

A feladatokban $g = 10 \text{ m/s}^2$ -tel számoljunk!

1. Egy $m = 0,5 \text{ kg}$ tömegű test sebességét az alábbi függvény adja meg:

$$\mathbf{v}(t) = (12 \sin(3t) + 5) \mathbf{i} + (6 \cos(2t) - 4t) \mathbf{j} + (6t^2 - 8) \mathbf{k} \quad [\text{m/s}].$$

A test a $t = 0 \text{ s}$ -ban az $\mathbf{r}_0 = -2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} - 4 \mathbf{k} \quad [\text{m}]$ pontból indul.

a/ Milyen távol lesz a test az origótól a $t = \pi \text{ s}$ -ban? (3 p.)

b/ A testre két erő hat. Adjuk meg az \mathbf{F}_1 erővektort, ha $\mathbf{F}_2 = 18 \sin(3t) \mathbf{i} - 6 \sin(2t) \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \quad [\text{N}]$. (3 p.)

MO.

a/ $\mathbf{r}(t) = (-4 \cos(3t) + 5t + 2) \mathbf{i} + (3 \sin(2t) - 2t^2 + 3) \mathbf{j} + (2t^3 - 8t - 4) \mathbf{k} \quad [\text{m}]$

$$\mathbf{r}(\pi) = (5\pi + 6) \mathbf{i} + (-2\pi^2 + 3) \mathbf{j} + (2\pi^3 - 8\pi - 4) \mathbf{k} \approx 21,70 \mathbf{i} - 16,74 \mathbf{j} + 32,88 \mathbf{k} \quad [\text{m}]$$

$$d = |\mathbf{r}(\pi)| \approx 42,81 \text{ m.}$$

b/ $\mathbf{a}(t) = 36 \cos(3t) \mathbf{i} + (-12 \sin(2t) - 4) \mathbf{j} + 12t \mathbf{k} \quad [\text{m/s}^2]$

$$m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \mathbf{a}(t) = \mathbf{F}_e = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{F}_1 = m \cdot \mathbf{a}(t) - \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}_1 = [18 \cos(3t) \mathbf{i} + (-6 \sin(2t) - 2) \mathbf{j} + 6t \mathbf{k}] - [18 \sin(3t) \mathbf{i} - 6 \sin(2t) \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F}_1 = 18 (\cos(3t) - \sin(3t)) \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} + (6t - 2) \mathbf{k} \quad [\text{N}].$$

2. 12 m magasról függőlegesen felfelé eldobtunk egy $0,4 \text{ kg}$ tömegű követ. $0,5 \text{ s}$ múlva a kő sebessége $1,8 \text{ m/s}$ felfelé.

a/ Mekkora volt a kő kezdősebessége? (1 p.)

b/ Milyen magasan van $0,5 \text{ s}$ -mal a feldobása után? (1,5 p.)

c/ Milyen maximális magasságot ér el és mikor? (1,5 p.)

d/ Mennyi a sebessége földet éréskor? (1,5 p.)

e/ Válaszoljuk meg az a/ és d/ kérdéseket arra az esetre is, ha a test sebessége $0,5 \text{ s}$ -mal a feldobása után lefelé $1,8 \text{ m/s}$! (1,5 p.)

MO.

a/ $v = v_0 - gt$, $t = t_1 = 0,5 \text{ s}$ -ban $v = 1,8 \text{ m/s}$: $1,8 = v_0 - 10 \cdot 0,5 \rightarrow v_0 = 6,8 \text{ /s}$.

b/ $z(t) = z_0 + v_0 t - g/2 t^2 = 12 + 6,8t - 5t^2$; $z(t_1) = z(0,5) = \dots = 14,15 \text{ m}$.

c/ amikor $v = v_0 - gt = 0 \rightarrow t_2 = v_0/g = 0,68 \text{ s}$, ekkor $z(t_2) = z(0,68) = \dots = 14,312 \text{ m}$.

d/ t_3 -kor ér földet, ekkor $z(t_3) = 0$: $12 + 6,8t_3 - 5t_3^2 = 0 \rightarrow t_3 = 2,372 \text{ s} \rightarrow v(t_3) = -16,92 \text{ s}$.

e/ $t_1 = 0,5 \text{ s}$ -ban $v' = -1,8 \text{ m/s}$: $-1,8 = v_0' - 10 \cdot 0,5 \rightarrow v_0' = 3,2 \text{ /s}$

$$12 + 3,2t_3' - 5t_3'^2 = 0 \rightarrow t_3' = 1,902 \text{ s} \rightarrow v(t_3') = -15,82 \text{ s.}$$

3. Egy változtatható α hajlásszögű, 6 m hosszú lejtő tetejére teszünk egy 25 dkg tömegű testet. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $0,24$, a tapadási súrlódási együttható $0,46$.

a/ Mennyi idő alatt ér a test a lejtő aljára, ha $\alpha = 28^\circ$ és kezdősebesség nélkül engedjük el a lejtő tetejéről? (2 p.)

b/ Mekkora α hajlásszög esetén lenne 3 m/s kezdősebesség esetén a test sebessége állandó a lejtőn való lecsúszás közben? (1 p.)

c/ Legfeljebb mekkora lehet a lejtő hajlásszöge, ha a test nem kezd el csúszni? (1 p.)

d/ Mekkora tapadási súrlódási erő hat a testre, ha $\alpha' = 5^\circ$? (2 p.)

MO.

a/ $F_{ny} = mg \cos\alpha$, $F_{t,max} = \mu_t \cdot F_{ny} = \mu_t \cdot mg \cos\alpha$

Ellenőrizzük, tényleg elindul-e: $\alpha = 28^\circ$ esetén $F_{t,max} = \mu_t \cdot F_{ny} = 0,46 \cdot 0,25 \cdot 10 \cdot \cos 28^\circ = 1,015 \text{ N}$,

a lejtővel párhuzamosan $mg \sin\alpha = 0,25 \cdot 10 \cdot \sin 28^\circ = 1,174 \text{ N}$ gyorsítja;

$mg \sin\alpha > F_{t,max} \rightarrow$ elindul.

A lejtőn ~~ma~~ $= mg \sin\alpha - \mu \cdot mg \cos\alpha \rightarrow a = 10 \cdot \sin 28^\circ - 0,24 \cdot 10 \cdot \cos 28^\circ = 2,576 \text{ m/s}^2$;

$s = v_0 t + a/2 t^2$: $6 = 0 + 2,576/2 t^2 \rightarrow t = 2,158 \text{ s}$.

b/ $v = \text{konst.}$, ha $a = 0$: $a = g \sin\alpha - \mu \cdot g \cos\alpha = 0 \rightarrow \text{tg}\alpha = \mu \rightarrow \alpha = 13,5^\circ$.

c/ nem kezd el csúszni, ha $mg \sin\alpha \leq F_{t,max} = \mu_t \cdot mg \cos\alpha \rightarrow \text{tg}\alpha \leq \mu_t \rightarrow \alpha \leq 24,7^\circ$.

(A b/ feladatban a 3 m/s kezdősebesség azért volt megadva, mert látjuk, hogy $13,5^\circ$ hajlásszögű lejtőn a test kezdősebesség nélkül még nem indulna el, de ha meglökjük, akkor csúszni fog.)

d/ $\alpha = 5^\circ$ esetén $F_{t,max} = 0,46 \cdot 0,25 \cdot 10 \cdot \cos 5^\circ = 1,146 \text{ N}$,

a lejtővel párhuzamosan $mg \sin\alpha = 0,25 \cdot 10 \cdot \sin 5^\circ = 0,218 \text{ N}$ gyorsítaná;

$mg \sin\alpha < F_{t,max} \rightarrow$ tapad, és $F_t = mg \sin\alpha = 0,218 \text{ N}$.

4. $R = 80 \text{ m}$ sugarú köríven vízszintes úttesten 90 km/h sebességgel megy egy 1250 kg tömegű autó.

a/ Mekkora az aszfalt és az autó kereke között ható tapadási súrlódási erő értéke, ha a tapadási súrlódási együttható $1,05$? (2 p.)

b/ Legfeljebb mekkora sebességgel mehet ez az autó ezen a köríven, hogy ne csússzon meg? (2 p.)

c/ Mennyivel kellene megdönteni az úttestet, ha azt szeretnénk, hogy amikor ónos eső miatt a súrlódási erő zérusra csökken, akkor a pontosan 40 km/h sebességgel haladó autó ne csússzon meg? (2 p.)

Plusz 3 pontért:

d/ Mennyivel kellene megdönteni az úttestet, ha azt szeretnénk, hogy a megengedett maximális 130 km/h sebességnél se csússzon meg az autó, ha a súrlódást nem hanyagoljuk el? (+3 p.)

MO.

a/ $F_{t,max} = \mu_t \cdot F_{ny} = \mu_t \cdot mg = 13125 \text{ N}$

A körpályán maradáshoz szükséges erő $ma_{cp} = mv^2/R = 9766 \text{ N}$, ezt a tapadási súrlódás biztosítja, és ez kisebb, mint $F_{t,max}$, tehát ekkora lesz ebben az esetben F_t : $F_t = 9766 \text{ N}$.

b/ Nem csúszik ki az autó, ha $\mu_t \cdot mg \geq mv^2/R \rightarrow v \leq \sqrt{\mu_t g R} \approx 28,98 \text{ m/s} = 104,3 \text{ km/h}$.

c/ Az úttestre merőleges nyomóerő

függőleges komponense ellensúlyozza a gravitációs erőt: $F_{ny} \cos\varphi = mg$, és a

vízszintes komponense biztosítja a centripetális gyorsulást: $F_{ny} \sin\varphi = ma_{cp} = mv^2/R$

$\rightarrow mg \text{tg}\alpha = mv^2/R \rightarrow \text{tg}\alpha = v^2/R = (40/3,6)^2/80 = 0,154 \rightarrow \alpha = 8,77^\circ$.

d/ függőleges komponensek (felfelé pozitív): $F_{ny} \cos\varphi - mg - F_t \sin\alpha = 0$

sugár irányú komponensek: $ma_{cp} = mv^2/R = F_t \cos\alpha + F_{ny} \sin\varphi$,

és $F_t = \mu_t \cdot F_{ny}$

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \text{tg}\alpha = 0,2139 \rightarrow \alpha = 12,07^\circ$.