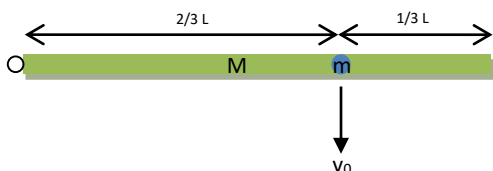


Egy vékony fonallal vízszintes helyzetben tartott, M tömegű, L hosszúságú, egyik végén csuklóval megfogott homogén rúdra a csuklótól $\frac{2}{3}L$ távolságra ráerősítünk egy m tömegű pontszerű testet. A fonalat elvágjuk, és ugyanabban a pillanatban az m tömegű testet (nem a rúd végpontját!) v_0 sebességgel meglökjük függőlegesen lefelé. Mekkora lesz a rúd végpontjának sebessége a függőleges helyzeten való áthaladásakor?



Megoldás

A rúd kezdeti szögsebessége a forgástengelytől $\frac{2}{3}L$ távolságban lévő pontjának sebességéből:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{\left(\frac{2}{3}L\right)} = \frac{3v_0}{2L}.$$

A függőleges helyzeten való áthaladás ω_f szögsebességét kiszámolhatjuk energia-megmaradással:

$$E_{\text{mech}} = mgz + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \text{konst.}$$

A helyzeti energia 0 szintjét a rúd kezdeti magasságához választva:

$$Mg \cdot 0 + mg \cdot 0 + \frac{1}{2} \Theta \omega_0^2 = Mg \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) + mg \cdot \left(-\frac{2L}{3}\right) + \frac{1}{2} \Theta \omega_f^2,$$

azaz
$$\frac{1}{2} \Theta \omega_0^2 = -\frac{3M+4m}{6} gL + \frac{1}{2} \Theta \omega_f^2.$$

A rúd és a ráerősített m tömeg együttes tehetetlenségi nyomatéka a rúd baloldali végén lévő forgástengelyre:

$$\Theta = \frac{1}{3} ML^2 + m \left(\frac{2L}{3}\right)^2 = \frac{3M+4m}{9} L^2,$$

ezt behelyettesítve az energia-megmaradásba:

$$\frac{1}{2} \frac{3M+4m}{9} L^2 \cdot \left(\frac{3v_0}{2L}\right)^2 = -\frac{3M+4m}{6} gL + \frac{1}{2} \frac{3M+4m}{9} L^2 \omega_f^2,$$

amiből

$$\omega_f = \sqrt{\left(\frac{3v_0}{2L}\right)^2 + \frac{3g}{L}}.$$

Ebből a rúd végpontjának sebessége

$$v_f = \omega_f L = \sqrt{\left(\frac{3v_0}{2}\right)^2 + 3gL}.$$