Fizika 1 - Mechanika számolási gyakorlat pót zh2 2023. jún. 1. megoldás

1. Vízszintes, súrlódásmentes síkon egy rugó végére 20 dkg tömegű golyót rögzítettünk. A rugó másik vége rögzítve van. A 40 cm-es rugó 16 cm-rel való kihúzásához 2 N erőre van szükség.

a) Mekkora a rugóállandó? 0,5 p.

b) Mekkora munkát végeztünk a rugó kihúzásakor? 1 p.

A golyót elengedjük a 16 cm-es kihúzásról.

c) Mekkora lesz a rezgésidő? 1 p.

d) Mekkora a golyó maximális sebessége? 1 p.

e) Mekkora erővel hat a rugó a golyóra 4 s-mal a golyó elengedése után? 2 p.

Megoldás:

a) $k = F/\Delta\ell = 2/0{,}16 = 12{,}5$ N/m 0,5 p.

b) $W = -\Delta E_{pot} = -(½kx_{vég}^2 - ½kx_{kezdeti}^2) = ½k\,(x_{kezdeti}^2 - x_{vég}^2) = 0{,}5\cdot 12{,}5\cdot(0{,}16^2 - 0) = 0{,}16$ J 1 p.

c) $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{0{,}20/12{,}5} = 0{,}7948$ s 1 p.

d) $v_{max} = A\omega$; $A = |\Delta x(0)| = 0{,}16$ m; $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{12{,}5/0{,}20} = 7{,}906\ s^{-1}$; $v_{max} = 1{,}265$ m/s 1 p.

e) $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0) = 0{,}16\cos(7{,}906t)$; $x(4) = 0{,}16\cos(7{,}906\cdot 4) = 0{,}1566$ m;

$F = -kx$, tehát $F(4) = -k\,x(4) = -12{,}5\cdot 0{,}1566 = -1{,}957$ N;

vagy:

$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0) = -0{,}16\cdot 0{,}7906^2\cos(7{,}906t) = -10\cos(7{,}906t)$,

$a(4) = -10\cos(7{,}906\cdot 4) = -9{,}787\ m/s^2$; $F = ma$, tehát $F(4) = 0{,}20\cdot(-9{,}787) = -1{,}957$ N. 2 p.

2. A szekrény tetején, 2,2 m magasan van egy rugó vízszintes helyzetben. A rugó úgy van rögzítve, hogy alapállapotban a rugó vége éppen a szekrény széléig ér. Összenyomjuk a rugót 30 cm-rel és összekötjük egy kötéllel, ekkor a rugót 150 N erővel tartja a kötél összenyomva. Az összenyomott rugó elé teszünk egy 2,5 kg-os testet. Elvágjuk a kötelet, a rugó gyorsítja a testet és lelöki a szekrényről. A test egy 1 m magas asztalra esik rá. Töltse ki az alábbi táblázatot!
A súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható.
A helyzeti energiát **a padló szintjén** vegye nullának (onnan a szekrény teteje 2,2 m, az asztal lapja 1 m.)

Megoldás:
A rugóállandó: $k = F/\Delta\ell = 150/0{,}3 = 500$ N/m 0,5 p.
A táblázatban be vannak számozva az állapotok, az energiák annak megfelelően vannak indexelve.
A test potenciális energiája $E_{pot} = mgh$:
a szekrény tetején $h_{123} = 2{,}2$ m $\rightarrow$ $E_{pot,test,123} = 2{,}5\cdot10\cdot2{,}2 = 55$ J,
az asztal fölött 1 m-rel $h_4 = 2$ m $\rightarrow$ $E_{pot,test,4} = 2{,}5\cdot10\cdot2 = 50$ J,
az asztalon $h_5 = 1$ m $\rightarrow$ $E_{pot,test,5} = 2{,}5\cdot10\cdot1 = 25$ J.
A rugó potenciális energiája
30 cm-rel összenyomva $x_1 = 0{,}3$ m $\rightarrow$ $E_{pot,rugó,1} = ½kx^2 = 0{,}5\cdot500\cdot0{,}3^2 = 22{,}5$ J,
10 cm-rel összenyomva $x_2 = 0{,}1$ m $\rightarrow$ $E_{pot,rugó,2} = ½kx^2 = 0{,}5\cdot500\cdot0{,}1^2 = 2{,}5$ J,
az asztal szélénél $x_{345} = 0$ $\rightarrow$ $E_{pot,rugó,345} = 0$.
A kezdeti állapotban $v_1 = 0$ $\rightarrow$ $E_{kin,1} = 0$,
ebben az állapotban ki tudjuk számolni a mechanikai energiát:
$E_{mech,1} = E_{pot,test,1} + E_{pot,rugó,1} + E_{kin,1} = 55 + 22{,}5 + 0 = 77{,}5$ J.
Mivel a súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható, ezért E_{mech} = konst. 0,5 p.
Ebből ki tudjuk számolni minden állapotra a mozgási energiát: $E_{kin} = E_{mech} - (E_{pot,test} + E_{pot,rugó})$.

		a test mozgási energiája [J]	a test + rugó rendszer potenciális energiája [J]	a test + rugó rendszer mechanikai energiája [J]		
1	amikor a rugó 30 cm-rel van összenyomva	0	55+22,5 = 77,5	77,5	2	
2	amikor a rugó 10 cm-rel van összenyomva	20	55+2,5 = 57,5	77,5	1,5	
3	amikor a test a szekrény szélére ér	22,5	55+0 = 55	77,5	1	
4	amikor a test 1 m-rel van magasabban az asztalnál	27,5	50+0 = 50	77,5	1	
5	amikor a test az asztalra érkezik	52,5	25+0 = 25	77,5	1	

3. Egy m_1 = 2,4 kg-os és egy m_2 = 0,6 kg-os test ütközik egymással egy vízszintes, súrlódásmentes síkon. Az m_1 test az ütközés helyére 2,5 m/s sebességgel érkezett. Az ütközést tökéletesen rugalmatlannak tekinthetjük, az összekapcsolódott testek u sebességgel mozognak abba az irányba, amerre m_1 mozgott az ütközés előtt.
Töltse ki az alábbi táblázatot u kétféle értékére!
Az értékeket előjellel együtt adja meg, úgy, hogy **a pozitív irány m_1 sebességének iránya legyen**.

Megoldás:
Impulzus-megmaradással számolhatunk, mivel $\Sigma F_{külső} = 0$.
Az össz-impulzust az ütközés utáni állapotból tudjuk kiszámolni:

$p_{össz} = (m_1 + m_2)\,u$: $p_{össz,A} = (2{,}4+0{,}6)\cdot 2{,}3 = 6{,}9$ kg m/s; $p_{össz,B} = (2{,}4+3{,}6)\cdot 1{,}7 = 5{,}1$ kg m/s.

Ütközés előtt $p_1 = m_1 v_1 = 2{,}4\cdot 2{,}5 = 6$ kg m/s és $p_2 = m_2 v_2 = 0{,}6\, v_2$.
Impulzus-megmaradás:

$p_1 + p_2 = p_{össz}$: $6 + 0{,}6v_2 = p_{össz}$

$\rightarrow$ $v_2 = (p_{össz} - 6) / 0{,}6$: $v_{2,A} = (6{,}9-6)/0{,}6 = 1{,}5$ m/s; $v_{2,A} = (5{,}1-6)/0{,}6 = -1{,}5$ m/s.

m_1 impulzusának változása az ütközés során

$\Delta p_1 = m_1\,(u - v_1)$: $\Delta p_{1,A} = 2{,}4(2{,}3-2{,}5) = -0{,}48$ kg m/s; $\Delta p_{1,B} = 2{,}4(1{,}7-2{,}5) = -1{,}92$ kg m/s

m_2 impulzusának változása az ütközés során

$\Delta p_2 = m_1\,(u - v_2)$: $\Delta p_{2,A} = 0{,}6(2{,}3-1{,}5) = 0{,}48$ kg m/s; $\Delta p_{2,B} = 0{,}6(1{,}7-(-1{,}5)) = 1{,}92$ kg m/s,
de ezeket nem is kell így kiszámolni, mivel $\Delta p_2 = -\,\Delta p_1$ (mert $p_{össz}$ = konst.)

A rendszer össz-energiája

$E_{kin,össz} = E_{kin,1} + E_{kin,2}$

Az ütközés előtt

$E_{kin,össz} = ½m_1v_1^2 + ½m_2v_2^2 = 0{,}5\cdot 2{,}4\cdot 2{,}5^2 + 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot v_2^2 = 7{,}5 + 0{,}3v_2^2$:

$E_{kin,össz,A} = 7{,}5 + 0{,}3\cdot 1{,}5^2 = 8{,}175$ J; $E_{kin,össz,B} = 7{,}5 + 0{,}3\cdot(-1{,}5)^2 = 8{,}175$ J.

Az ütközés után

$E_{kin,össz} = ½m_1u^2 + ½m_2u^2 = ½(m_1+m_2)u^2 = 0{,}5\cdot(2{,}4 + 0{,}6)\cdot u^2 = 1{,}5\,u^2$:

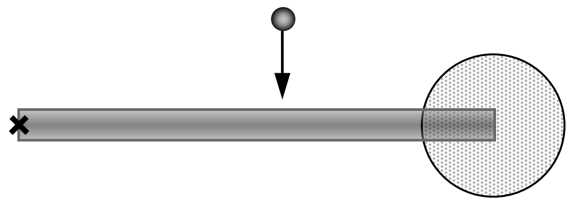
$E_{kin,össz,A} = 1{,}5\cdot 2{,}3^2 = 7{,}935$ J; $E_{kin,össz,B} = 1{,}5\cdot 1{,}7^2 = 4{,}335$ J.

A mechanikai energia nem marad meg, mert az ütközés rugalmatlan (csökken a deformációs munka miatt).

	u_A = 2,3 m/s	u_B = 1,7 m/s		
a rendszer össz-impulzusa	6,9 kg m/s	5,1 kg m/s	1	
m_2 sebessége az ütközés előtt	1,5 m/s	–1,5 m/s	2	
m_1 impulzusának változása az ütközés során	–0,48 kg m/s	–1,92 kg m/s	1	
m_2 impulzusának változása az ütközés során	0,48 kg m/s	1,92 kg m/s	1	
a rendszer össz-energiája az ütközés előtt	8,175 J	8,175 J	1	
a rendszer össz-energiája az ütközés után	7,935 J	4,335 J	1	

4. Az 1,2 m hosszú, 0,8 kg tömegű rúd végéhez egy 10 cm sugarú, 0,2 kg tömegű korongot erősítettünk az ábrán látható módon. A rúd + korong rendszer a rúd másik végén átmenő, a rúdra merőleges tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat vízszintes síkban.
Tehetetlenségi nyomaték képletek:

rúd a felezőpontján átmenő, rúdra merőleges tengelyre	rúd a végpontján átmenő, rúdra merőleges tengelyre	henger, korong
$\frac{1}{12}\,m\,\ell^2$	$\frac{1}{3}\,m\,\ell^2$	$\frac{1}{2}\,m\,R^2$



a) Milyen távol van a forgástengelytől a rúd + korong rendszer tömegközéppontja? 1,5 p.
b) Mekkora a rúd + korong rendszer tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva? 2 p.
c) Az ábra szerint egy 0,1 kg tömegű pici (tömegpontnak tekinthető) gyurmagolyót lökünk neki a rúd felezőpontjának. A rúdhoz érve a gyurmagolyó sebessége 8 m/s, és az ütközéskor a rúdra tapad.
Mekkora szögsebességgel kezd forogni a rúd + korong + gyurmagolyó rendszer? 2,5 p.

Megoldás: $m_r = 0{,}8$ kg, $\ell = 1{,}2$ m, $m_k = 0{,}2$ kg, $R = 0{,}1$ m.
a) Legyen x=0 a forgástengelynél, így a kiszámolt x_s koordináta egyenlő lesz a tengelytől vett távolsággal.
A rúd tömegközéppontja $x_r = \ell/2 = 1{,}2/2 = 0{,}6$ m -nél van, a korongé $x_k = \ell = 1{,}2$ m-nél.
$x_s = (x_r m_r + x_k m_k) / (m_r + m_k) = (0{,}6\cdot0{,}8 + 1{,}2\cdot0{,}2) / (0{,}8+0{,}2) = 0{,}72$ m. 1,5 p.
b) A rúd a végpontja körül forog, tehát
$\Theta_r = \frac{1}{3}\,m_r\,\ell^2 = \frac{1}{3}\cdot0{,}8\cdot1{,}2^2 = 0{,}384$ kg m^2. 0,5 p.
Vagy: a rúd tömegközéppontja x_r távolságra van a tengelytől, tehát $d_r = x_r = 0{,}6$ m,
$\Theta_r = \frac{1}{12}\,m_r\,\ell^2 + m_r\,d_r^2 = \frac{1}{12}\cdot0{,}8\cdot1{,}2^2 + 0{,}8\cdot0{,}6^2 = 0{,}096 + 0{,}288 = 0{,}384$ kg m^2.
A korong tömegközéppontja x_k távolságra van a tengelytől, tehát $d_k = x_k = 1{,}2$ m,
$\Theta_k = \frac{1}{2}\,m_k\,R^2 + m_k\,d_k^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}2\cdot0{,}1^2 + 0{,}2\cdot1{,}2^2 = 0{,}001 + 0{,}288 = 0{,}289$ kg m^2. 1 p.
A rúd + korong rendszer tehetetlenségi nyomatéka
$\Theta_{r+k} = \Theta_r + \Theta_k = 0{,}384 + 0{,}289 = 0{,}673$ kg m^2. 0,5 p.
c) Impulzusmomentum-megmaradással számolhatunk.
Ütközés előtt a
rúd + korong rendszer nyugalomban van, impulzusmomentuma zérus;
az m = 0,1 kg tömegű golyó v = 8 m/s sebességgel mozog, úgy, hogy a sebességén átmenő egyenes távolsága a forgástengelytől $k = \ell/2 = 0{,}6$ m, tehát az impulzusmomentuma
$L = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}| = mvk = 0{,}1\cdot0{,}8\cdot0{,}6 = 0{,}048$ kg m^2/s;
ennyi az össz-impulzusmomentum az ütközés előtt, $L_{előtt} = 0{,}048$ kg m^2/s. 1 p.
Ütközés után a rúd + korong + gyurmagolyó rendszer forgó mozgást végez,
$L_{után} = \Theta_{r+k+g}\,\omega$.
A **b)**-ben kiszámolt Θ_{r+k} tehetetlenségi nyomatékhoz hozzá kell adni a gyurmagolyó tehetetlenségi nyomatékát. Az $m_g = 0{,}1$ kg tömegű golyó (tömegpont) távosága a tengelytől $d_g = \ell/2 = 0{,}6$ m.
$\Theta_{r+k+g} = \Theta_{r+k} + \Theta_g = \Theta_{r+k} + m_g\,d_g^2 = 0{,}673 + 0{,}1\cdot0{,}6^2 = 0{,}673 + 0{,}036 = 0{,}709$ kg m^2/s. 0,5 p.
Tehát
$L_{előtt} = L_{után}$: $mvk = \Theta_{r+k+g}\,\omega$ 0,5 p.
$0{,}048 = 0{,}709\,\omega \quad\rightarrow\quad \omega = 0{,}06770\ \text{s}^{-1}$. 0,5 p.