Fizika 1 - Mechanika számolási gyakorlat pót zh1 2023. jún. 5. megoldás

1. Egy m = 0,5 kg tömegű test sebességét az alábbi függvény adja meg:

$\mathbf{v}(t) = (6 t^2 – 8)\ \mathbf{i} + 12 \sin(3t)\ \mathbf{j}$ [m/s].

A test a t = 0 s-ban az $\mathbf{r_0} = – 4\ \mathbf{i} – 4\ \mathbf{j}$ [m] pontból indul.

a) Hol lesz a test t = 2π s -ban? (3,5 p.)

b) A testre két erő hat. Adja meg az $\mathbf{F_1}(t)$ erővektort, ha

$\mathbf{F_2}(t) = 2\ \mathbf{i} + 18 \cos(3t)\ \mathbf{j}$ [N] (2,5 p.)

Megoldás:

a) $v_x = 6t^2–8$ és $x(0) = –4$ → $x(t) = 2t^3 – 8t – 4$; $x(2\pi) = 441,8$ m;

$v_y = 12 \sin(3t)$ és $y(0) = –4$ → $y(t) = – 4 \cos(3t)$; $y(2\pi) = –4$ m;

a test az $\mathbf{r}(2\pi) = 441,8\ \mathbf{i} – 4\ \mathbf{j}$ [m] pontban lesz.

b) $a_x = 12t$, $a_y = 36 \cos(3t)$, $\mathbf{a} = 12t\ \mathbf{i} + 36 \cos(3t)\ \mathbf{j}$ [m/s^2].

$m\ \mathbf{a} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$

$m\ \mathbf{a} = 0,5 (12t\ \mathbf{i} + 36 \cos(3t)\ \mathbf{j}) = 6t\ \mathbf{i} + 18 \cos(3t)\ \mathbf{j}$ [N]

$\mathbf{F_1} = m\ \mathbf{a} – \mathbf{F_2} = (6t\ \mathbf{i} + 18 \cos(3t)\ \mathbf{j}) – (2\ \mathbf{i} + 18 \cos(3t)\ \mathbf{j}) = (6t – 2)\ \mathbf{i}$ [N]

2. Eldobunk egy kis labdát az erkélyről, 12 m magasról. A labda kezdősebessége a vízszintessel 42°-os szöget zár be felfelé, és a nagysága $v_0 = 7,2$ m/s. Előttünk 8 m-re van egy másik ház, ami 30 m magas.

a) Mennyi idő alatt ér a labda a másik ház falához? (1,5 p.)

b) Milyen magasan éri el a falat? (1,5 p.)

c) Mekkora a labda sebességének nagysága a falhoz érkezéskor? (1,5 p.)

d) Hol lesz a test az eldobás után 1,2 s-mal? Adja meg a test koordinátáit és az eldobás helyétől vett távolságát is. (2,5 p.)

Megoldás:

$v_x = v_0\cos\alpha = 7,2\cdot\cos42° = 5,351$ m/s = konst.,

$x(t) = v_0\cos\alpha\cdot t = 5,351\ t$;

$v_{0z} = v_0\sin\alpha = 7,2\cdot\sin42° = 4,818$ m/s, $v_z = v_0\sin\alpha – gt = 4,818 – 10t$,

$z(t) = z_0 + v_0\sin\alpha\cdot t – ½\ gt^2 = 12 + 4,818t – 5t^2$.

a) $x(t_1) = 8$ m: $t_1 = 8/5,351 = 1,495$ s alatt ér a falhoz.

b) t_1-nél $z(t_1) = 12 + 4,818\cdot1,495 – 5\cdot1,495^2 = 8,026$ m-rel van a föld fölött.

c) $v_x = 5,351$ m/s; t_1-nél $v_z(t_1) = 4,818–10\cdot1,495 = –10,13$ m/s;

a sebesség nagysága Pitagorasz-tétellel $v(t_1) = 11,46$ m/s.

d) $t_2 = 1,2$ s: $x(t_2) = 5,351\cdot1,2 = 6,421$ m; $z(t_2) = 12 + 4,818\cdot1,2 – 5\cdot1,2^2 = 10,58$ m.

Az elmozdulás-vektor $\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}(t_2) – \mathbf{r}(t_0) = (6,421\ \mathbf{i} + 10,58\ \mathbf{k}) – (0\ \mathbf{i} + 12\ \mathbf{k}) = 6,421\ \mathbf{i} – 1,419\ \mathbf{k}$ [m];

Pitagorasz-tétellel $|\mathbf{\Delta r}| = \sqrt{6,421^2+(-1,419)^2} = 6,576$ m.

3. Vízszintessel 20°-ot bezáró sík lejtőn van egy 5 kg tömegű test. A test és a felület közötti tapadási súrlódási együttható 0,33; a csúszási súrlódási együttható 0,18. A testhez egy kötél van kötve, amit a lejtő tetején lévő (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű) csigán átvetettünk, és egy 3 kg-os testet rögzítettünk a végére, ami függőlegesen lóg a kötél végén.

Mekkora a testek gyorsulása, mekkora a kötélerő, és mekkora a súrlódási erő, ha az 5 kg tömegű testet

a) meglökjük lefelé a lejtőn 2 m/s sebességgel? (4,5 p.)

b) kezdősebesség nélkül tesszük a lejtőre? (3,5 p.)

	v_0 = 2 m/s	v_0 = 0
gyorsulás		
kötélerő		
súrlódási erő		

Megoldás:

m_1 = 5 kg, m_2 = 3 kg; α = 20°; μ = 0,18; μ_t = 0,33.

Az 5 kg-os testre a lejtő által kifejtett nyomóerő $F_{ny} = m_1 g \cdot \cos\alpha = 46{,}98$ N, mivel csak a nehézségi erőnek van a lejtőre merőleges komponense.

a) Az m_1 = 5 kg-os test a lejtőn lefelé mozog, ez lesz a pozitív irány.

A testek mozgásban vannak, tehát csúszási súrlódási erő hat m_1-re,

$$F_s = \mu\, F_{ny} = 0{,}18 \cdot 46{,}98 = 8{,}457 \text{ N}.$$

A mozgásegyenletek:

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - F_s - F_k = m_1 g \sin\alpha - \mu\, mg \cos\alpha - F_k$$

$$m_2 a = F_k - m_2 g$$

Ebből a gyorsulás

$$a = g\,(\, m_1 (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) - m_2\,) \,/\, (\, m_1 + m_2) = -2{,}670 \text{ m/s}^2 ,$$

a kötélerő

$$F_k = m_2 a + m_2 g = m_1 g \sin\alpha - \mu\, mg \cos\alpha - m_1 a = 21{,}99 \text{ N}.$$

b) Először vizsgáljuk meg, hogy a testek merre kezdenének álló helyzetből gyorsulni, ha nem lenne súrlódás. Az m_1 testet a lejtőn lefelé $m_1 g \sin\alpha = 17{,}10$ N gyorsítaná, az m_2 testet pedig $m_2 g = 30$ N gyorsítaná lefelé. Tehát ha nem lenne súrlódás, akkor m_1 felfelé indulna a lejtőn, ezért a (tapadási) súrlódási erő lefelé mutat. Tegyük fel, hogy a testek tapadnak, azaz a=0, és írjuk fel a mozgásegyenleteket (a pozitív irány a lejtőn felfelé mutat):

$$m_1 a = 0 = F_k - m_1 g \sin\alpha - F_t$$

$$m_2 a = 0 = m_2 g - F_k \quad \rightarrow \quad F_k = m_2 g = 30 \text{ N}.$$

Ezekből

$$F_t = m_2 g - m_1 g \sin\alpha = 30 - 17{,}10 = 12{,}90 \text{ N}.$$

A tapadási súrlódási erő maximális értéke $F_{t,max} = \mu_t\, F_{ny} = 0{,}33 \cdot 49{,}38 = 15{,}50$ N.

$$F_t = 12{,}90 \text{ N} \quad < \quad F_{t,max} = 15{,}50 \text{ N} ,$$

tehát a testek nem kezdenek el gyorsulni, $a = 0$, $F_t = 12{,}90$ N, $F_k = 30$ N.

4. Egy 900 kg tömegű versenyautó egy körív alakú kanyart vesz be. A kanyar sugara 32 m.

a) Mekkora maximális állandó sebességgel tudja bevenni a kanyart, hogy ne csússzon meg, ha az aszfalt vízszintes, és a tapadási súrlódási együttható 0,8? (1,5 p.)

b) Mekkora az aszfalt által az autóra kifejtett tapadási súrlódási erő, ha az autó 43,2 km/h-val megy a kanyarban? (1 p.)

c) Mekkora sebességgel tud végigmenni megcsúszás nélkül a kanyaron az autó, ha a kanyar α = 6°-kal lejt befelé (a körív közepe felé), és a súrlódás elhanyagolható? (1,5 p.)

Megoldás:

a) Az autót a kisodródástól az védi még, hogy a kerekei és az aszfalt között tapadási súrlódási erő lép fel, ami a kör közepe felé mutat, tehát

$m\, a_{cp} = F_t$.

A tapadási súrlódási erő maximális értéke

$F_{t,max} = \mu_t\, F_{ny} = \mu_t\, mg = 0{,}8\cdot 900\cdot 10 = 7200$ N.

a_{cp}-t kifejezzük a sebességgel:

$a_{cp} = v^2/r$, így $F_t = m\, v^2/r$,

tehát

$F_t \le F_{t,max}$: $m\, v^2/r \le \mu_t\, mg \quad \rightarrow \quad v^2 \le \mu_t\, rg$.

A maximális sebességnél

$v_{max}^2 = \mu_t\, rg = 0{,}8\cdot 32\cdot 10 = 256 \quad \rightarrow \quad v_{max} = 16$ m/s.

b) $v_2 = 43{,}2$ km/h = 12 m/s.

$F_t = m\, v^2/r = 900\cdot 12^2/32 = 4050$ N.

c) Ld. az 5/8. feladat megoldását.

$m\, a_{cp} = m\, v_3^2/r = mg\, \text{tg}\alpha \quad \rightarrow \quad v_3^2 = rg\, \text{tg}\alpha = 32\cdot 10\cdot \text{tg}6° = 33{,}63 \quad \rightarrow \quad v_3 = 5{,}799$ m/s.