Fizika 1 - Mechanika számolási gyakorlat zh1 2025. márc. 20. megoldások

1. Klaudia a múlt héten azt vette észre, hogy esténként egy pici (pontszerűnek tekinthető) szellem röpköd a kertjükben. Tegnap átment hozzá a barátja, Bence, aki fizikushallgató. Ő is látta a szellemet, és ő meghatározta a sebességét is:

$$\mathbf{v}(t) = (2\,t + 1)^3\ \mathbf{i} + \frac{2}{(2\,t+1)^2}\,\mathbf{j} \quad [\mathrm{m/s}]$$

a) Írja fel a szellem gyorsulásvektorát! (2 p.)

b) Az induláskor (t=0-ban) a szellem sikított egy nagyot az

$\mathbf{s} = 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$ vektor irányába.

Mekkora szöget zárt be induláskor a szellemre ható erők eredője a sikítás irányával? (2 p.)

c) Hol van a szellem a t = 1 s-ban, ha t = 0 s-ban az origóból indult? (4 p.)

Megoldás:

a) $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}} = 6\,(2\,t+1)^2\ \mathbf{i} + \frac{-8}{(2\,t+1)^3}\,\mathbf{j} \quad [\mathrm{m/s^2}]$

b) Mivel $\mathbf{F}_{\mathbf{eredő}} = m\,\mathbf{a}$, ezért az eredő erő iránya a gyorsulás irányával egyezik meg.

$\mathbf{a}(0) = 6\,\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j} \qquad |\mathbf{a}(0)| = 10$

$\mathbf{s} = 0\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k} \qquad |\mathbf{s}| = 5$

$\mathbf{a}(0)\cdot\mathbf{s} = 6\cdot 0 + (-8)\cdot 4 + 0\cdot(-3) = -32$

$\cos\varphi = -32/(10\cdot 5) = -0{,}64 \quad \rightarrow \quad \varphi = 129{,}8^\circ$

c) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{8}\,[\,(2t+1)^4 - 1\,]\,\mathbf{i} + \left[1 - \frac{1}{2t+1}\right]\mathbf{j} \quad [\mathrm{m}]$

$\mathbf{r}(1) = \frac{1}{8}\,[\,(2+1)^4 - 1\,]\,\mathbf{i} + \left[1 - \frac{1}{2+1}\right]\mathbf{j} = 10\,\mathbf{i} + \frac{2}{3}\,\mathbf{j} \quad [\mathrm{m}]$

2. Bencének szombaton meccse lesz, ezért átmentek a kosárpályára, Bence a büntetődobást akarta gyakorolni. Bence 8 m/s kezdősebességgel, a vízszinteshez képest felfelé 64°-os szöggel dobta el a labdát. A kosárgyűrű a föld fölött 3,05 m magasan van, az eldobás helye és a kosár alatti pont távolsága vízszintesen 4,55 m volt.

a) Milyen magasról kell eldobnia Bencének a labdát, hogy az pontosan a kosárgyűrűbe érkezzen? (Vagyis hogy a labda tömegközéppontja éppen a kosár közepéhez érkezzen?) (3 p.)

b) Mekkora nagyságú sebességgel esik bele a labda a kosárba? (2 p.)

Megoldás:

$v_x = v_0 \cos\alpha = 8 \cos 64^\circ = 3{,}507$ m/s; $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = 8 \sin 64^\circ = 7{,}190$ m/s

a) $x_0 = 0$ választással $x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t = 3{,}507\, t$,

a kosárba érkezés t^* időpontjában $x(t^*) = (v_0 \cos\alpha)\, t^* = 3{,}507\, t^* = 4{,}55$;

$z = 0$-t a talaj magasságára választva $z(t) = z_0 + (v_0 \sin\alpha)\, t - (g/2)\, t^2 = z_0 + 7{,}190\, t - 5\, t^2$,

a kosárba érkezés t^* időpontjában $z(t^*) = z_0 + (v_0 \sin\alpha)\, t^* - (g/2)\, t^{*2} = z_0 + 7{,}190\, t^* - 5\, t^{*2} = 3{,}05$.

Az x komponensből kiszámolható a t^* idő:

$t^* = 4{,}55 / (v_0 \cos\alpha) = 4{,}55 / 3{,}507 = 1{,}297$ s.

A z komponensből a t^* idő ismeretében kiszámolható a z_0 kiindulási magasság:

$z_0 = 3{,}05 - (v_0 \sin\alpha)\, t^* + (g/2)\, t^{*2} = 3{,}05 - 7{,}190 \cdot 1{,}297 + 5 \cdot 1{,}297^2 = 2{,}138$ m.

b) A labda sebességvektora a t^* időben

$\mathbf{v}(t^*) = v_0 \cos\alpha\, \mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha - g t^*)\, \mathbf{k} = 3{,}507\, \mathbf{i} + (7{,}190 - 10 \cdot 1{,}297)\, \mathbf{k} = 3{,}507\, \mathbf{i} - 5{,}784\, \mathbf{k}$ [m/s],

ennek nagysága $v(t^*) = \sqrt{3{,}507^2 + (-5{,}784)^2} = 6{,}764$ m/s.

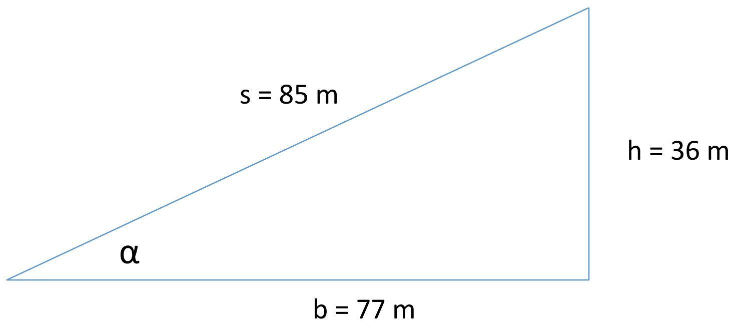
3. Klaudia és Bence végül kimentek a kőfejtőbe. Van ott egy 85 m hosszú egyenes lejtő, aminek a teteje 36 m-rel van magasabban az aljánál. Klaudia feltolt egy 18 kg-os kiszuperált, kerekek nélküli csillét a lejtő tetejére, és meglökte lefelé v_0 kezdősebességgel. Bence a lejtő aljánál állt, és megmérte, hogy mennyi idő alatt érkezik le a csille a lejtő aljára: pontosan 6 másodperc alatt.

A csille és a lejtő közötti tapadási súrlódási együttható 0,33; a csúszási súrlódási együttható 0,16.

a) Mekkora v_0 kezdősebességgel lökte meg Klaudia a csillét? (6 p.)

b) Ezután a csillére rákötöttek egy (nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű) kötelet, amit átvezettek a lejtő tetején levő (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű) csigán, és a kötél függőlegesen lógó végére egy elhanyagolható tömegű kosarat kötöttek, majd homokot lapátoltak abba a kosárba. Mennyi homokot lapátolhattak a kosárba, ha azt tapasztalják, hogy a nyugalomban levő csille nem kezd el gyorsulni a lejtőn? (6 p.)

Megoldás:



$\sin\alpha = 36/85 = 0{,}4235$

$\alpha = 25{,}06^\circ$

$\cos\alpha = 77/85 = 0{,}9059$

$\mathrm{tg}\,\alpha = 36/77 = 0{,}4675$

a) A csillére ható nyomóerő $F_{ny} = mg \cos\alpha = 18 \cdot 10 \cdot (77/85) = 163{,}1$ N
(mert csak mg-nek van lejtőre merőleges komponense)

$\rightarrow$ a csúszási súrlódási erő $F_s = \mu F_{ny} = \mu\, mg \cos\alpha = 0{,}16 \cdot 18 \cdot 10 \cdot (77/85) = 26{,}09$ N,
ez felfelé mutat, mivel a csille lefelé csúszik.

A nehézségi erőnek a lejtővel párhuzamos komponense

$mg \sin\alpha = 18 \cdot 10 \cdot (36/85) = 76{,}24$ N (lefelé)

A mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponense (lefelé pozitív)

$ma = mg \sin\alpha - \mu\, mg \cos\alpha \quad \rightarrow \quad a = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 10 \cdot (0{,}4235 - 0{,}16 \cdot 0{,}9059) = 2{,}786$ m/s^2.

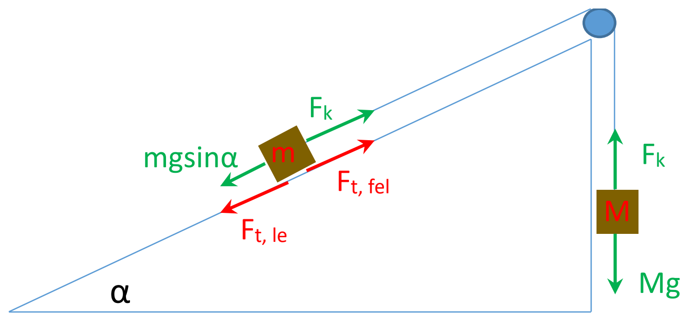
A csillének ekkora a gyorsulása (lefelé, mert pozitív a gyorsulás), és v_0 kezdősebességgel indult, tehát

$s = v_0 t + (a/2)\, t^2 = v_0 t + (2{,}786/2)\, t^2$.

Ismert az a t idő, ami alatt a csille megteszi az s távolságot, így ebből kifejezhető a v_0 kezdősebesség:

$v_0 = s/t - (a/2)\, t = 85/6 - (2{,}786/2) \cdot 6 = 5{,}809$ m/s.

b)



$mg \sin\alpha = 18 \cdot 10 \cdot (36/85) = 76{,}24$ N

$F_{ny} = mg \cos\alpha = 18 \cdot 10 \cdot (77/85) = 163{,}1$ N

$F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = 0{,}33 \cdot 163{,}1 = 53{,}81$ N

Ha M = 0 lenne, akkor $F_k = 0$, a csillére felfelé mutató tapadási súrlódási erő hatna. Nézzük meg, hogy ez esetben tapadna-e a csille (azaz a=0 teljesülhet-e):

$ma = mg\sin\alpha - F_t = 0 \;\rightarrow\;$ ehhez $F_t = mg\sin\alpha = 76{,}24$ N nagyságú tapadási súrlódási erő kell, de $F_{t,max} = 53{,}81$ N < 76,24 N, tehát kell egy minimális M tömeg ahhoz, hogy a csille tapadjon.

Ez esetben F_t felfelé mutat, és a mozgásegyenletek

$ma = mg\sin\alpha - F_t - F_k = 0$ és $Ma = F_k - Mg = 0$, amiből $mg\sin\alpha - F_t - Mg = 0$.

M minimális értékét akkor kapjuk meg, ha a tapadási súrlódási erő éppen maximális:

$mg\sin\alpha - \mu_t\, mg \cos\alpha - Mg = 0 \quad \rightarrow \quad M = m\,(\sin\alpha - \mu_t \cos\alpha) = 18 \cdot (0{,}4235 - 0{,}33 \cdot 0{,}9059) = 2{,}243$ kg.

Ha viszont túl sok homokot tennénk a kosárba, akkor a csille felfelé kezdene gyorsulni, amit lefelé mutató tapadási súrlódási erő próbálna megakadályozni. Ekkor a mozgásegyenletek:

$ma = F_k - mg\sin\alpha - F_t = 0$ és $Ma = Mg - F_k = 0$, amiből $mg\sin\alpha + F_t - Mg = 0$.

M maximális értékét akkor kapjuk meg, ha a tapadási súrlódási erő maximális:

$mg\sin\alpha + \mu_t\, mg \cos\alpha - Mg = 0 \quad \rightarrow \quad M = m\,(\sin\alpha + \mu_t \cos\alpha) = 18 \cdot (0{,}4235 + 0{,}33 \cdot 0{,}9059) = 13{,}00$ kg.

A csille tehát akkor tapad, ha a kosárban levő homok tömege 2,243 kg és 13,00 kg között van.