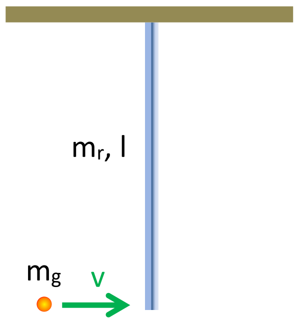
Függőlegesen fellógatott m_r = 35 dkg tömegű, ℓ = 60 cm hosszú homogén rúd alsó pontjához v = 8 m/s nagyságú vízszintes sebességgel érkezik egy m_g = 15 dkg tömegű golyó.



a) Mekkora a deformációs munka nagysága, ha a golyó hozzátapad a rúdhoz? (rugalmatlan ütközés)
b) Mekkora lesz a golyó sebessége és a rúd szögsebessége, ha rugalmas az ütközés? Milyen irányba (jobbra vagy balra) fog mozogni a golyó az ütközés után?

Megoldás:
a) A deformációs munka nagysága az ütközés előtti és utáni mechanikai energiák különbsége. (Mivel az ütközés pillanatában a potenciális energia nem változik, ezért a kinetikus energiákkal számolunk.)
Az ütközés előtt a golyó mozgási energiája

$$E_{kin,tr} = ½\, m\, v^2 = 0{,}5·0{,}15·8^2 = 4{,}8\text{ J.}$$

Ütközés után a rúd és a rátapadt golyó mozgási energiája $E_{kin,forg} = ½\, \Theta\, \omega^2$.
A rúd + golyó együttes tehetetlenségi nyomatéka a rúd felfüggesztési pontjára

$$\Theta = ⅓\, m_r\, \ell^2 + m_g\, \ell^2 = 0{,}35·0{,}6^2/3 + 0{,}15·0{,}6^2 = 0{,}096\text{ kg m}^2.$$

A 9/3. feladat szerint a rúd a rátapadt golyóval

$$\omega_0 = \frac{m_g}{m_g+m_r/3}\cdot\frac{v}{l}$$ szögsebességgel indul, azaz

$$\omega_0 = \frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}35_r/3}\cdot\frac{8}{0{,}6} = 7{,}5\text{ s}^{-1},$$ és

$$E_{kin,forg} = ½\, \Theta\, \omega^2 = 0{,}5·0{,}096·7{,}5^2 = 2{,}7\text{ J.}$$

A deformációs munka nagysága

$$W_{def} = E_{kin,tr} – E_{kin,forg} = 4{,}8–2{,}7 = 2{,}1\text{ J.}$$

b) Az ütközéskor az impulzus nem marad meg, mert a rúd felfüggesztésénél fellép egy erő, de mivel annak a forgatónyomatéka zérus, ezért az impulzus-momentum megmarad; és mivel az ütközés rugalmas, ezért megmarad az energia is.
A rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontjára $\Theta = ⅓\, m_r\, \ell^2 = 0{,}35·0{,}6^2/3 = 0{,}042\text{ kg m}^2$.
Az ütközés előtt a golyó sebessége v, a rúd áll:

$$L_{előtt} = \left|\mathbf{r}\times m_g\,\mathbf{v}\right| = m_g\, v\, \ell = 0{,}15·8·0{,}6 = 0{,}72\text{ kg m}^2\text{/s},$$

$$E_{kin,előtt} = ½\, m_g\, v^2 = 0{,}5·0{,}15·8^2 = 4{,}8\text{ J.}$$

Az ütközés után a golyó sebessége u, a rúd szögsebessége ω:

$$L_{után} = m_g\, u\, \ell + \Theta\, \omega = 0{,}15·0{,}6\, u + 0{,}042\, \omega = 0{,}09\, u + 0{,}042\, \omega,$$

$$E_{kin,után} = ½\, m_g\, u^2 + ½\, \Theta\, \omega^2 = 0{,}5·0{,}15\, u^2 + 0{,}5·0{,}042\, \omega^2 = 0{,}075\, u^2 + 0{,}021\, \omega^2.$$

Tehát az impulzusmomentum-megmaradás:

$$m_g\, v\, \ell = m_g\, u\, \ell + \Theta\, \omega \qquad 0{,}72 = 0{,}09\, u + 0{,}042\, \omega$$

Az energia-megmaradás:

$$½\, m_g\, v^2 = ½\, m\, u^2 + ½\, \Theta\, \omega^2 \qquad 4{,}8 = 0{,}075\, u^2 + 0{,}021\, \omega^2$$

Ezekből

$$u = \frac{3m_g - m_r}{3m_g + m_r}\, v = \frac{3·0{,}15-0{,}35}{3·0{,}15+0{,}35}\cdot 8 = 1\text{ m/s},$$

$$\omega = \frac{6m_g}{3m_g + m_r}\,\frac{v}{l}\, v = \frac{6·0{,}15}{3·0{,}15+0{,}35}\cdot\frac{8}{0{,}6} = 15\text{ s}^{-1}.$$