.
 b) Mekkora a rúd + korong rendszer tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva? 2 p.
 c) Az ábra szerint egy 0,1 kg tömegű pici (tömegpontnak tekinthető) gyurmagolyót lökünk neki a rúd felezőpontjának. A rúdhöz érve a gyurmagolyó sebessége 8 m/s, és az ütközéskor a rúdra tapad. Mekkora szögsebességgel kezd forogni a rúd + korong + gyurmagolyó rendszer? 2,5 p.

Megoldás: $m_r = 0,8 \text{ kg}$, $\ell = 1,2 \text{ m}$, $m_k = 0,2 \text{ kg}$, $R = 0,1 \text{ m}$.

a) Legyen $x=0$ a forgástengelynél, így a kiszámolt x_s koordináta egyenlő lesz a tengelytől vett távolsággal. A rúd tömegközéppontja $x_r = \ell/2 = 1,2/2 = 0,6 \text{ m}$ -nél van, a korongé $x_k = \ell = 1,2 \text{ m}$ -nél.

$$x_s = (x_r m_r + x_k m_k) / (m_r + m_k) = (0,6 \cdot 0,8 + 1,2 \cdot 0,2) / (0,8 + 0,2) = 0,72 \text{ m}. \quad 1,5 \text{ p.}$$

b) A rúd a végpontja körül forog, tehát

$$\Theta_r = \frac{1}{3} m_r \ell^2 = \frac{1}{3} \cdot 0,8 \cdot 1,2^2 = 0,384 \text{ kg m}^2. \quad 0,5 \text{ p.}$$

Vagy: a rúd tömegközéppontja x_r távolságra van a tengelytől, tehát $d_r = x_r = 0,6 \text{ m}$,

$$\Theta_r = \frac{1}{12} m_r \ell^2 + m_r d_r^2 = \frac{1}{12} \cdot 0,8 \cdot 1,2^2 + 0,8 \cdot 0,6^2 = 0,096 + 0,288 = 0,384 \text{ kg m}^2.$$

A korong tömegközéppontja x_k távolságra van a tengelytől, tehát $d_k = x_k = 1,2 \text{ m}$,

$$\Theta_k = \frac{1}{2} m_k R^2 + m_k d_k^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,1^2 + 0,2 \cdot 1,2^2 = 0,001 + 0,288 = 0,289 \text{ kg m}^2. \quad 1 \text{ p.}$$

A rúd + korong rendszer tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{r+k} = \Theta_r + \Theta_k = 0,384 + 0,289 = 0,673 \text{ kg m}^2. \quad 0,5 \text{ p.}$$

c) Impulzusmomentum-megmaradással számolhatunk.

Ütközés előtt a

rúd + korong rendszer nyugalomban van, impulzusmomentuma zérus;

az $m = 0,1 \text{ kg}$ tömegű golyó $v = 8 \text{ m/s}$ sebességgel mozog, úgy, hogy a sebességén átmenő egyenes távolsága a forgástengelytől $k = \ell/2 = 0,6 \text{ m}$, tehát az impulzusmomentuma

$$L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = mvk = 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,048 \text{ kg m}^2/\text{s};$$

ennyi az össz-impulzusmomentum az ütközés előtt, $L_{\text{előtt}} = 0,048 \text{ kg m}^2/\text{s}$.

1 p.

Ütközés után a rúd + korong + gyurmagolyó rendszer forgó mozgást végez,

$$L_{\text{után}} = \Theta_{r+k+g} \omega.$$

A b)-ben kiszámolt Θ_{r+k} tehetetlenségi nyomatékhoz hozzá kell adni a gyurmagolyó tehetetlenségi nyomatékát. Az $m_g = 0,1 \text{ kg}$ tömegű golyó (tömegpont) távolsága a tengelytől $d_g = \ell/2 = 0,6 \text{ m}$.

$$\Theta_{r+k+g} = \Theta_{r+k} + \Theta_g = \Theta_{r+k} + m_g d_g^2 = 0,673 + 0,1 \cdot 0,6^2 = 0,673 + 0,036 = 0,709 \text{ kg m}^2/\text{s}. \quad 0,5 \text{ p.}$$

Tehát

$$L_{\text{előtt}} = L_{\text{után}}: mvk = \Theta_{r+k+g} \omega \quad 0,5 \text{ p.}$$

$$0,048 = 0,709 \omega \rightarrow \omega = 0,06770 \text{ s}^{-1}. \quad 0,5 \text{ p.}$$