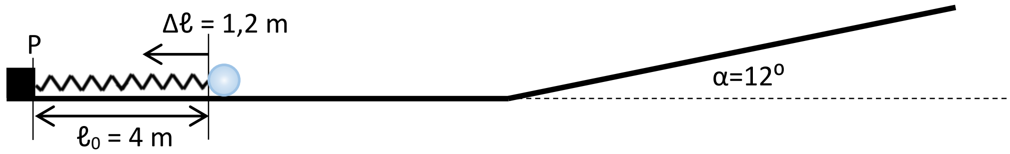
Fizika 1 - Mechanika számolási gyakorlat zh2 2024. máj. 16. megoldások

Andit és Bandit elvitték a szüleik a vurstliba.

1. Azt a játékot nézték ki, ahol egy vízszintes, $\ell_0 = 4$ m hosszú, 1200 N/m rugóállandójú rugó végéhez van rögzítve egy ülés. Miután valaki beleül, a rugót összenyomják $\Delta\ell = 1,2$ m-rel, majd hirtelen elengedik az ülést.



A rugó és az ülés tömege elhanyagolható, a vízszintes felület súrlódásmentesnek tekinthető.
Az ülésbe először Bandi ült bele, aki 28 kg-os.

a) Milyen távol lesz Bandi a rugó P rögzítési pontjától 4 s-mal az ülés elengedése után? (2 p.)

b) Mennyi lesz Bandi maximális sebessége? (0,5 p.)

c) Mennyi ideig tart 5 rezgés? (1 p.)

5 rezgés után az ülés lelökődik a rugó végéről abban a helyzetben, amikor a rugó éppen ℓ_0 hosszú és nő a hossza.

A súrlódásmentes sík felület egy kis görbülettel egy 12^o-os hajlásszögű lejtőben folytatódik.

d) Milyen magasra jut Bandi a lejtőn, ha a lejtő súrlódásmentes? (2 p.)

e) Milyen magasra jut Bandi a lejtőn, ha a lejtőn a csúszási súrlódási együttható 0,11? (2,5 p.)

f) Bandi után az ülésbe Andi ült bele, aki 32 kg-os. Ő milyen magasra jut a lejtőn, ha a lejtő súrlódásmentes? (Neki is $\Delta\ell = 1,2$ m-rel nyomták össze a rugót.) (1,5 p.)

Megoldás:

a) $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$\omega_B = \sqrt{k/m_B} = \sqrt{1200/28} = 6{,}547\ \mathrm{s}^{-1}$.

Mivel az összenyomott rugót kezdősebesség nélkül engedik el, azaz $v_0 = 0$, ezért az amplitúdó $A = \Delta\ell = 1,2$ m;
és mivel nem megnyújtott, hanem összenyomott állapotból indul a rezgőmozgás, ezért $\varphi_0 = \pi$.

($x_0 = -\Delta\ell = -1,2$ m, $v_0 = 0$ $\rightarrow$ $A = \sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2} = \sqrt{(-1{,}2)^2+0^2} = 1{,}2$ m,
$\mathrm{tg}\varphi_0 = -v_0/(x_0\omega) = 0$ $\rightarrow$ $\varphi_0 = 0$ ill. π; mivel $x_0 < 0$, ezért $\varphi_0 = \pi$)

Tehát $x(t) = 1{,}2\cos(6{,}547t + \pi) = -1{,}2\cos(6{,}547t)$ [m].

t = 4 s-ban $x(4) = -1{,}2\cos(6{,}547\cdot 4) = -0{,}5935$ m,

Bandi távolsága a rugó rögzítési pontjától (vagyis a rugó hossza) $\ell(4) = \ell_0 + x(4) = 4 - 0{,}5935 = 3{,}406$ m.

b) $v_{max,B} = A\omega_B = 1{,}2\cdot 6{,}547 = 7{,}856$ m/s.

c) $T = 2\pi/\omega_B = 2\pi\sqrt{m_B/k} = 2\pi/6{,}547 = 0{,}9598$ s; $5T = 4{,}799$ s.

d) Tudjuk Bandi sebességét, ami nem változik a vízszintes súrlódásmentes síkon: $v_{max,B} = 7{,}856$ m/s.

A súrlódásmentes lejtőn energiamegmaradással számolhatunk: $E_{mech} = ½mv^2 + mgz = \text{konst.}$

$½\, m_B v_{max,B}^2 + 0 = 0 + m_B g h_{max,B,0}$ $\rightarrow$ $h_{max,B,0} = v_{max,B}^2/(2g) = 3{,}086$ m.

Egyébként számolhatjuk Bandi maximális sebességét is energiamegmaradással: $E_{mech} = ½mv^2 + ½kx^2 = \text{konst.}$

$½\, k A^2 + 0 = 0 + ½\, m_B v_{max,B}^2$ $\rightarrow$ $v_{max,B} = \sqrt{kA^2/m_B} = \sqrt{1200\cdot 1{,}2^2/28} = 7{,}856$ m/s;

illetve a maximális magasságot számolhatjuk közvetlenül a rugóban tárolt energiából: $E_{mech} = ½kx^2 + mgz = \text{konst.}$

$½\, k A^2 + 0 = 0 + m_B g h_{max,B,0}$ $\rightarrow$ $h_{max,B,0} = kA^2/(2m_B g) = 1200\cdot 1{,}2^2/(2\cdot 28\cdot 10) = 3{,}086$ m.

e) Ha fellép csúszási súrlódási erő, akkor munkatétellel számolhatunk: $W_{össz} = \Delta E_{kin}$.

A nehézségi erő által végzett munka $W_g = -m_B g h_{max,B,\mu}$ (negatív, mert felfelé mozog, az erő ellenében),

a lejtő által kifejtett nyomóerő által végzett munka $W_{ny} = 0$,

a súrlódási erő által végzett munka $W_s = -F_s \cdot s = -\mu m_B g \cos\alpha \cdot (h_{max,B,\mu} / \sin\alpha)$,

tehát

$-m_B g h_{max,B,\mu} - \mu m_B g \cos\alpha \cdot h_{max,B,\mu} / \sin\alpha = 0 - ½\, m_B v_{max,B}^2$

$h_{max,B,\mu}\, g\,(1 + \mu/\mathrm{tg}\alpha) = ½\, v_{max,B}^2$ $\rightarrow$ $h_{max,B,\mu} = 7{,}856^2 / (2\cdot 10\cdot(1+0{,}11/\mathrm{tg}12°)) = 2{,}033$ m.

f) Andinak kisebb lesz a maximális sebessége, ezért ő nem jut fel ugyanolyan magasra, mint Bandi.

Andi esetében $\omega_A = \sqrt{k/m_A} = \sqrt{1200/32} = 6{,}124\ s^{-1}$ és $v_{max,A} = A\,\omega_A = 1{,}2 \cdot 6{,}124 = 7{,}348$ m/s;

vagy energiamegmaradásból: $v_{max,A} = \sqrt{kA^2/m_A} = \sqrt{1200 \cdot 1{,}2^2/32} = 7{,}348$ m/s.

Az energiamegmaradás a sebességet felhasználva

$$½\, m_A\, v_{max,A}^2 + 0 = 0 + m_A\, g\, h_{max,A,0} \quad \rightarrow \quad h_{max,A,0} = v_{max,A}^2/(2g) = 7{,}348^2/20 = 2{,}7\text{ m},$$

illetve a rugóban tárolt energiát felhasználva

$$½\, k\, A^2 + 0 = 0 + m_A\, g\, h_{max,A,0} \quad \rightarrow \quad h_{max,A,0} = kA^2/(2m_A g) = 1200 \cdot 1{,}2^2/(2 \cdot 32 \cdot 10) = 2{,}7\text{ m}.$$

2. Bandi (28 kg) meglátott egy gördeszkázó uszkárt, és felült mellé a gördeszkára. 4 m/s sebességgel mentek, amikor az uszkár úgy döntött, hogy leugrik a gördeszkáról. Az uszkár leugrásakor Bandi a gördeszkával felgyorsult 5 m/s-ra. A gördeszka tömege 12 kg, az uszkáré 8 kg. Pozitív iránynak tekintsük a gördeszka sebességét.

a) Mekkora volt a leugráskor az uszkár sebessége a gördeszkához képest? (1,5 p.)

b) Mennyi volt a Bandi + gördeszka + uszkár rendszer energiaváltozása az uszkár leugrásakor? (1,5 p.)

Az uszkár leugrása után hirtelen ott termett egy 20 kg-os labrador, aki felugrott Bandi mellé a gördeszkára, úgy, hogy ettől éppen megálltak.

c) Mennyi volt a labrador sebessége a talajhoz képest a felugrás előtt? (1 p.)

d) Mennyi volt Bandi impulzusváltozása a labrador felugrásakor? (1 p.)

Megoldás:

a) Impulzus-megmaradással

$$(28+12+8) \cdot 4 = (28+12) \cdot 5 + 8 \cdot (4 + v_{rel}) \quad \rightarrow \quad v_{rel} = -5\text{ m/s},$$

az uszkár hátrafelé ugrott, a sebessége a gördeszkához képest –5 m/s, a talajhoz képest 4–5 = –1 m/s volt.

b) Az uszkár leugrása előtt

$$E_{kin,0} = ½\,(28+12+8) \cdot 4^2 = 384\text{ J},$$

az uszkár leugrása után

$$E_{kin,1} = ½\,(28+12) \cdot 5^2 + ½\, 8 \cdot (4-5)^2 = 504\text{ J},$$

az energia-változás

$$\Delta E_{kin} = E_{kin,1} - E_{kin,0} = 504 - 384 = 120\text{ J}$$ (pozitív, a leugráskor az uszkár munkát végzett)

c) Impulzus-megmaradással

$$(28+12) \cdot 5 + 20 \cdot v_{labrador} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{labrador} = -10\text{ m/s}.$$

d) A labrador felugrása előtt Bandi impulzusa

$$p_1 = 28 \cdot 5 = 140\text{ kg m/s},$$

a labrador felugrása után $p_2 = 0$,

az impulzusváltozás

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 0 - 140 = -140\text{ kg m/s}.$$

3. Meglátták egy állatidomárt, aki a hörcsögét és a kígyóját rátette egy olyan mérleghintára, aminek a 8 kg tömegű, homogén sűrűségű, ℓ = 2,4 m hosszú rúdja nem a közepe alatt volt alátámasztva, hanem onnan 15 cm-re.

A hörcsögöt pontszerűnek tekinthetjük, ő a hosszabbik oldalon ült a rúd végétől ℓ/4 távolságra.

A kígyó egy 0,6 m hosszú, 5 cm átmérőjű hengernek tekinthető, ő a rövidebbik oldalon feküdt úgy, hogy a közepe a rúd végtől ℓ/4 távolságra volt. A kígyó tömege 3,5 kg.

A mérleghinta ebben az állapotban éppen ki volt egyensúlyozva.

a) Mennyi a hörcsög tömege? (3 p.)

b) Mennyi a rúd + kígyó + hörcsög tehetetlenségi nyomatéka a rúd alátámasztási pontjára? (3 p.)

c) Mekkora szögsebességgel kezdene el forogni a mérleghinta az állatokkal, ha a rúd végére a hörcsög felőli oldalon ráesne 4 m/s nagyságú függőleges sebességgel egy 1 kg-os nyúl, akit jó közelítéssel egy 30 cm sugarú gömbnek tekinthetünk? (A nyúl rugalmatlanul ütközne a mérleghintával.) (2,5 p.)

d) Ha nem potyognának nyulak az égből, viszont a kígyó megunná a produkciót, és ezért elkezdene lemászni a mérleghintáról, mekkora forgatónyomaték hatna a rúd + kígyó + hörcsög rendszerre akkor, amikor a feje éppen a rúd végéhez érkezik? (2 p.)

Megoldás:

a) Az ábrán pirossal be van jelölve mindhárom test tömegközéppontjának távolsága a forgástengelytől, ami egyúttal az x tengely origója. Az egyes alkotó testek tömegközéppontjainak koordinátái tehát:

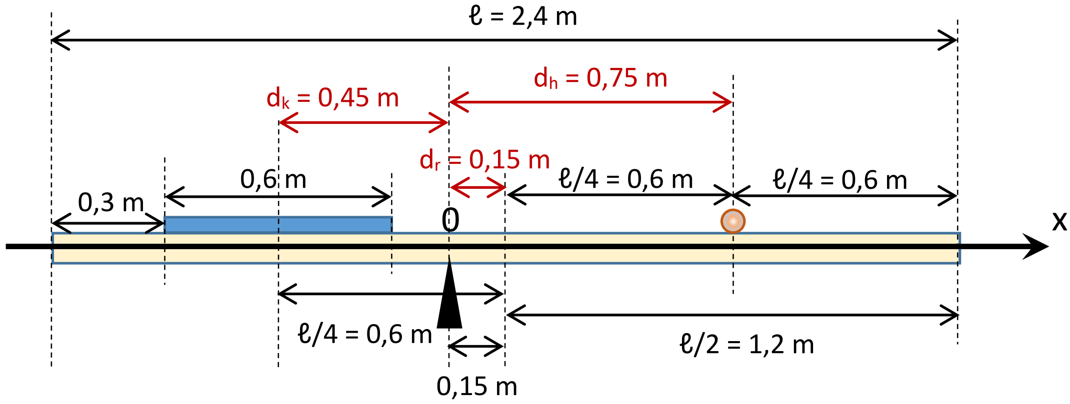
mérleghinta rúdja: $x_{rúd} = +0{,}15$ m,

kígyó: $x_{kígyó} = -0{,}45$ m,

hörcsög: $x_{hörcsög} = +0{,}75$ m.

A rendszer tömegközéppontja az alátámasztásnál van, tehát $x_s = 0$.

$x_s = \Sigma(m_i x_i) / \Sigma m_i$: $0 = (8 \cdot 0{,}15 + 3{,}5 \cdot (-0{,}45) + m_{hörcsög} \cdot 0{,}75) / (8 + 3{,}5 + m_{hörcsög}) \rightarrow m_{hörcsög} = 0{,}5$ kg.



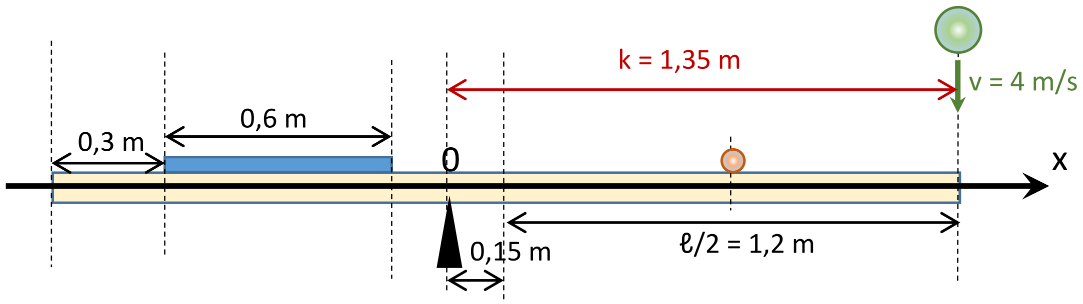
b) A mérleghinta rúdja: $\Theta_{rúd} = \frac{1}{12} m_{rúd} L_{rúd}^2 + m_{rúd} d_{rúd}^2 = \frac{1}{12} 8 \cdot 2{,}4^2 + 8 \cdot 0{,}15^2 = 3{,}84 + 0{,}18 = 4{,}02$ kg m^2,

a kígyó: $\Theta_{kígyó} = \frac{1}{12} m_{kígyó} L_{kígyó}^2 + m_{kígyó} d_{kígyó}^2 = \frac{1}{12} 3{,}5 \cdot 0{,}6^2 + 3{,}5 \cdot (-0{,}45)^2 = 0{,}105 + 0{,}70875 = 0{,}81375$ kg m^2,

a hörcsög: $\Theta_{hörcsög} = m_{hörcsög} d_{hörcsög}^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}28125$ kg m^2,

összesen a rúd + kígyó + hörcsög rendszeré: $\Theta_{rkh} = 4{,}02 + 0{,}81375 + 0{,}28125 = 5{,}115$ kg m^2.

c) Impulzusmomentum-megmaradással, L = konst.:



Ütközés előtt a nyúl impulzusa $p_{nyúl} = m_{nyúl} v_{nyúl} = 1 \cdot 4 = 4$ kg m/s, és forgástengelyre $k = 1{,}35$ m, tehát

$L_{előtt} = p_{nyúl}\, k = 4 \cdot 1{,}35 = 5{,}4$ kg m^2/s.

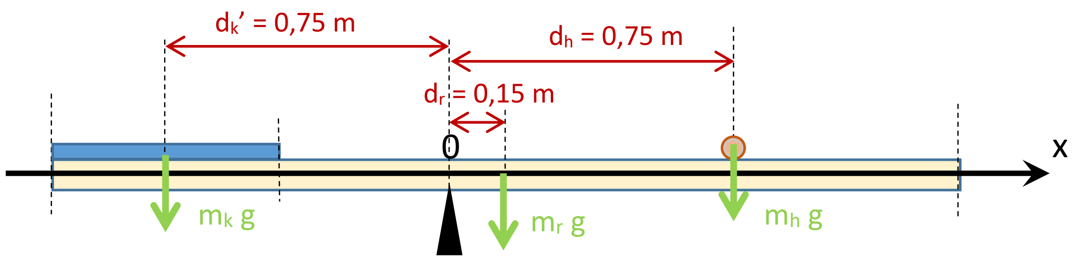
Ütközés után a nyúl is rajta lesz a mérleghintán, megváltozik a tehetetlenségi nyomaték.

A nyúl tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_{nyúl} = \frac{2}{5} m_{nyúl} R^2 + m_{nyúl} k^2 = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 0{,}3^2 + 1 \cdot 1{,}35^2 = 0{,}036 + 1{,}8225 = 1{,}8585$ kg m^2,

$\Theta_{rkh+nyúl} = 5{,}115 + 1{,}8585 = 6{,}9735$ kg m^2.

$L_{előtt} = L_{után}$: $m_{nyúl} v_{nyúl}\, k = \Theta_{rkh+nyúl}\, \omega$: $5{,}4 = 6{,}9735\, \omega \rightarrow \omega = 0{,}7744$ s^{-1}.

d) Az eredő forgatónyomaték a kígyóra, a rúdra és a hörcsögre ható forgatónyomatékok összege.



$M_{kígyó} = m_{kígyó}\, g\, d_{kígyó}' = 3{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}75 = 26{,}25$ Nm (pozitív, mert balra forgat),

$M_{rúd} = m_{rúd}\, g\, d_{rúd} = -8 \cdot 10 \cdot 0{,}15 = -12$ Nm (negatív, mert jobbra forgat),

$M_{hörcsög} = m_{hörcsög}\, g\, d_{hörcsög} = -0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}75 = -3{,}75$ Nm (negatív, mert jobbra forgat),

az eredő

$M_{össz} = 26{,}25 - 12 - 3{,}75 = +10{,}5$ Nm (balra).