

Egy változtatható hajlásszögű lejtőre teszünk egy 10 cm sugarú, 60 cm hosszú, 50 kg tömegű tömör hengert. A henger és a lejtő közötti tapadási súrlódási együttható 0,4.

a) Legfeljebb mekkora lehet a lejtő α_{\max} hajlásszöge, hogy a henger a lejtőn megcsúszás nélkül tisztán gördüljön?

b) Mekkora az α_{\max} hajlásszögnél fellépő tapadási súrlódási erő értéke?

c) Mekkora lenne az α_{\max} hajlásszögnél fellépő tapadási súrlódási erő értéke, ha a tömör hengert kicserélnénk egy ugyanolyan tömegű, geometriájú és tapadási súrlódási együtthatójú hengerpalástra?

Megoldás:

$$R = 0,1 \text{ m}; \quad m = 50 \text{ kg}; \quad \mu_t = 0,4 ;$$

$$\Theta_{s,\text{henger}} = \frac{1}{2} mR^2 ; \quad \Theta_{s,\text{hengerpalást}} = mR^2 \quad (\text{a test hossza nem lényeges adat})$$

a) A 9/5. feladat alapján felírhatjuk, hogy

$$ma = mg \sin\alpha - F_t \quad (1)$$

$$\Theta_s \beta = F_t R \quad (2)$$

és ha a test tisztán gördül, akkor

$$a = R \beta \quad (3)$$

Ezekből

$$(3): \quad a = R\beta \quad \rightarrow \quad \beta = a/R;$$

$$(2): \quad \Theta_s \beta = F_t R \quad \rightarrow \quad F_t = \Theta_s a/R^2;$$

$$(1): \quad ma = mg \sin\alpha - F_t = mg \sin\alpha - \Theta_s a/R^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{\Theta_s}{m R^2}}$$

$$\rightarrow \quad F_t = \frac{mg \sin\alpha}{1 + \frac{\Theta_s}{m R^2}} .$$

A tapadási súrlódási erő maximuma

$$F_{t,\max} = \mu_t F_{Ny} = \mu_t mg \cos\alpha .$$

A tapadás feltétele:

$$F_t \leq F_{t,\max} : \quad \frac{mg \sin\alpha}{1 + \frac{\Theta_s}{m R^2}} \leq \mu_t mg \cos\alpha ,$$

amiből

$$\operatorname{tg}\alpha \leq \mu_t \left(1 + \frac{mR^2}{\Theta_s} \right) .$$

Behelyettesítve

$$\operatorname{tg}\alpha \leq 0,4 \cdot (1 + 1/0,5) = 1,2 \quad \rightarrow \quad \alpha \leq 50,19^\circ .$$

$$\mathbf{b)} \quad F_t = \frac{50 \cdot 10 \sin 50,19^\circ}{1 + \frac{50 \cdot 0,1^2}{0,5 \cdot 50 \cdot 0,1^2}} = \frac{500 \sin 50,19^\circ}{1 + 2} = 128,0 \text{ N.}$$

c) A tömör rudat hengerpalástra cserélve a tehetetlenségi nyomaték megváltozik:

$$\Theta_{s,\text{hengerpalást}} = mR^2.$$

Ezt behelyettesítve

$$F_t = \frac{50 \cdot 10 \sin 50,19^\circ}{1 + \frac{50 \cdot 0,1^2}{50 \cdot 0,1^2}} = \frac{500 \sin 50,19^\circ}{1 + 1} = 192,1 \text{ N}$$

jönne ki, de ellenőrizni kell, hogy teljesül-e a tapadás feltétele, vagyis tényleg tisztán gördül-e ez a test is, vagy megcsúszik.

Ennél a hajlásszögnél a tapadási súrlódási erő maximális értéke

$$F_{t,\max} = 0,4 \cdot 50 \cdot 10 \cdot \cos 50,19^\circ = 128,0 \text{ N}$$

(mint ahogy azt a **b)** feladatban is láttuk, mert α_{\max} -nál $F_t = F_{t,\max}$),

tehát a hengerpalást a lejtőn lefelé haladva megcsúszik.

Ahhoz, hogy csúszás nélkül gördüljön a test, nagyobb tapadási súrlódási együttható kellene:

$$F_t \leq F_{t,\max} : \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{m R^2}{\Theta_s}} \leq \mu_t mg \cos \alpha \rightarrow \mu_t \geq \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{1 + \frac{m R^2}{\Theta_s}} = 1,2 \cdot \frac{1}{1+1} = 0,6 .$$