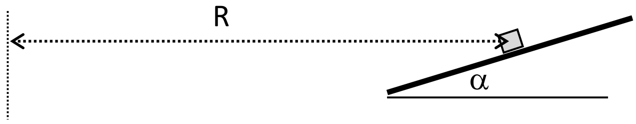
Kis távirányítós autóknak olyan kör alakú pályát csináltak, aminek az „úttestje” lejt a kör közepe felé, az útpálya síkja 25°-os szöget zár be a vízszintessel. A körpálya sugara 2,5 m. A kisautó kereke és az útpálya közötti tapadási súrlódási együttható értéke 0,25.
Adja meg azokat a lehetséges sebességeket, amikkel az autó vízszintes síkú köröket tud megtenni ezen a pályán!



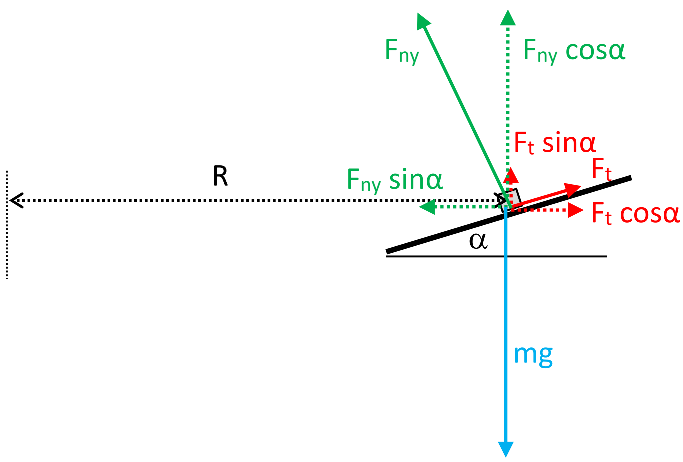
Megoldás:
Ha az autó sebessége kicsi, akkor az útpálya síkjában felfelé ható tapadási súrlódási erő akadályozza meg, hogy az autó lejjebb csússzon (**a)** eset), nagyobb sebességeknél pedig az útpálya síkjában lefelé ható tapadási súrlódási erő akadályozza meg, hogy az autó feljebb sodródjon (**b)** eset). Mivel a tapadási súrlódási erőnek van egy maximuma, az **a)** eset egy minimális, a **b)** eset egy maximális sebességet fog adni.

a) A körpálya síkjára merőleges erők eredője zérus kell legyen:

$$F_{ny} \cos\alpha + F_t \sin\alpha = mg \,,$$

A vízszintes komponensek eredője pedig

$$ma_{cp} = F_{ny} \sin\alpha - F_t \cos\alpha \,.$$



F_{ny}-t kifejezzük az első egyenletből

$$F_{ny} = mg/\cos\alpha - F_t \,\mathrm{tg}\alpha \,,$$

ezt beírjuk a másodikba, és felhasználva, hogy $a_{cp} = v^2/R$, kifejezhetjük, hogyan függ a tapadási súrlódási erő értéke v^2-től:

$$mv^2/R = \sin\alpha\,(mg/\cos\alpha - F_t \,\mathrm{tg}\alpha) - F_t \cos\alpha = \ldots = mg \,\mathrm{tg}\alpha - F_t / \cos\alpha \quad \rightarrow$$

$$F_t = mg \sin\alpha - m \cos\alpha \, v^2 / R \,.$$

Tudjuk, hogy $F_t \le \mu_t F_{ny}$, vagyis

$$mg \sin\alpha - m \cos\alpha \, v^2 / R \;\le\; \mu_t \,(mg/\cos\alpha - F_t \,\mathrm{tg}\alpha)$$

$$= \mu_t \,(mg/\cos\alpha - (mg \sin\alpha - m \cos\alpha \, v^2 / R)\,\mathrm{tg}\alpha) \,.$$

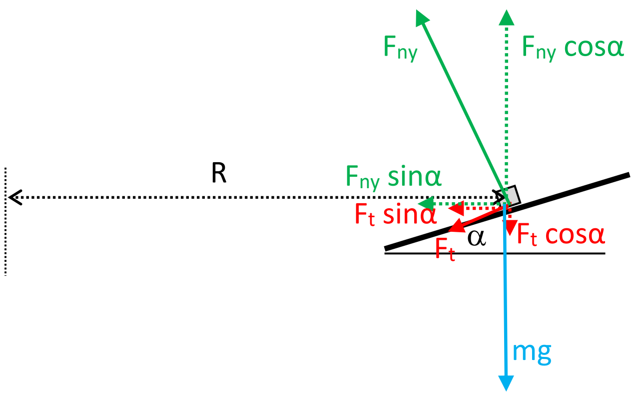
Ezt átrendezve

$$v^2 \ge gR\,(\sin\alpha - \mu_t \cos\alpha) / (\cos\alpha + \mu_t \sin\alpha) \,.$$

Behelyettesítve a feladatban megadott értékeket

$$v \ge 2{,}201 \text{ m/s}.$$

b) F_t most az ellenkező irányba mutat, így az egyenletek:



a körpálya síkjára merőlegesen:

$$F_{ny} \cos\alpha = mg + F_t \sin\alpha \,,$$

vízszintesen:

$$ma_{cp} = F_{ny} \sin\alpha + F_t \cos\alpha \,.$$

F_{ny} az első egyenletből

$$F_{ny} = mg/\cos\alpha + F_t \,\mathrm{tg}\alpha \,,$$

ezt beírva a másodikba:

$$mv^2/R = \sin\alpha\,(mg/\cos\alpha + F_t \,\mathrm{tg}\alpha) + F_t \cos\alpha = \ldots = mg\,\mathrm{tg}\alpha + F_t / \cos\alpha \quad \rightarrow$$

$$F_t = m \cos\alpha\, v^2 / R - mg \sin\alpha \,.$$

Tudjuk, hogy $F_t \leq \mu_t F_{ny}$, vagyis

$$m \cos\alpha\, v^2 / R - mg \sin\alpha \;\leq\; \mu_t\,(mg/\cos\alpha + F_t \,\mathrm{tg}\alpha)$$

$$= \mu_t\,(mg/\cos\alpha + (m \cos\alpha\, v^2 / R - mg \sin\alpha)\,\mathrm{tg}\alpha)$$

Ezt átrendezve

$$v^2 \leq gR\,(\sin\alpha + \mu_t \cos\alpha) / (\cos\alpha - \mu_t \sin\alpha) \,.$$

Behelyettesítve a feladatban megadott értékeket

$$v \leq 4{,}502 \text{ m/s}.$$