

Körpálya és munkatétel: **A/1.** és **B/4.**

A/1. Jerry menekül Tom elől, fel akar jutni a 2,4 m magas szekrény tetejére. A szekrény pont olyan magas, ameddig a csillár lelóg, ezért a szekrényt odatolta a csillár alá, majd egy polcon felmászott egészen a plafonig, és ott magához húzta a csillárt, úgy, hogy annak a kötele vízszintesen kifeszült. Rákapaszkodott a csillárra, és a plafonról lefelé elrugaszkodott, így induláskor 2,6 m/s volt a kezdősebessége lefelé. Amikor a csillár éppen függőleges helyzetben a szekrény fölé ért, elengedte a csillárt, és a szekrény tetején csúszott tovább. Jerry tömege 8 dkg. A csillár kiterjedése elhanyagolható (pontszerűnek tekinthető), a tömege 40 dkg; a kötele nyújthatatlan és elhanyagolható tömegű, a kötél hossza 80 cm. Jerry és a szekrény teteje közti csúszási súrlódási együttható 0,40.

- a)** Mekkora volt Jerry gyorsulásának nagysága induláskor, amikor 2,6 m/s sebességgel elindult a plafontól a csillárral? 2 p.
b) Legalább mekkora erőt kell kibírnia a csillár kötelének, hogy ne szakadjon le Jerryvel és a csillárral? 2 p.
c) Mekkora távolságon veszti el a sebességét Jerry a szekrény tetején? 2 p.
d) Mekkora volt Jerry sebessége ennek a távolságnak a felénél? 1 p.

B/4. Csőrike kalitkája a 3,2 m magasságban lévő plafonhoz van rögzítve. Szilveszter felmászott a polcra és ott magához húzta a kalitkát (benne Csőrikével), úgy, hogy annak a kötele vízszintesen kifeszült, majd ebben a helyzetben 2,6 m/s kezdősebességgel meglökte lefelé a kalitkát. Amikor a kötél éppen függőleges helyzetbe ért, akkor éppen a kalitka alatt volt egy szekrény. Csőrike ott kiesett a kalitkájából, és a szekrény tetején csúszott tovább.

Csőrike (8 dkg) és a szekrény teteje közti csúszási súrlódási együttható 0,40.

A kalitka kiterjedése elhanyagolható (pontszerűnek tekinthető), a tömege 40 dkg; a kötele nyújthatatlan és elhanyagolható tömegű, a kötél hossza 80 cm.

- a)** Mekkora volt Csőrike gyorsulásának nagysága induláskor, amikor 2,6 m/s sebességgel elindult a plafontól a kalitkával? 2 p.
b) Legalább mekkora erőt kell kibírnia a kalitka kötelének, hogy ne szakadjon le Csőrikével és a kalitkával? 2 p.
c) Mekkora távolságon veszti el a sebességét Csőrike a szekrény tetején? 2 p.
d) Mekkora volt Csőrike sebessége ennek a távolságnak a felénél? 1 p.

a) A kiinduló helyzetben $a_{cp,0} = v_0^2/R = 2,6^2/0,8 = 8,45 \text{ m/s}^2$ a centripetális gyorsulás sugár irányban befelé, és $a_{t,0} = g = 10 \text{ m/s}^2$ az érintő irányú gyorsulás, vagyis Jerry / Csőrike gyorsulása

$$a_0 = \sqrt{a_{cp,0}^2 + a_{t,0}^2} = 13,09 \text{ m/s}^2.$$

b) Az alsó, függőleges helyzetben lesz a legnagyobb a kötélerő, ekkor

$$Ma_{cp} = F_{kötél} - Mg \rightarrow F_{kötél} = Ma_{cp} + Mg$$

a_{cp} kiszámolásához tudnunk kell a v_1 sebességet a legalsó pontban, amit energia-megmaradással számolhatunk az induló helyzettel összehasonlítva:

$$\frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv_1^2 - MgR \rightarrow v_1^2 = v_0^2 + 2gR \rightarrow a_{cp} = v_0^2/R + 2g$$

Tehát $F_{kötél} = Ma_{cp} + Mg = M(v_0^2/R + 2g) + Mg = M(v_0^2/R + 3g)$.

$M = 0,08 + 0,40 = 0,48 \text{ kg}$; $v_1^2 = 22,76 \text{ (m/s)}^2$; $v_1 = 4,771 \text{ m/s}$; $F_{kötél} = 18,46 \text{ N}$.

c) Munkatétellel számolhatjuk, mekkora úton veszíti el a kiinduló sebességét a súrlódás miatt.

A kiinduló sebesség a körpálya legalsó pontjához tartozó sebesség, azaz $v_1 = 4,771 \text{ m/s}$. $\mu = 0,40$.

$$W_{\text{össz}} = \Delta E_{\text{kin}} : -\mu mg \cdot s = 0 - \frac{1}{2} mv_1^2 \rightarrow s = v_1^2 / (2\mu g) = 2,845 \text{ m}.$$

d) Munkatétellel:

$$-\mu mg \cdot (s/2) = \frac{1}{2} mv_{(s/2)}^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \rightarrow v_{(s/2)}^2 = v_1^2 - \mu g \cdot s = v_1^2 - \mu g \cdot v_1^2 / (2\mu g) = \frac{1}{2} v_1^2$$

vagyis $v_{(s/2)} = v_1 / \sqrt{2} = 3,373 \text{ m/s}$.

A/2. és B/3.

A/2. Tomnak menekülnie kell, mert Spike üldözi. Nagy szél is fúj közben, amit a megfelelően felvett koordináta-rendszerben a következő függvény ír le:

$$\mathbf{F} = (2y - yz - z^2) \mathbf{i} + (2x - xz) \mathbf{j} - x(2z + y) \mathbf{k} \text{ [N]}$$

Tom menekülés közben egyenes úton a $P_0(3; 2; 6)$ [m] pontból a $P_1(5; 2; 7,5)$ [m] pontba futott, de ott észrevette, hogy már a levegőben szalad, ezért hirtelen irányt változtatott, és P_1 -ből egyenes úton a $P_2(3; 2; 9)$ [m] pontba szaladt tovább. (Ott elfogyott a lendülete, és hirtelen lezuhant...)

- a)** Konzervatív-e a szél által Tomra kifejtett erő? 1,5 p.
b) Mekkora munkát végzett Tom a szél ellenében a $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2$ úton? 3,5 p.

B/3. Szilveszternek menekülnie kell, mert Hektor üldözi. Nagy szél is fúj közben, amit a megfelelően felvett koordináta-rendszerben a következő függvény ír le:

$$\mathbf{F} = (4y - z(z + y)) \mathbf{i} + (4x - xz) \mathbf{j} - (xy + 2xz) \mathbf{k} \text{ [N]}$$

Szilveszter menekülés közben egyenes úton a $P_0(3; 2; 6)$ [m] pontból a $P_1(1; 2; 7,5)$ [m] pontba futott, de ott észrevette, hogy már a levegőben szalad, ezért hirtelen irányt változtatott, és P_1 -ből egyenes úton a $P_2(3; 2; 9)$ [m] pontba szaladt tovább. (Ott elfogyott a lendülete, és hirtelen lezuhant...)

- a)** Konzervatív-e a szél által Szilveszterre kifejtett erő? 1,5 p.
b) Mekkora munkát végzett Szilveszter a szél ellenében a $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2$ úton? 3,5 p.

a) A/2. $\mathbf{F} = (2y - yz - z^2) \mathbf{i} + (2x - xz) \mathbf{j} - x(2z + y) \mathbf{k}$ [N]

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y - yz - z^2 & 2x - xz & -2xz - xy \end{vmatrix} = \\ &= (-x - (-x))\mathbf{i} - ((-2z - y) - (-y - 2z))\mathbf{j} + (2 - z - (2 - z))\mathbf{k} = \mathbf{0} ; \text{ konzervatív.} \end{aligned}$$

B/3. $\mathbf{F} = (4y - z(z + y)) \mathbf{i} + (4x - xz) \mathbf{j} - (xy + 2xz) \mathbf{k}$ [N]

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4y - z^2 - yz & 4x - xz & -xy - 2xz \end{vmatrix} = \\ &= (-x - (-x))\mathbf{i} - ((-y - 2z) - (-2z - y))\mathbf{j} + (4 - z - (4 - z))\mathbf{k} = \mathbf{0} ; \text{ konzervatív.} \end{aligned}$$

b) Mivel az erőter konzervatív \rightarrow

\rightarrow létezik potenciálfüggvény:

A/2. $E_{\text{pot}} = xyz + xz^2 - 2xy$

B/3. $E_{\text{pot}} = xyz + xz^2 - 4xy$

amivel a szél által végzett munka $W_{P_0, P_2} = -\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(P_0) - E_{\text{pot}}(P_2) = E_{\text{pot}}(3; 2; 6) - E_{\text{pot}}(3; 2; 9)$

A/2. $W_{P_0, P_2} = 132 - 285 = -153 \text{ J}$

B/3. $W_{P_0, P_2} = 120 - 273 = -153 \text{ J}$

tehát a szél ellenében 153 J munkát kell végezni.

VAGY: \rightarrow választhatunk egyszerűbb utat, mint a fenti két szakaszból összetett út.

Jelen esetben a P_1 pontot kihagyhatjuk, és mivel a P_0 és P_2 pontoknak csak a z koordinátája tér el, ezért a z tengellyel párhuzamos úton számolunk (tehát $dx = dy = 0$). Mindkét csoportnak

$$W_{P_0, P_2} = \int_{(3,2,6)}^{(3,2,9)} \mathbf{F}_z \cdot d\mathbf{z} = \int_{(3,2,6)}^{(3,2,9)} (-xy - 2xz) dz = \int_6^9 (-3 \cdot 2 - 2 \cdot 3z) dz = -6 \int_6^9 (1 + z) dz = \dots = -153 \text{ J}$$

Természetesen kiszámolható a munka az eredeti útként megadott vonalintegrállal is.

Rezgőmozgás: **A/3.** ill. **B/1.**

A/3. Tomnak végre sikerült elkapnia Jerryt. Megkötözte őt, és feltette a 3,2 m magas létra tetejére. Szerzett egy olyan rugót, ami éppen olyan hosszú volt, mint a létra teteje és a plafon közti távolság, azaz 60 cm. Ezt a rugót Jerryre erősítette, a másik végét pedig rögzítette fölötté a plafonhoz. Ezek után kirúgta a létrát Jerry alól, így Jerry le-fel kezdett rezegni a rugó végén.

A rugó 1 N erő hatására 32 cm-t nyúlik meg.

- a) Mekkora periódusidővel kezdett Jerry (8 dkg) rezegni? 2 p.
 b) Mekkora volt a rezgés amplitúdója? 1 p.
 c) Milyen távol volt a plafontól Jerry 26,2 s múlva? 1,5 p.
 d) Mekkora volt Jerry súlya a legalsó pontban? 1,5 p.

B/1. Szilveszternek sikerült elkapnia Csőrikét. Megkötözte őt, és feltette a 2,8 m magas létra tetejére. Szerzett egy olyan rugót, ami éppen olyan hosszú volt, mint a létra teteje és a plafon közti távolság, azaz 60 cm. A rugó 1 N erő hatására 32 cm-t nyúlik meg. Ezt a rugót Csőrikére erősítette, a másik végét pedig rögzítette fölötté a plafonhoz. Ezek után kirúgta a létrát Csőrike alól, így Csőrike le-fel kezdett rezegni a rugó végén.

Csőrike tömege 8 dkg.

- a) Mekkora amplitúdóval kezdett Csőrike rezegni? 1 p.
 b) Mekkora volt Csőrike súlya a legalsó pontban? 1,5 p.
 c) Mekkora volt a rezgésének a periódusideje? 2 p.
 d) Milyen távol volt a plafontól Csőrike 46,3 s múlva? 1,5 p.

A rugóállandó $k = F / \Delta \ell = 1 / 0,32 = 3,125$ N/m.

Periódusidő: **A/3.a)** ill. **B/1.c)**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 1,005 \text{ s}$$

Amplitúdó: **A/3.b)** ill. **B/1.a)**

Ehhez ki kell számolni, hol lesz a rezgés egyensúlyi helyzete:

Jelöljük x -szel a rugó megnyúlását: $x_{es} = mg / k = 0,256$ m.

Induláskor Jerry / Csőrike ennyivel van az egyensúlyi helyzet felett, és mivel kezdősebessége nincs, ezért ekkora amplitúdójú lesz a rezgés: $A = 0,256$ m.

Távolság a plafontól egy adott időben: **A/3.c)** ill. **B/1.d)**

Jelöljük y -nal a kitérést az egyensúlyi helyzethez képest, azaz az egyensúly körüli rezgésre

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \text{ahol tudjuk, hogy } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 6,25 \text{ s}^{-1}, \text{ és } A = 0,256 \text{ m.}$$

Mivel a kiinduló állapotban a rugó az egyensúlyi helyzethez képest össze volt nyomódva, ezért $\varphi_0 = -\pi$.

[A és φ_0 értékét a kiinduló állapot alapján számolva:

$$y_0 = A \cos \varphi_0 = -x_{es} = -0,256 \text{ m}; \quad v_0 = -A\omega \sin \varphi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0,256 \text{ m}, \quad \varphi_0 = -\pi]$$

Tehát

$$y(t) = 0,256 \cos(6,25t - \pi) = -0,256 \cos(6,25t) \text{ [m]}$$

Behelyettesítve

$$\text{A csoport: } t_A = 26,2 \text{ s}; \quad y_A = -0,2371 \text{ m}; \quad \text{B csoport: } t_B = 46,3 \text{ s}; \quad y_B = -0,2406 \text{ m.}$$

A rugó megnyúlása $x(t) = x_{es} + y(t)$, és a rugó hossza $L = \ell_0 + x_{es} + y(t)$, ennyi a távolság a plafontól:

$$\text{A csoport: } L_A = 0,6189 \text{ m}; \quad \text{B csoport: } L_B = 0,6154 \text{ m.}$$

Súly a legalsó pontban: **A/3.d)** ill. **B/1.b)**

A súly a rugó által kifejtett erő lesz. Mivel a rezgés legalsó pontjában a rugó megnyúlása egy amplitúdónyi az egyensúlyi helyzethez képest, és most jelen esetben az egyensúlyi helyzetben a rugó megnyúlása éppen egy amplitúdónyi, ezért a legalsó pontban a rugó megnyúlása két amplitúdónyi. A rugóerő ekkor

$$F_r = k \cdot 2A = k \cdot 2(mg/k) = 2mg = 1,6 \text{ N, ennyi lesz a 8 dkg-os Jerry / Csőrike súlya.}$$

Mérleghinta: **A/4.** és **B/2.**

A/4. Tom és Jerry gazdájának kertjében egy aszimmetrikusan alátámasztott mérleghinta van: a tengelye 1,6 m-re van a 2,8 m hosszú rúd egyik végétől. A mérleghinta mindkét végén van egy-egy ülés. Jerry (8 dkg) szerzett 2 dkg sajtot, és azzal együtt ráült a mérleghinta hosszabb végén levő ülésre, Tom pedig a túloldalon lévő ülésre.

A mérleghinta rúdja egy homogén rúd, a tömege 20,0 kg; a rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontjára $\frac{1}{3}mL^2$, a közepére $\frac{1}{12}mL^2$. Az ülések tömege 1,0–1,0 kg, a tömegközéppontjuk a rúd végén van, a tehetetlenségi nyomatékuk a saját súlypontjukra vonatkoztatva $\Theta_{\text{ülés},s} = 0,8 \text{ kgm}^2$. Tom tömege 1,9 kg, ő és Jerry (a sajtal együtt) pontszerűnek tekinthető, és a rúd két végén ülnek az ülésekben.

a) Milyen távol van a mérleghinta tengelyétől a mérleghinta és a rajta ülő Tom és Jerry (és a sajtja) tömegközéppontja? 2 p.

Tom egy almafa alatt volt. Egyszer csak leesett egy 20 dkg-os alma a feje fölött 4,5 m-rel levő ágról. Tom felnézett, meglepetésében kitátotta a száját, az alma így éppen a szájába esett és benne is maradt. Mivel az alma érkezésekor a mérleghintán Tom volt felül, az alma becsapódása megbillentette a mérleghintát.

b) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka a mérleghintának a rajta ülő Tommal (szájában az almával) és Jerryvel (kezében a sajtal) együtt a mérleghinta tengelyére vonatkoztatva? 2,5 p.

c) Mekkora szögsebességgel indul meg a mérleghinta? Mekkora az induláskor Jerry sebessége? 2,5 p.

B/2. Nagyi kertjében egy aszimmetrikusan alátámasztott mérleghinta van: a tengelye 1,2 m-re van a 2,8 m hosszú rúd egyik végétől. A mérleghinta mindkét végén van egy-egy ülés. Csőrike (8 dkg) a 2 dkg-os napernyőjével együtt ráült a mérleghinta hosszabb végén levő ülésre, Szilveszter pedig a túloldalon lévő ülésre.

A mérleghinta rúdja egy homogén rúd, a tömege 20,0 kg; a rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontjára $\frac{1}{3}mL^2$, a közepére $\frac{1}{12}mL^2$. Szilveszter tömege 1,9 kg, ő és Csőrike (a napernyővel együtt) pontszerűnek tekinthető, és a rúd két végén ülnek az ülésekben. Az ülések tömege 1,0–1,0 kg, a tömegközéppontjuk a rúd végén van, a tehetetlenségi nyomatékuk a saját súlypontjukra vonatkoztatva $\Theta_{\text{ülés},s} = 0,8 \text{ kgm}^2$.

a) Milyen távol van a mérleghinta tengelyétől a mérleghinta és a rajta ülő Szilveszter és Csőrike (és a napernyője) tömegközéppontja? 2 p.

Szilveszter egy almafa alatt volt. Egyszer csak leesett egy 20 dkg-os alma a feje fölött 4,5 m-rel levő ágról. Szilveszter felnézett, meglepetésében kitátotta a száját, az alma így éppen a szájába esett és benne is maradt. Mivel az alma érkezésekor a mérleghintán Szilveszter volt felül, az alma becsapódása megbillentette a mérleghintát.

b) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka a mérleghintának a rajta ülő Csőrikével (kezében a napernyővel) és Szilveszterrel (szájában az almával) együtt a mérleghinta tengelyére vonatkoztatva? 2,5 p.

c) Mekkora szögsebességgel indul meg a mérleghinta? Mekkora az induláskor Csőrike sebessége? 2,5 p.

a) Legyen az origó a tengelynél, és válasszuk a pozitív irányt Tom felé.

Tömegek és koordináták:

	m [kg]	x [m]	m·x [kg·m]
Tom / Szilveszter és egy ülés	1,9 + 1,0 = 2,9	+1,2	+3,48
Jerry +sajt / Csőrike+napernyő és egy ülés	0,08+0,02+1,0 = 1,1	-1,6	-1,76
mérleghinta rúd	20	-0,2	-4,00
összeg	24,0		-2,28

$x_s = -2,28 / 24 = -0,095 \text{ m}$, vagyis a tengelytől 0,095 m-re Jerry /Csőrike felé.
(Jerrytól / Csőrikétől 1,505 m-re, Tomtól / Szilvesztertől 1,295 m-re.)

b) Az egyes részek saját tömegközéppontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, a tömegek, és a tömegközéppontjuk távolsága a tengelytől:

	Θ_s [kgm ²]	m [kg]	d [m]	md ² (Steiner-tag)	Θ_{tengely} [kgm ²]
Tom / Szilveszter		1,9	1,2		2,736
Tom / Szilveszter ülése	0,8	1,0	1,2	1,44	2,24
alma		0,2	1,2		0,288
Jerry +sajt / Csőrike+napernyő		0,1	1,6		0,256
Jerry / Csőrike ülése	0,8	1,0	1,6	2,56	3,36
mérleghinta rúd	$\frac{1}{12}mL^2 = 13,07$	20	0,2	0,80	13,87
					22,75

$$\Theta_{\text{tengely}} = 22,75 \text{ kgm}^2$$

c) Impulzusmomentum-megmaradással: a forgómozgásba kezdő rendszer impulzusmomentuma egyenlő lesz a Tom / Szilveszter fejéhez érkező alma impulzusának a tengelyre vett nyomatékával.

Az alma sebességét energia-megmaradással számíthatjuk:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh} = 9,487 \text{ m/s},$$

az alma impulzusa $p = mv = 1,897 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$.

Az alma Tom / Szilveszter fejére a tengelytől $k = 1,2 \text{ m}$ távolságra levő függőleges egyenes mentén érkezik, az impulzusmomentuma $L = k \cdot p = 2,277 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

Impulzusmomentum-megmaradás: $L = \Theta \cdot \omega$ a becsapódás után a forgó mozgásra.

$\rightarrow \omega = L / \Theta_{\text{tengely}} = 0,1001 \text{ s}^{-1}$ szögsebességgel kezd forogni.

Jerry / Csőrike sebessége: $v = r \cdot \omega = 1,6 \cdot 0,1001 = 0,1602 \text{ m/s}$, mivel a tengelytől $1,6 \text{ m}$ -re van.