Fizika 1 Mechanika számolási gyakorlat   zh2 megoldások   2025. ápr. 10.

1. Frici talált egy 30 cm hosszú rugót. Egyik végét rögzítette egy vízszintes, súrlódásmentes asztalon, összenyomta
12 cm-rel, és megmérte, hogy ehhez mennyi erőt kellett kifejtenie: 1,8 N-t. Ekkor odaszaladt a pár hete született kis sünikéje, és sajnálatos módon a rugó végébe gabalyodott. Frici ijedtében elengedte a rugót, és megbabonázva nézte, ahogy a süni összegömbölyödve harmonikus rezgőmozgásba kezdett a rugó végén. A süni tömege 7,5 dkg.

a) Számolja ki a rugóállandót! (1 p.)

b) Mennyi a rezgőmozgás periódusideje? (1 p.)

c) Milyen hosszú lesz a rugó 22 s múlva? (3 p.)

d) Mennyi a süni maximális sebessége? (1 p.)

Amikor a süni sebessége éppen a maximális sebességének a fele, akkor …

e) … mennyi a rugó megnyúlása? (Célszerű energia-megmaradással számolni.) (3 p.)

f) … mennyi a rugóban tárolt energia? (1,5 p.)

Megoldás:

$m = 0{,}075$ kg; $\ell_0 = 0{,}30$ m; $\Delta\ell_0 = x_0 = -0{,}12$ m (mert a rugó induláskor össze volt nyomva); $v_0 = 0$.

a) $k = |F/\Delta\ell_0| = |F/x_0| = 1 / 0{,}12 = 15$ N/m.

b) $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{0{,}075/15} = 0{,}4443$ s.

c) $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{15/0{,}075} = 10\sqrt{2} = 14{,}14\ \text{s}^{-1}$;

$A = |\Delta\ell_0| = |x_0| = 0{,}12$ m (mert $v_0 = 0$); $\varphi_0 = \pi$ (mert a rugó induláskor össze volt nyomva);

a kitérés $x(t) = 0{,}12 \cos(14{,}14t+\pi) = -0{,}12 \cos(14{,}14t)$;

$t^* = 22$ s-ban $x(22) = -0{,}12 \cos(14{,}14\cdot 22) = 0{,}1193$ m;

a rugó hossza $\ell(22) = \ell_0 + x(22) = 0{,}30 + 0{,}1193 = 0{,}4193$ m.

d) $v_{max} = A\,\omega = 0{,}12 \cdot 14{,}14 = 6\sqrt{2}/5 = 1{,}697$ m/s.

e1) Számolhatunk úgy, hogy felírjuk a $v(t)$ függvényt, abból meghatározzuk azt a t_1 időt, amikor $v(t_1) = v_{max}/2$, majd ezt az időt behelyettesítjük az $x(t)$ függvénybe:

$v(t) = 0{,}12\cdot 14{,}14 \sin(14{,}14t)$; $0{,}12\cdot 14{,}14 \sin(14{,}14t_1) = v_{max}/2 = 1{,}697/2 \rightarrow \sin(14{,}14t_1) = 0{,}5 \rightarrow$

$t_{11} = (\pi/6)/14{,}14 = 0{,}0370$ s $\rightarrow$ $x(t_{11}) = -0{,}12 \cos((\pi/6)/14{,}14\cdot 14{,}14) = -0{,}12 \cos(\pi/6) = -0{,}1039$ m, vagy

$t_{12} = (5\pi/6)/14{,}14 = 0{,}1851$ s $\rightarrow$ $x(t_{12}) = -0{,}12 \cos((5\pi/6)/14{,}14\cdot 14{,}14) = -0{,}12 \cos(5\pi/6) = +0{,}1039$ m.

e2) Vagy (mivel a súrlódás elhanyagolható) számolhatunk energia-megmaradással:

$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot,\ rugó} = ½\, mv^2 + ½\, kx^2 = \text{konst.}$

Az összes mechanikai energia kiszámolható az amplitúdó ismeretében:

$E_{mech} = ½\, k A^2 = 0{,}5\cdot 15\cdot 0{,}12^2 = 0{,}108$ J,

vagy a maximális sebességből:

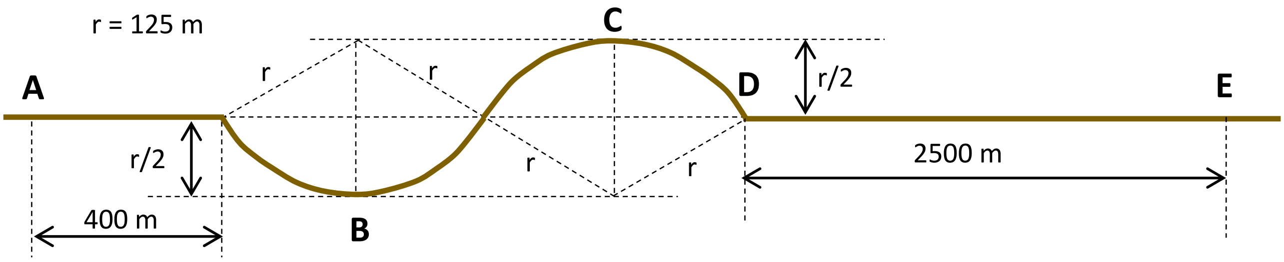
$E_{mech} = ½\, m\, v_{max}^2 = 0{,}5\cdot 0{,}075\cdot 1{,}697^2 = 0{,}108$ J.

Amikor $v = v_{max}/2$, akkor $E_{kin} = ½\, m\, (v_{max}/2)^2 = ¼\, [½\, m\, v_{max}^2] = ¼\, E_{mech} = 0{,}027$ J. Tehát ekkor

$E_{pot,\ rugó} = E_{mech} - E_{kin} = E_{mech} - ¼\, E_{mech} = ¾\, E_{mech} = 0{,}081 \text{ J} = ½\, k\, x^2 \quad\rightarrow\quad x = 0{,}1093$ m.

f) Ld. az **e2)** megoldást; vagy az **e1)** megoldás szerint kiszámolt x értéket kell behelyettesíteni az $E_{pot,\ rugó} = ½\, kx^2$ képletbe. Az eredmény $E_{pot,\ rugó} = 0{,}081$ J.

2. Almafalva és Eperfalva között légpárnás lökhajtásos kísérleti autókkal közlekednek az ott lakók, vagyis olyan autókkal, amik úgy haladnak az úton, hogy a súrlódás elhanyagolható, de a sebességüket tudják szabályozni. A múlt héten adták át az Almafalvát (**A**) Eperfalvával (**E**) összekötő új utat. Az ünnepélyes átadás másnapjára virradóan érdekes dolog történt: az eredetileg sík terepen keletkezett egy nagy gödör és egy nagy domb, mintha valakik (vagy valamik?) átkotorták volna a földet. Az ábrán látható a függőleges metszete annak, hogy mi alakult ki:



Akármi is történt, a 90 km/h-ás tábla volt kinn azon az útszakaszon, ezért Zsolt ezt a sebességet állította be, ezzel az állandó sebességgel ment végig az úton. Zsolt tömege az autójával együtt 600 kg.

a) Számolja ki, hogy a gödör legalsó pontjában (**B**), ill. a domb legfelső pontján (**C**) hányszorosára változik Zsoltnak + az autójának a súlya egy vízszintes úthoz képest! (4,5 p.)

b) Mennyi a mechanikai energiája Zsoltnak + az autójának a domb tetején (**C**), ha a nehézségi erő potenciális energiáját Almafalván (**A**) vesszük zérusnak? (2 p.)

c) Mennyi munkát végez Zsolt autója, amíg Zsolt + az autója Almafalvától (**A**) a domb tetejére jut? (Előjelhelyes választ kérünk, indoklással együtt.) (2 p.)

d) Ezeket a légpárnás autókat többé-kevésbé sík terepre tervezték, ezért sajnos Zsolt autója nem bírta ki azt a törést, ami a domb végénél van (**D**), a dombról leérkezve a földhöz csapódott, amitől a légpárna és a lökhajtás is elromlott, és onnantól kezdve tehetetlenül csúszott az úton. Ekkor az autó és a talaj közötti súrlódási együttható μ = 0,8 volt. A domb aljától, azaz a **D** ponttól milyen távolságra állt meg az autó? A feladatot munkatétellel oldja meg! (2 p.)

Megoldás:

a) Vízszintes úton Zsolt + autójának a súlya $F_{ny,A} = mg = 600 \cdot 10 = 6000$ N.

A gödör legalsó pontjában (**B**) F_{ny} és mg eredője felfelé mutat, mert arra van a körív középpontja:

$$F_{ny} - mg = m\,a_{cp} \quad \rightarrow \quad F_{ny,B} = m\,a_{cp} + mg.$$

A domb legfelső pontjában (**C**) F_{ny} és mg eredője lefelé mutat, mert arra van a körív középpontja:

$$mg - F_{ny} = m\,a_{cp} \quad \rightarrow \quad F_{ny,C} = mg - m\,a_{cp}.$$

A sebesség v = 90 km/h = 25 m/s $\rightarrow$ $a_{cp} = v^2/r = 25^2/125 = 5\ \mathrm{m/s^2}$, $m\,a_{cp} = 600 \cdot 5 = 3000$ N, tehát

a gödör legalsó pontjában (**B**)

$F_{ny,B} = 3000 + 6000 = 9000$ N, $F_{ny,B} / F_{ny,A} = 9000/6000 = 1{,}5$; azaz másfélszeresére nőtt;

a domb legfelső pontjában (**C**)

$F_{ny,c} = 6000 - 3000 = 3000$ N, $F_{ny,B} / F_{ny,A} = 3000/6000 = 0{,}5$; azaz a felére csökkent.

b) $E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = ½\, m\, v^2 + mgz$

$E_{kin} + E_{pot} = ½\, m\, v^2 = 0{,}5 \cdot 600 \cdot 25^2 = 187{,}5$ kJ,

a C pont magassága az A ponthoz képest $z = r/2 = 62{,}5$ m,

$E_{pot} = mgz = 600 \cdot 10 \cdot 62{,}5 = 375$ kJ,

$E_{mech} = 187{,}5 + 375 = 562{,}5$ kJ.

c) Munkatétel: $W_{össz} = \Delta E_{kin}$.

Jelen esetben $\Delta E_{kin} = 0$, mert az autó sebessége állandó.

$W_{össz} = W_g + W_{autó}$, tehát $W_{autó} = -W_g$.

$W_g = -\Delta E_{pot} = -(mgz_{vég} - mgz_{kezdő}) = mgz_{kezdő} - mgz_{vég} = mg\,z_A - mg\,z_C = -\,mg\,r/2 = -\,E_{pot} = -375$ kJ,

tehát az autó által végzett munka $W_{autó} = +375$ kJ.

d) Munkatétel: $W_{össz} = W_{súrl}$, csak a súrlódási erő végez munkát; $W_{súrl} = -F_s\,s = -\mu mg\,s$.

$\Delta E_{kin} = E_{kin,vég} - E_{kin,\,kezdő} = 0 - E_{kin,D} = -\,½\,m\,v^2 = -187{,}5$ kJ.

$W_{össz} = \Delta E_{kin}$: $-\mu mg\,s = -\,½\,m\,v^2 \;\rightarrow\; s = v^2 / (2\mu g) = 25^2 / (2\cdot 0{,}8\cdot 10) = 39{,}06$ m.

3. Barackfalván új körhintát állítottak fel. A körhinta kezelőjének azt az utasítást adták, hogy úgy állítsa be a fordulatszámot, hogy menet közben egy kört 5 s alatt tegyenek meg a benne ülők, a tervezők ugyanis figyelembe vették, hogy a kötelek nem bírnak el akármekkora erőt, 1000 N-nál nagyobb erő hatására elszakadnak. A körhinta kezelője tudta, hogy a mérnökök mindig valamekkora biztonsági tényezővel dolgoznak, ezért nem vette komolyan az 5 s-os periódusidőt. Egy alkalommal elhatározta, hogy 4 s-os periódusidőt fog beállítani. Kibírják ezt a kötelek, ha az ülésekben a maximálisan megengedett tömegű, 50 kg-os gyerekek ülnek? A kötelek hossza 8 m. (4 p.)

<u>Megoldás:</u>

A rajzot ld. az 5/9-es feladatnál.

A kötélerő és mg eredője vízszintesen $F_e = m\,a_{cp}$.

$a_{cp} = r\,\omega^2$; a körpálya sugara $r = \ell \sin\alpha$, $\omega = 2\pi/T \;\rightarrow\; a_{cp} = \ell \sin\alpha\,(2\pi/T)^2$,

ezekkel $F_e = m\,\ell \sin\alpha\,(2\pi/T)^2$.

A leggyorsabb megoldás az, ha azt írjuk fel, hogy

$F_e = F_{kötél} \sin\alpha$

$m\,\ell\,\cancel{\sin\alpha}\,(2\pi/T)^2 = F_{kötél}\,\cancel{\sin\alpha}$

ekkor a szöget nem is kell kiszámolni, mert kiesik. Tehát

$F_{kötél} = m\,\ell\,(2\pi/T)^2 = 50\cdot 8\cdot(2\pi/4)^2 = 987{,}0$ N.

Ha ezt nem vesszük észre, akkor:

a kötélerő $F_{kötél} = mg / \cos\alpha$;

az α szöget pedig abból tudjuk kifejezni, hogy az eredő erő $F_e = mg\,\mathrm{tg}\alpha$ és $F_e = m\,a_{cp}$,

tehát $mg\,\mathrm{tg}\alpha = m\,\ell \sin\alpha\,(2\pi/T)^2 \;\rightarrow\; \cancel{m}g\,(\cancel{\sin\alpha}/\cos\alpha) = \cancel{m}\,\ell\,\cancel{\sin\alpha}\,(2\pi/T)^2$.

Ebből kiszámolhatjuk α értékét: $\cos\alpha = (g/\ell)\,(T/2\pi)^2 = (10/8)\,(4/2\pi)^2 = 0{,}5066 \;\rightarrow\; \alpha = 59{,}56^o$.

De a szög kiszámolása helyett elég $1/\cos\alpha$-t kifejezni, amivel már kiszámolható $F_{kötél}$:

$1/\cos\alpha = (\ell/g)\,(2\pi/T)^2 \;\rightarrow\; F_{kötél} = m\cancel{g}\,(\ell/\cancel{g})\,(2\pi/T)^2 = m\,\ell\,(2\pi/T)^2 = 50\cdot 8\cdot(2\pi/4)^2 = 987{,}0$ N.

$F_{kötél} = 987{,}0$ N $< F_{max} = 1000$ N, a kötél tehát nem szakad el 4 s-os periódusidő esetén se.