

Sütőtökből kivágtunk egy $10 \times 8 \times 6$ cm-es téglatestet, és a 10×8 cm-es lapjára merőlegesen átszúrtuk egy nyárrsal az ábrán jelölt A ponton.

Az A pont távolsága az átlók metszéspontjától 2 cm.

A sütőtökdarabnak az A ponton átszúrt nyársra mint forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_A = 8,904 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

a) Mennyi a sütőtök sűrűsége?

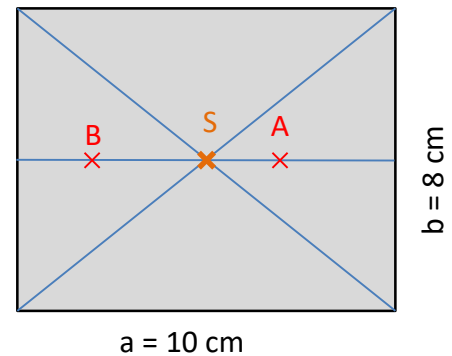
b) Mennyi a sütőtökdarab tehetetlenségi nyomatéka a B ponton átszúrt nyársra?

A B pont távolsága az átlók metszéspontjától 3 cm.

Téglatest tehetetlenségi nyomatéka a tömegközépponton átmenő tengelyre

$$\Theta_S = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

c) Rajzolja fel, hogyan kellene felszúrni az A ponton átmenő tengelyre egy 16 dkg tömegű, 12 cm hosszú, vékony rúdnak tekinthető répát, hogy a sütőtöknek + répának az A pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka annyi legyen, mint amennyi a sütőtöknek a B ponton átmenő tengelyre?



Megoldás:

a) A sütőtök sűrűségének meghatározásához szükségünk van a test térfogatára:

$$V = abc = 0,1 \cdot 0,08 \cdot 0,06 = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3,$$

a tömegét pedig a tehetetlenségi nyomatékából tudjuk kiszámolni.

Az A pont $d_A = 0,02$ m-re van a téglatest S középpontjától, ezért

$$\Theta_A = \Theta_S + m d_A^2 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) + m d_A^2 :$$

$$8,904 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{12} m (0,1^2 + 0,08^2) + m \cdot 0,02^2 = 1,76 \cdot 10^{-3} \cdot m \rightarrow m = 0,504 \text{ kg};$$

a sütőtök sűrűsége

$$\rho = m/V = 0,504 / 4,8 \cdot 10^{-4} = 1050 \text{ kg/m}^3.$$

b) A B pont $d_B = 0,03$ m-re van a téglatest S középpontjától, a rajta átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot a súlyponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékból számolhatjuk:

$$\Theta_B = \Theta_S + m d_B^2$$

$$\Theta_S = \Theta_A - m d_A^2 = 8,904 \cdot 10^{-4} - 0,504 \cdot 0,02^2 = 6,888 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2, \text{ vagy}$$

$$\Theta_S = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} \cdot 0,504 (0,1^2 + 0,08^2) = 6,888 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2;$$

$$\Theta_B = 6,888 \cdot 10^{-4} + 0,504 \cdot 0,03^2 = 11,424 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 = 1,1424 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

c) $\Theta_{\text{répa}} = \Theta_B - \Theta_A = (11,424 - 8,904) \cdot 10^{-4} = 2,52 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ kell legyen.

$m_{\text{répa}} = 0,16 \text{ kg}$, $l = 0,12 \text{ m}$.

A répa tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján (a rúd felénél) átmenő tengelyre

$$\Theta_{\text{rúd,S}} = \frac{1}{12} m_{\text{répa}} l^2,$$

és a tömegközéppontjától (a rúd felétől) $d_{\text{répa}}$ távolságra lesz felszúrva a nyársra, így arra a pontra a tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{\text{répa}} = \Theta_{\text{rúd,S}} + m_{\text{répa}} d_{\text{répa}}^2 :$$

$$2,52 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{12} \cdot 0,16 \cdot 0,12^2 + 0,16 \cdot d_{\text{répa}}^2 = 1,92 \cdot 10^{-4} + 0,16 \cdot d_{\text{répa}}^2$$

$$\rightarrow d_{\text{répa}} = 0,01936 \text{ m} = 1,936 \text{ cm} \approx 2 \text{ cm}.$$

A 12 cm-es répát a végétől $12 - (12/2 + 1,936) = 4,064 \approx 4$ cm-re kell átszúrni.

A répa tetszőlegesen el lehet forgatva a sütőtökhöz képest, pl.

