Fizika 1 - Mechanika zh1 2023. ápr. 20. megoldás

A feladatokban $g = 10\ m/s^2$.

1. Csiga Bella sétálni ment a csendes tavaszi esőben a teraszra. Bátyja, Csiga Paszkál fizikushallgató, megfigyelte Bella mozgását és szépen felírta a sebességvektorát (a teraszon már előre elkészített egy koordinátarendszert):

$$\mathbf{v_B} = A\sin(Bt)\,\mathbf{i} - \frac{C}{(D+t)^2}\,\mathbf{j}$$

ahol $A = \dfrac{0{,}12}{\pi}$ m/s; $B = 2{,}4\pi\ s^{-1}$; $C = 0{,}8$ m·s; $D = 2$ s.

a) Írja fel Bella helyvektorának időfüggését, ha Bella a t=0-ban az origóból indult! (3 p.)

b) Mekkora volt a Bellára ható erők eredője, ha Bella tömege $m_B = 2{,}4$ dkg? (1,5 p.)

c) t = 2 s-ban egy légy repült neki Bellának. Mekkora szögben ütköztek össze (azaz mekkora szöget zárt be Bella sebessége a légy sebességével), ha az ütközés pillanatában a légy sebességvektora

$\mathbf{w} = 2\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$ [m/s] volt? (2,5 p.)

Megoldás:

a) $$\mathbf{r}(t) = \frac{A}{B}(1-\cos(Bt))\,\mathbf{i} + \left(\frac{C}{D+t} - \frac{C}{D}\right)\mathbf{j} =$$

$$= \frac{0{,}05}{\pi^2}(1-\cos(2{,}4\pi t))\,\mathbf{i} + \left(\frac{0{,}8}{2+t} - 0{,}4\right)\mathbf{j} = 5{,}066\cdot10^{-3}(1-\cos(2{,}4\pi t))\,\mathbf{i} + \left(\frac{0{,}8}{2+t} - 0{,}4\right)\mathbf{j}\ \ [m]$$

b) $$\mathbf{a}(t) = AB\cos(Bt)\,\mathbf{i} + \frac{2C}{(D+t)^3}\,\mathbf{j} = 0{,}288\cos(2{,}4\pi t)\,\mathbf{i} + \frac{1{,}6}{(2+t)^3}\,\mathbf{j}\ \ [m/s^2];\qquad m_B = 0{,}024\ kg;$$

$$\mathbf{F_B}(t) = m_B\,\mathbf{a}(t) = 6{,}912\cdot10^{-3}\cos(2{,}4\pi t)\,\mathbf{i} + \frac{0{,}0384}{(2+t)^3}\,\mathbf{j}\ \ [N]$$

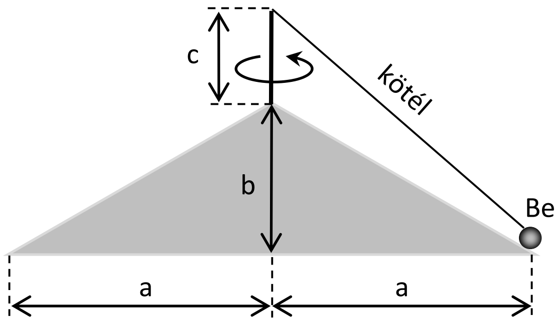
c) $$\mathbf{v}(2) = \frac{0{,}12}{\pi}\sin(2{,}4\pi\cdot2)\,\mathbf{i} - \frac{0{,}8}{(2+2)^2}\,\mathbf{j} = 0{,}02245\,\mathbf{i} - 0{,}05\,\mathbf{j}\ ;\qquad |\mathbf{v}(2)| = 0{,}05481$$

$|\mathbf{w}| = 3{,}606$;

$\mathbf{v}(2)\cdot\mathbf{w} = 0{,}02245\cdot0 + (-0{,}05\cdot2) + (0\cdot-3) = -0{,}1$

$\cos\varphi = -0{,}1 / (0{,}05481\cdot3{,}606) = -0{,}5060 \quad\rightarrow\quad \varphi = 120{,}4°$

2. A séta után Bella felült a körhintájukra.
A körhintájuk keresztmetszete az ábrán látható.



a = 24 cm, b = 10 cm, c = 8 cm.

Bella a kúpos felület aljára mászva megfogta a kötelet, majd elindította a motort, és a körhinta egyenletes forgásba kezdett.

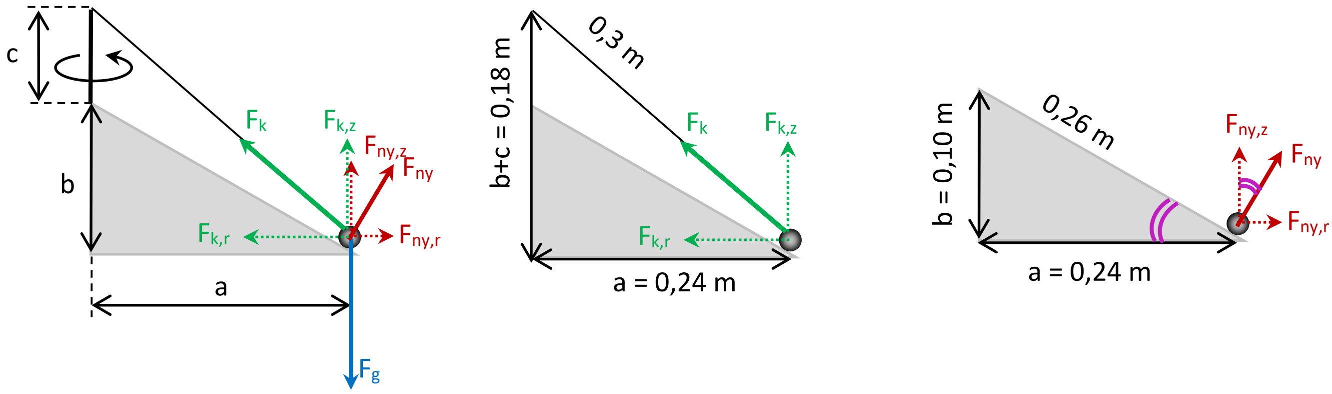
Bella tömege m_B = 2,4 dkg.

a) Mekkora erővel nyomta a körhinta felülete Bellát, ha Bella a kötelet 0,18 N erővel tartotta? (3 p.)

b) Mennyi idő alatt tett meg egy kört Bella a körhintán? (2,5 p.)

Megoldás:

Bellára hat az $\mathbf{F_g}$ nehézségi erő, az $\mathbf{F_k}$ kötélerő és a lejtő által kifejtett $\mathbf{F_{ny}}$ nyomóerő.



A körpálya síkja vízszintes, így a függőleges erőkomponensek eredője zérus:

$$F_{k,z} + F_{ny,z} - mg = 0 \qquad (1)$$

A vízszintes erőkomponensek eredője a körpálya közepe felé mutat és nagysága ma_{cp}:

$$ma_{cp} = F_{k,r} - F_{ny,r} \qquad (2)$$

Az ábráról látszik, hogy

$$F_{k,z} = (0{,}18/0{,}3)\cdot F_k = (0{,}18/0{,}3)\cdot 0{,}18 = 0{,}108 \text{ N} \quad \text{és} \quad F_{k,r} = (0{,}24/0{,}3)\cdot F_k = (0{,}24/0{,}3)\cdot 0{,}18 = 0{,}144 \text{ N};$$

$$F_{ny,z} = (0{,}24/0{,}26)\cdot F_{ny} \quad \text{és} \quad F_{ny,r} = (0{,}10/0{,}26)\cdot F_{ny}.$$

Ezeket beírva az (1) egyenletbe megkapjuk a nyomóerőt:

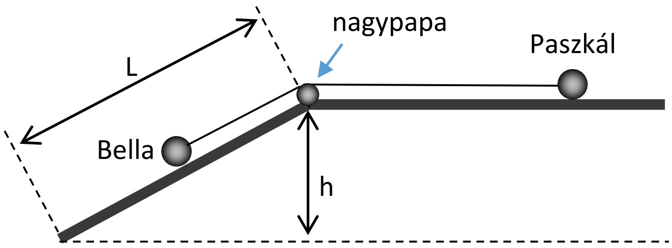
$$0{,}108 + (0{,}24/0{,}26)\cdot F_{ny} - 0{,}024\cdot 10 = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} = 0{,}143 \text{ N},$$

és annak ismeretében (2)-ből kiszámolható a centripetális gyorsulás, és abból a periódusidő:

$$0{,}024\, a_{cp} = 0{,}144 - (0{,}10/0{,}26)\cdot 0{,}143 \quad \rightarrow \quad a_{cp} = 3{,}708 \text{ m/s}^2;$$

$$a_{cp} = r\omega^2 = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \text{ a körpálya sugara } 0{,}24 \text{ m} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{a_{cp}}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}24}{3{,}708}} = 1{,}598 \text{ s}.$$

3. A terasz szélén egy L = 80 cm hosszú sík lejtő kezdődik, ami a 40 cm-rel alacsonyabban levő kertbe vezet le. Bella (m_B = 2,4 dkg) és Paszkál (m_P = 2,8 dkg) összekötötték magukat egy (elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan) kötéllel, Bella a lejtő közepére mászott, a kötelet átvetették a terasz és a lejtő találkozásánál szundikáló nagypapájuk házán (ami ideális csigaként viselkedett), és Paszkál a teraszon úgy helyezkedett el, hogy a kötél feszes legyen.



Ezután különböző kísérletekbe kezdtek, amiket Paszkál a mechanika beadandójában akart kiértékelni.

Köztudott, hogy a csigák széles határok között tudják változtatni a súrlódási együtthatójukat.

a) Először azt próbálták ki, hogy Paszkál meg tudja-e tartani Bellát, ha Bella teljesen behúzódik a házába és nulla lesz a súrlódási együtthatója. Mekkora tapadási súrlódási együtthatója kell legyen Paszkálnak ahhoz, hogy ne kezdjenek el csúszni? (2 p.)

b) Utána meglökték magukat 0,16 cm/s sebességgel úgy, hogy Bella lefelé csússzon a lejtőn, és a súrlódási együtthatójukat mindketten 0,18-ra változtatták. Mekkora volt így a gyorsulásuk és mekkora volt az az F* erő, ami a köztük levő kötelet feszítette? (2,5 p.)

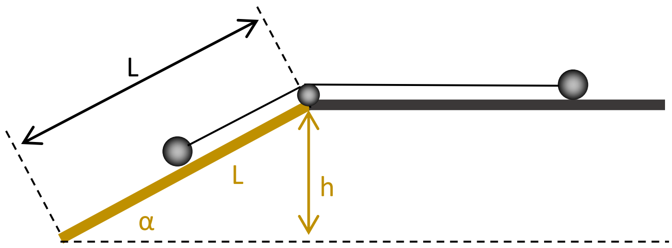
c) Ekkor felébredt a nagypapájuk, és elkezdte húzni a vízszintes kötéllel Paszkált maga felé éppen F* nagyságú erővel. Bella csodálkozva nézte, hogy mi történik, ő megállt a lejtőn ott, ahol volt, a kötél az ő irányába meglazult. Mekkora volt Paszkál gyorsulása, amikor a nagypapája húzta őt F* erővel? (0,5 p.)

d) Ezután a nagypapa hirtelen újra elaludt és visszaalakult ideális csigává. Bella ismét behúzódott a házába (a súrlódási együtthatója megint nulla lett), és a kötél újra megfeszült. Paszkál ezek után megindult 0,22 cm/s sebességgel és úgy változtatta meg a saját súrlódási együtthatóját, hogy állandó sebességgel csússzanak. Mekkora volt ekkor Paszkál súrlódási együtthatója? (1 p.)

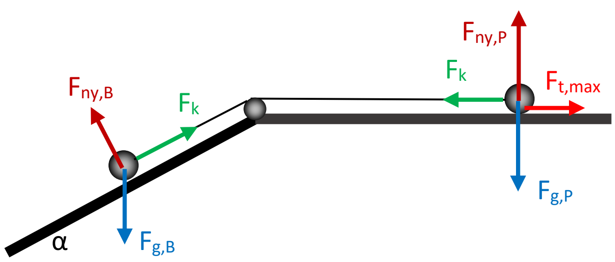
Megoldás:

A lejtő hajlásszöge

arcsin(h/L) = arcsin(0,4/0,8) = arcsin(0,5) = 30°



a)



Tapadnak: $a = 0$

Bella: $m_B g \sin\alpha - F_k = 0 \quad \rightarrow \quad F_k = m_B g \sin\alpha$;

Paszkál: $F_k - F_t = 0 \quad \rightarrow \quad F_t = F_k = m_B g \sin\alpha$,

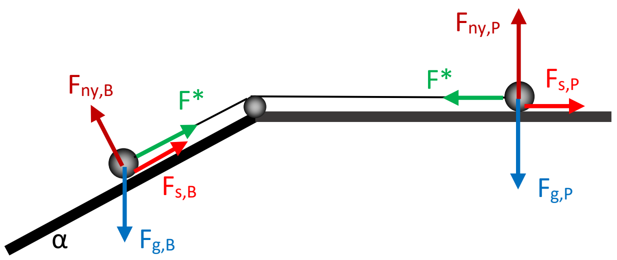
a tapadási súrlódási erő maximuma

$$F_{t,max} = \mu_t F_{ny,P} = \mu_t m_P g \,,$$

$F_t \leq F_{t,max}$: $\quad m_B g \sin\alpha \leq \mu_t m_P g$

$\rightarrow \quad \mu_t \geq m_B \sin\alpha / m_P = 0{,}24 \cdot 0{,}5 / 0{,}28 = 0{,}4286$

b)



Bella:

$F_{ny,B} = m_B\, g \cos\alpha$,

$F_{s,B} = \mu\, m_B\, g \cos\alpha$,

$m_B\, a = m_B\, g \sin\alpha - F^* - \mu\, m_B\, g \cos\alpha$

Paszkál:

$F_{ny,P} = m_P\, g$,

$F_{s,P} = \mu\, m_P\, g$,

$m_P\, a = F^* - \mu\, m_P\, g$

A két egyenletből

$$a = g\,(m_B(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu m_P) / (m_B + m_P) =$$

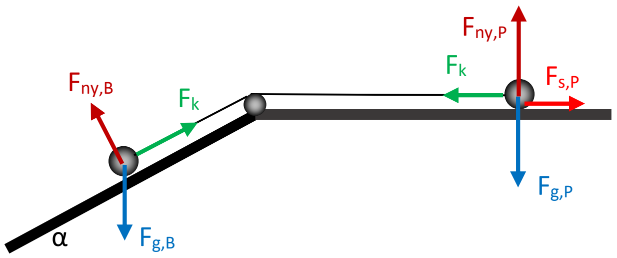
$$= 10\cdot(0{,}024\cdot(0{,}5 - 0{,}18\cdot\sqrt{3}/2) - 0{,}18\cdot 0{,}028) / (0{,}024 + 0{,}028) = 0{,}6190\ \mathrm{m/s^2}$$

A kötélerő

$$F^* = m_P\,(a + \mu g) = 0{,}028\cdot(0{,}6190 + 0{,}18\cdot 10) = 0{,}06773\ \mathrm{N}.$$

c) Paszkál gyorsulása ugyanakkora lesz, mint a **b)** feladatban (0,6190 $\mathrm{m/s^2}$), mert nem változik a rá ható erők nagysága.

d)



v = konst. → a = 0

Bella:

$m_B\, g \sin\alpha - F_k = 0$

Paszkál:

az új csúszási súrlódási együttható μ’

$F_k - \mu'\, m_P\, g = 0$

A felírt egyenletek lényegében azonosak az **a)** feladatban felírt egyenletekkel, mert mindkét esetben nulla a gyorsulás, az **a)** feladatban azért, mert el se indulnak a csigák, a **d)** feladatban azért, mert állandó sebességgel csúsznak. Ezért az állandó sebességű csúszáshoz ugyanakkora csúszási súrlódási együtthatóra van szükség, mint az **a)** feladatban kiszámolt tapadási súrlódási együttható: μ’ = 0,4286.

[Ha a felírt egyenleteket megoldjuk:

Belláéból $F_k = m_B\, g \sin\alpha$,

Paszkálé $\mu'\, m_P\, g = F_k = m_B\, g \sin\alpha$

→ $\mu' = m_B\, g \sin\alpha / (m_P g) = m_B \sin\alpha / m_P = 0{,}24\cdot 0{,}5/0{,}28 = 0{,}4286$]

4. A történet itt izgalmas fordulatot vett, ugyanis Joci és Frici, a vásott ikrek éppen arra jártak, rátaláltak a csigákra, felkapták őket (a kötelet levették róluk) és hazavitték őket a 4. emeleti lakásukba, mert ki akarták őket lőni csúzlival az ablakon. Joci Bellát lőtte ki ferdén felfelé, Frici Paszkált lőtte ki ferdén lefelé. Mindketten 8 m/s kezdősebességgel lőtték ki a csigájukat a vízszinteshez képest 30°-os szöggel, ugyanabban a pillanatban. Kiinduláskor a két csiga olyan közel volt egymáshoz, hogy a kiindulási pontjukat azonosnak tekinthetjük. A kilövés helye 12 m magasságban volt a földhöz képest.

a) Milyen távol volt Bella és Paszkál egymástól akkor,

amikor Bella a pályája legmagasabb pontján volt? (3 p.)

b) Mekkora volt ekkor Bella sebessége? (0,5 p.)

c) Szerencsére földetéréskor egyikük sem sérült meg. Milyen távolságra voltak egymástól, amikor mindketten földet értek? (A föld vízszintes sík felület a z = 0 magasságon.) (3 p.)

Megoldás:

Mindkét csiga vízszintes sebességkomponense $v_x = v_0 \cos 30° = 8 \cdot \sqrt{3}/2 = 6{,}928$ m/s.

Ugyanabban a pillanatban indulnak ugyanarról a helyről $\rightarrow$ az x koordinátájuk minden pillanatban megegyezik, Paszkál mindig Bella alatt lesz:

$x_B = x_P = 4\sqrt{3}\, t = 6{,}928\, t$ (x_0=0 választással)

A függőleges kezdősebességük nagysága $v_{0z} = v_0 \sin 30° = 8 \cdot 0{,}5 = 4$ m/s,

Belláé pozitív (mert felfelé dobta Joci), Paszkálé negatív (mert lefelé dobta Frici).

Bella: $v_{z,B} = 4 - 10t$; $z_B = 12 + 4\, t - (10/2)\, t^2$

Paszkál: $v_{z,P} = -4 - 10t$; $z_B = 12 - 4\, t - (10/2)\, t^2$

a) A pálya legmagasabb pontján $v_{z,B} = 0$: $4 - 10t_1 = 0 \rightarrow t_1 = 0{,}4$ s.

ekkor a köztük levő T távolság a z koordinátáik különbsége lesz:

$$T = z_B(t_1) - z_P(t_1) = (12 + 4t_1 - (10/2)t_1^2) - (12 - 4t_1 - (10/2)t_1^2) = 4t_1 - (-4t_1) = 8 \cdot 0{,}4 = 3{,}2 \text{ m.}$$

b) Bella sebessége a pályája csúcspontján vízszintes, a nagysága $v_x = 6{,}928$ m/s.

Vektorként felírva $\mathbf{v_B}(t_1) = v_x\, \mathbf{i} = 6{,}928\, \mathbf{i}$ [m/s].

c) A z(t)=0 egyenletből kiszámoljuk az időt, amikor földet érnek, és azt behelyettesítjük x(t)-be:

Bella: $12 + 4\, t_B - (10/2)\, t_B^2 = 0 \rightarrow t_B = 2$ s $\rightarrow x_B(t_B) = 4\sqrt{3} \cdot 2 = 8\sqrt{3} = 13{,}86$ m;

Paszkál: $12 - 4\, t_P - (10/2)\, t_P^2 = 0 \rightarrow t_P = 1{,}2$ s $\rightarrow x_P(t_P) = 4\sqrt{3} \cdot 1{,}2 = 4{,}8\sqrt{3} = 8{,}314$ m;

a köztük levő távolság $x_B(t_B) - x_P(t_P) = (8 - 4{,}8)\sqrt{3} = 3{,}2\sqrt{3} = 5{,}543$ m.