Fizika 1 - Mechanika számolási gyakorlat zh1 2024. ápr. 11. megoldások

$g = 10\ m/s^2$

1. József és Attila a megmaradt húsvéti tojásokkal kezdtek dobálózni a kertben. József eldobta a tojást 8 m/s kezdősebességgel a vízszinteshez képest 70°-kal felfelé, Attila pedig egy kis kosarat tartott a kezében, úgy, hogy a tojás éppen beleesett (felülről). József és Attila egy kifeszített mérőszalagon álltak, és arról le tudták olvasni, hogy a tojás eldobási helye és a kosár alatti pont távolsága a (vízszintes) mérőszalagon 3,5 m volt.

a) Mennyivel volt magasabban a kosár az eldobás magasságánál? (2,5 p.)

b) Mekkora sebességgel esett bele a tojás a kosárba? Összetört-e, ha 5 m/s-nál nagyobb becsapódási sebesség esetén összetörik? (1,5 p.)

c) Mi volt a tojás legnagyobb magassága az eldobás magasságához képest? (1 p.)

d) Mekkora volt a tojás sebessége a legfelső ponton? (0,5 p.)

Megoldás:

A sebesség vízszintes komponense $v_x = v_0 \cos\alpha = 8\cdot\cos 70^\circ = 2{,}736$ m/s;

a kezdősebesség függőleges komponense $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = 8\cdot\sin 70^\circ = 7{,}518$ m/s.

a) A tojás x koordinátája $\Delta x_1 = 3{,}5$ m-rel nő t_1 idő alatt:

$v_x\, t_1 = x_1 - x_0 = \Delta x_1$: $2{,}736\, t_1 = 3{,}5 \quad \rightarrow \quad t_1 = 1{,}279$ s

t_1 idő alatt a tojás függőleges koordinátája Δz_1-gyel nő:

$z_1 - z_0 = \Delta z_1 = v_{0z}\, t_1 - ½\, g\, t_1^2 = 7{,}518\cdot 1{,}279 - 5\cdot 1{,}279^2 = 1{,}435$ m,

ennyivel van magasabban a tojás az eldobás magasságánál a kosárba érkezés pillanatában.

b) A sebesség vízszintes komponense állandó: $v_x = 2{,}736$ m/s,

a függőleges komponense a t_1 időben

$v_z(t_1) = v_{0z} - g\, t_1 = 7{,}518 - 10\cdot 1{,}279 = -5{,}274$ m/s. (Tényleg lefelé mozog már a tojás.)

A sebesség nagysága Pithagorasz-tétellel $v(t_1) = \sqrt{(2{,}736^2 + (-5{,}274)^2)} = 5{,}942$ m/s,

tehát a tojás összetörik.

c) A legfelső ponton $v_z = 0$: $v_{0z} - g\, t_h = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = v_{0z}/g = 7{,}518/10 = 0{,}7518$ s,

ebben a pillanatban $h_{max} = z_h - z_0 = v_{0z}\, t_h - ½\, g\, t_h^2 = 7{,}518\cdot 0{,}7518 - 5\cdot 0{,}7518^2 = 2{,}826$ m;

vagy a $h_{max} = (v_0 \sin\alpha)^2 / (2g)$ képletbe behelyettesítve:

$h_{max} = 7{,}518^2 / 20 = 2{,}826$ m.

d) A legfelső ponton a függőleges sebességkomponens zérus, így

$v = v_x = 2{,}736$ m/s. (A sebesség vízszintes.)

2. Józsefnek és Attilának van egy 0,5 kg tömegű drónja, amihez két programozható távirányító is van, mindkettő egyszerre tud kifejteni erőt a drónra. A nehézségi erő viszont furcsa módon nem hat a drónra. A József által programozott $\mathbf{F_J}(t)$ erő ismeretlen, az Attila által programozott erő pedig

$$\mathbf{F_A}(t) = (0{,}4+0{,}8t)\ \mathbf{i} - 0{,}6\ \sin(2t + \frac{\pi}{2})\ \mathbf{j}\ \ [N] \quad \text{volt.}$$

A drónt az origóba helyezték és t=0-ban mindketten aktiválták a távirányítójukat. A drón elkezdett repülni, a sebességét az alábbi függvény adta meg:

$$\mathbf{v}(t) = (-2{,}4 + 0{,}8t - 0{,}6t^2)\ \mathbf{i} + 0{,}6\ \cos(2t + \frac{\pi}{2})\ \mathbf{j} - \frac{12}{(t+3)^2}\ \mathbf{k}\ \ [m/s]$$

a) Határozza meg az ismeretlen $\mathbf{F_J}(t)$ erőt! (3 p.)

b) Adja meg a drón $\mathbf{r}(t)$ helyvektorát! (A t = 0 s-ban a drón az origóból indult.) (2,5 p.)

c) Mekkora szöget zárt be induláskor (t=0-ban) a drón sebességvektora az $\mathbf{F_A}$ erővel? (2 p.)

Megoldás:

a) $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$; $\quad m\,\mathbf{a} = \mathbf{F_A} + \mathbf{F_J}$.

$$\mathbf{a} = (0{,}8 - 1{,}2t)\ \mathbf{i} - 1{,}2\ \sin(2t + \frac{\pi}{2})\ \mathbf{j} + \frac{24}{(t+3)^3}\ \mathbf{k}\ \ [m/s^2];$$

$$m\,\mathbf{a} = (0{,}4 - 0{,}6t)\ \mathbf{i} - 0{,}6\ \sin(2t + \frac{\pi}{2})\ \mathbf{j} + \frac{12}{(t+3)^3}\ \mathbf{k}\ \ [N];$$

$$\mathbf{F_A} = (0{,}4 + 0{,}8t)\ \mathbf{i} - 0{,}6\ \sin(2t + \frac{\pi}{2})\ \mathbf{j}\ \ [N];$$

$$\mathbf{F_J} = m\,\mathbf{a} - \mathbf{F_A} = -1{,}4\,t\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + \frac{12}{(t+3)^3}\ \mathbf{k}\ \ [N].$$

b) $\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}\,dt = (-2{,}4t + 0{,}4t^2 - 0{,}2t^3)\ \mathbf{i} + 0{,}3\ [\sin(2t + \frac{\pi}{2}) - 1]\ \mathbf{j} + [\frac{12}{t+3} - 4]\ \mathbf{k}\ \ [m]$ $\quad$ ($\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$)

c) t = 0-ban

$\mathbf{v}(0) = -2{,}4\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} - 4/3\ \mathbf{k}$; $\quad |\mathbf{v}(0)| = 2{,}746$ $\quad$ [m/s]

$\mathbf{F_A}(0) = 0{,}4\ \mathbf{i} - 0{,}6\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$; $\quad |\mathbf{F_A}(0)| = 0{,}7211$ $\quad$ [kg·m/s²]

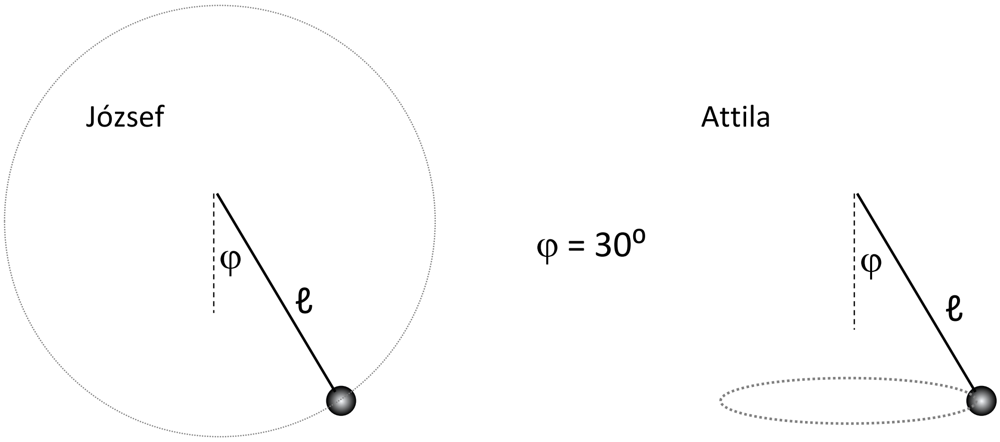
$\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{F_A}(0) = (-2{,}4\cdot 0{,}4) + (0\cdot(-0{,}6)) + (-4/3\cdot 0) = -0{,}96$ $\quad$ [kg·m²/s³]

$\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{F_A}(0) = |\mathbf{v}(0)| \cdot |\mathbf{F_A}(0)| \cdot \cos\varphi \quad \rightarrow$

$\cos\varphi = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{F_A}(0) / (|\mathbf{v}(0)| \cdot |\mathbf{F_A}(0)|) = -0{,}96 / (2{,}746\cdot 0{,}7211) = -0{,}4849$

$\rightarrow \quad \varphi = 119{,}0^\circ = 2{,}077$ rad

3. József és Attila találtak egy 40 dkg-os darabot még a húsvéti sonkából. Rákötötték egy ℓ = 80 cm hosszú (nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű) kötél végére, és elkezdték pörgetni a kötél végén a sonkát. József függőleges síkban pörgette, Attila pedig vízszintes síkban, de úgy, hogy a kötél ferde volt (a sonka a levegőben volt, nem volt alatta asztal). Le is fényképezték egymást eközben. Azt tudjuk, hogy a fényképezés pillanatában József 5,55 N nagyságú erőt fejtett ki a kötéllel a sonkára. Az eredeti fényképeket most nem mutatjuk meg, csak azt, hogy a kötél éppen milyen helyzetben volt:



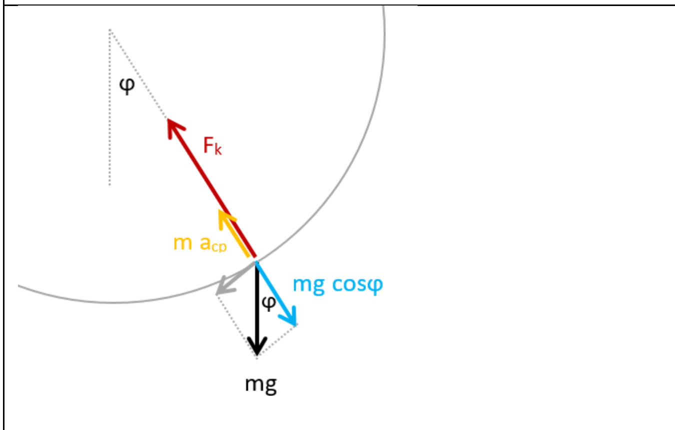
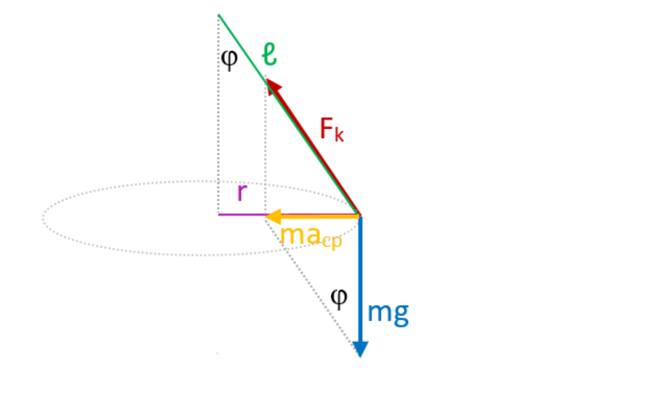
Mekkora volt a sonka sebessége az adott pillanatban

a) József (függőleges körpálya) esetében? (3 p.)

b) Attila (vízszintes körpálya) esetében? (2 p.)

c) Mekkora erőt fejtett ki Attila a sonkára a kötélen keresztül? (1 p.)

Megoldás:

a) József:	**b)** Attila:
	
$m\,a_{cp} = m\,v^2 / r = F_k - mg\cos\varphi$	$m\,a_{cp} = m\,v^2 / r = mg\,\mathrm{tg}\varphi$ (ld. az 5/9. feladatot)
$r = \ell = 0{,}8$ m; $m = 0{,}4$ kg	$r = \ell \sin\varphi = 0{,}8\cdot\sin 30^\circ = 0{,}4$ m; $m = 0{,}4$ kg
$F_k - mg\cos 30^\circ = 5{,}55 - 3{,}464 = 2{,}086$ N	$mg\,\mathrm{tg}\varphi = mg\,\mathrm{tg}30^\circ = 2{,}309$ N
$a_{cp} = (F_k - mg\cos 30^\circ)/m = 2{,}086/0{,}4 = 5{,}215$ m/s^2	$a_{cp} = mg\,\mathrm{tg}\varphi/m = g\,\mathrm{tg}\varphi = 5{,}774$ m/s^2
$v = \sqrt{a_{cp}\cdot r} = \sqrt{5{,}215\cdot 0{,}8} = 2{,}042$ m/s	$v = \sqrt{a_{cp}\cdot r} = \sqrt{5{,}774\cdot 0{,}4} = 1{,}520$ m/s
	c) $F_k = mg / \cos\varphi = 4{,}619$ N

4. József és Attila találtak a kert végében egy 5 m hosszú széles pallót. Feltámasztották az egyik végét úgy, hogy a vízszinteshez képest 7^o-os szöget zárt be, és elővették a húsvétra kapott legnagyobb csokinyuszit, ami 4 kg-os volt.
József a palló aljára tette a csokinyuszit és meglökte felfelé 5,5 m/s sebességgel, majd utána Attila a palló tetejére tette a csokinyuszit, és meglökte lefelé 1,5 m/s sebességgel.

A csokinyuszi és a palló közötti csúszási súrlódási együttható 0,17;
tapadási súrlódási együttható 0,24 volt.

Számolja ki, hogy a csokinyuszi végigcsúszott-e a palló teljes hosszában József, ill. Attila esetében!

Ha igen, akkor adja meg, hogy mennyi idő alatt ért a palló végére és mekkora lett ott a sebessége!

Ha nem, akkor adja meg, hogy hol vesztette el a sebességét, és mi történt vele a megállás után!

(3+3 p.)

<u>Megoldás:</u>

A lejtő által kifejtett nyomóerő $mg\cos\alpha = 4\cdot 10\cdot \cos 7^o = 39{,}70$ N $\rightarrow$ $F_s = \mu F_{ny} = 6{,}749$ N.

A lejtő síkjában

a nehézségi erőnek az $mg \sin\alpha = 4{,}875$ N nagyságú komponense hat a lejtő alja felé, és

$F_s = \mu F_{ny} = 6{,}749$ N nagyságú erő hat a sebességgel ellentétes irányba.

József, felfelé vett pozitív iránnyal: $m a_{fel} = -mg \sin\alpha - F_s = -mg \sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha$

$\rightarrow$ $a_{fel} = -g (\sin\alpha + \mu \cos\alpha) = -2{,}906$ m/s^2.

$v = v_0 + a_{fel}\, t = 5{,}5 - 2{,}906\cdot t$; $s = v_0\, t + ½\, a_{fel}\, t^2 = 5{,}5\, t - 1{,}453\, t^2$

$s = 5$ m: $5{,}5\, t - 1{,}453\, t^2 = 5$ $\rightarrow$ $t = 1{,}517$ s,

ekkor $v = 5{,}5 - 2{,}906\cdot 1{,}517 = 1{,}091$ m/s > 0,

tehát a nyuszi feljut a lejtő tetejére 1,517 s alatt és 1,091 m/s lesz ott a sebessége.

Attila, lefelé vett pozitív iránnyal: $m a_{le} = mg \sin\alpha - F_s = mg \sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha$

$\rightarrow$ $a_{le} = g (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) = -0{,}4686$ m/s^2.

$v = v_0 + a_{le}\, t = 1{,}5 - 0{,}4686t$; $s = v_0\, t + ½\, a_{le}\, t^2 = 1{,}5\, t - 0{,}2343\, t^2$

$s = 5$ m: $1{,}5\, t - 0{,}2343\, t^2 = 5$ $\rightarrow$ nincs megoldása, mert nem jut le a lejtő aljára.

$v = 1{,}5 - 0{,}4686\cdot t = 0$ $\rightarrow$ $t = 3{,}201$ s alatt megáll, ezalatt

$s = 1{,}5\cdot 3{,}201 - 0{,}2343\cdot 3{,}201^2 = 2{,}401$ m-t tesz meg felfelé a lejtőn,

és ott állva marad, mert $\mu_t = 0{,}24$ $>$ $\mathrm{tg}7^o = 0{,}1228$.