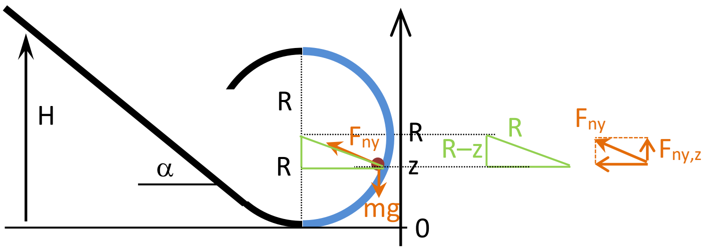
Az α hajlásszögű egyenes lejtő érintő irányban csatlakozik az R sugarú körív keresztmetszetű vályúhoz. Egy testet kezdősebesség nélkül elengedünk a lejtő H magasságú pontjából.
A súrlódás elhanyagolható.
a) Adja meg a kiindulási H magasság függvényében, hogy milyen z magasságban lesz a test gyorsulása éppen vízszintes!
b) Számolja ki ezt a z koordinátát H = 2R esetére.

Megoldás:
A test gyorsulása akkor vízszintes, ha a testre ható nehézségi erő és a felület által kifejtett nyomóerő eredője vízszintes. Ez a vályú alsó felében fordulhat csak elő, mert a felső felében a nyomóerő függőleges komponense lefelé, azaz mg-vel egy irányba mutat.
A két erő eredője akkor vízszintes, ha a nyomóerő függőleges komponensének nagysága éppen mg-vel egyenlő:

$$F_{ny,z} = mg.$$

Az ábrából látható, hogy

$$\frac{F_{ny,z}}{F_{ny}} = \frac{R-z}{R}, \text{ vagyis } F_{ny,z} = \frac{R-z}{R} F_{ny}.$$



A nyomóerő nagysága az 5/5. feladat megoldása szerint (5/12. oldal)

$$F_{ny} = \frac{2H+R-3z}{R} mg, \quad \text{tehát} \quad F_{ny,z} = \frac{R-z}{R} \frac{2H+R-3z}{R} mg.$$

A feltétel szerint $F_{ny,z} = mg$, vagyis

$$\frac{R-z}{R} \frac{2H+R-3z}{R} mg = mg \quad \rightarrow \quad \frac{R-z}{R} \frac{2H+R-3z}{R} = 1, \text{ ebből kell z-t kifejezni.}$$

$$(R-z)(2H+R-3z) = R^2$$

$$2HR - 2Hz + R^2 - Rz - 3Rz + 3z^2 = R^2$$

$$3z^2 - (4R+2H) z + 2HR = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{(4R+2H) \pm \sqrt{16R^2+16RH+4H^2-24RH}}{6} = \frac{(2R+H) \pm \sqrt{4R^2-2RH+H^2}}{3}$$

$(2R+H)^2 = 4R^2+4RH+H^2$, ami nagyobb, mint a gyökjel alatt levő $4R^2-2RH+H^2$,
tehát a gyök értéke kisebb, mint $2R+H$, vagyis a negatív előjellel is pozitív z értéket kapunk.
Elvileg tehát lehetne mind z_1, mind z_2 megoldás. Meg kell azonban vizsgálni azt, hogy mikor teljesül az, hogy a test a vályú alsó részében van, tehát a kiszámolt z koordináta R-nél kisebb:

$$z_1 = \frac{2R+H+\sqrt{4R^2-2RH+H^2}}{3} \text{ esetén } 2R+H+\sqrt{4R^2-2RH+H^2} < 3R \rightarrow \sqrt{4R^2-2RH+H^2} < R-H \rightarrow$$
$$4R^2-2RH+H^2 < R^2-2RH+H^2 \rightarrow 3R^2 < 0$$ lenne, tehát a z_1 gyök nem megoldás.

$$z_2 = \frac{2R+H-\sqrt{4R^2-2RH+H^2}}{3} \text{ esetén } 2R+H-\sqrt{4R^2-2RH+H^2} < 3R \rightarrow H-R < \sqrt{4R^2-2RH+H^2} \rightarrow$$
$$H^2-2RH+R^2 < 4R^2-2RH+H^2 \rightarrow 0 < 3R^2$$, tehát a z_2 gyök jó megoldás.

b) H = 2R esetén

$$z_2 = \frac{2R+(2R)-\sqrt{4R^2-2R(2R)+(2R)^2}}{3} = \frac{4R-2R}{3} = \frac{2}{3} R.$$