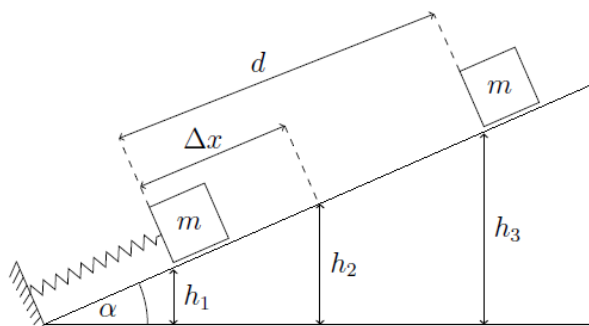


Adott az alábbi elrendezés:



A $\mu = 0.2$ súrlódási állandóval rendelkező $\alpha = 30^\circ$ szögű lejtő aljában h_1 magasságban egy $m = 5 \text{ kg}$ tömegű test kezdetben az összenyomott $k = 80 \text{ N/m}$ rugóállandóval rendelkező rugó végére van kötve ($v_1 = 0$). Egyszer csak elengedjük a testet, így azt a rugó kilöki, és amikor egyensúlyi állapotba kerül, azaz a test megtesz $\Delta x = 0.9 \text{ m}$ távolságot, lecsatlakozik a rugóról, ekkor lesz h_2 magasságban. Végül a test h_3 magasságban áll meg és a kezdeti helyétől d távolságra kerül a lejtőn. Számold ki:

- a test v_2 sebességét a h_2 magasságban.
- a megtett d távolságot.

Megoldás:

A feladatot munkatétellel tudjuk megoldani:

$$W_{\text{össz}} = W_{\text{rugó}} + W_g + W_{\text{súrl}} = \Delta E_{\text{kin}}.$$

A rugó által végzett munkát a rugó potenciális energiájának megváltozásából tudjuk kiszámolni, és ahhoz szükségünk lesz a rugó megnyúlására. A feladat nem adja meg a rugó nyugalmi hosszát, viszont tudjuk, hogy az 1-es állapotban az egyensúlyi helyzethez képest az összenyomódás Δx , és az egyensúlyi helyzetben a megnyúlásra – pontosabban itt összenyomódásra – fel tudjuk írni, hogy a rugóerő egyensúlyt tart a nehézségi erőnek a lejtővel párhuzamos komponensével:

$$mg \sin \alpha = k x_{\text{es}} \rightarrow x_{\text{es}} = mg \sin \alpha / k = 5 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ / 80 = 0,3125 \text{ m}.$$

Az 1-es helyzetben a rugó összenyomódása az egyensúlyi helyzethez képest $\Delta x = 0,9 \text{ m}$, az egyensúlyi helyzetben a rugó összenyomódása $x_{\text{es}} = 0,3125 \text{ cm}$, tehát az 1-es helyzetben a rugó összenyomódása

$$x_1 = \Delta x + x_{\text{es}} = 0,9 + 0,3125 = 1,2125 \text{ m}.$$

a) Ezzel fel tudjuk írni a rugó potenciális energiáját az 1-es helyzetben:

$$E_{\text{pot, rugó, 1}} = \frac{1}{2} k x_1^2 = 0,5 \cdot 80 \cdot 1,2125^2 = 58,81 \text{ J},$$

ill. a 2-es helyzetben (ahol a rugó összenyomódása x_{es}):

$$E_{\text{pot, rugó, 2}} = \frac{1}{2} k x_{\text{es}}^2 = 0,5 \cdot 80 \cdot 0,3125^2 = 3,906 \text{ J}.$$

Ezekből a rugó által végzett munka

$$W_{\text{rugó, 1} \rightarrow 2} = -\Delta E_{\text{pot, rugó}} = E_{\text{pot, rugó, 1}} - E_{\text{pot, rugó, 2}} = 58,81 - 3,906 = 54,90 \text{ J}.$$

A nehézségi erő által végzett munka

$$W_{g, 1 \rightarrow 2} = -\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot, 1}} - E_{\text{pot, 2}} = mg (h_1 - h_2) = -mg (\Delta x \sin \alpha) = -5 \cdot 10 \cdot 0,9 \cdot 0,5 = -22,5 \text{ J}.$$

A súrlódási erő által végzett munka

$$W_{\text{súrl, 1} \rightarrow 2} = -F_s \Delta x = -(\mu mg \cos \alpha) \Delta x = -0,2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,9 = -7,794 \text{ J}.$$

A munkatétel az 1-es és 2-es helyzet között:

$W_{\text{össz}} = W_{\text{rugó, 1} \rightarrow 2} + W_{\text{g, 1} \rightarrow 2} + W_{\text{súrl, 1} \rightarrow 2} = 54,90 - 22,5 - 7,794 = 24,61 \text{ J} = \Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - 0$,
ebből a keresett v_2 sebesség

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 24,61 / 5} = 3,137 \text{ m/s.}$$

b) Jelöljük s -sel a 2-es és 3-as helyzetek közötti távolságot a lejtőn.

A súrlódási erő által végzett munka

$$W_{\text{súrl, 2} \rightarrow 3} = -F_s s = -\mu mg \cos \alpha s = -0,2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ s = -8,660 s \text{ [J]}.$$

A nehézségi erő által végzett munka

$$W_{\text{g, 2} \rightarrow 3} = -\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot, 2}} - E_{\text{pot, 3}} = mg (h_2 - h_3) = -mg (s \sin \alpha) = -5 \cdot 10 \cdot 0,5 s = -25 s \text{ [J]}.$$

A munkatétel (felhasználva, hogy $v_3 = 0$):

$$\begin{aligned} W_{\text{össz}} &= W_{\text{g, 2} \rightarrow 3} + W_{\text{súrl, 2} \rightarrow 3} = -mg s \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha s = -mg (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) s = \\ &= -5 \cdot 10 \cdot (\sin 30^\circ + 0,2 \cdot \cos 30^\circ) s = -33,66 s = \Delta E_{\text{kin}} = 0 - \frac{1}{2} m v_2^2 = 24,61 \text{ J,} \end{aligned}$$

amiből

$$s = \frac{1}{2} m v_2^2 / (mg (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)) = 24,61 / 33,66 = 0,7310 \text{ m.}$$

d, vagyis a 3-as helyzet távolsága az 1-es helyzettől

$$d = \Delta x + s = 1,631 \text{ m.}$$