Egy test gyorsulását az

$\mathbf{a}(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{B}t\right)\mathbf{i} + C\,\mathbf{k}$ függvény írja le,

ahol $A = \pi^2\ m/s^2$; $B = 4\ s$; $C = -10\ m/s^2$.

$t = 0$ s-ban mekkora volt a test kezdősebesség-vektora és honnan indult a test, ha

$t_1 = 2$ s-ban az $\mathbf{r}(2) = -40\,\mathbf{i} + 32\,\mathbf{j} + 960\,\mathbf{k}$ [m] pontban volt, és

$t_2 = 10$ s-ban az origóba érkezett?

Megoldás:

$a_x = A\cos\left(\frac{2\pi}{B}t\right) = \pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

$v_x = v_{0x} + 2\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, mert

a) $v_x(t) = 2\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + k_{vx}$

$v_x(0) = 2\pi\sin(0) + k_{vx} = 0 + k_{vx} = v_{0x} \rightarrow k_{vx} = v_{0x}$

b) $v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t \pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)d\tau = v_{0x} + \left[2\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)\right]_0^t = v_{0x} + 2\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 0$

$x = x_0 + v_{0x}t - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 4$, mert

a) $x(t) = v_{0x}t - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + k_x$

$x(0) = 0\cdot v_{0x} - 4\cos(0) + k_x = -4 + k_x = x_0 \rightarrow k_x = x_0 + 4$

b) $x(t) = x_0 + \int_0^t \left\{v_{0x} + 2\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)\right\}d\tau = x_0 + \left[v_{0x}\tau - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)\right]_0^t = x_0 + v_{0x}t - 0 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - (-4)$

$t_1 = 2$ s-ban $x(2) = -40$:

$x(2) = -4\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right) + v_{0x}\cdot 2 + 4 + x_0 = -4\cos(\pi) + 2v_{0x} + 4 + x_0 = +4 + 2v_{0x} + 4 + x_0 = 2v_{0x} + x_0 + 8 = -40$;

$t_2 = 10$ s-ban $x(10) = 0$:

$x(10) = -4\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 10\right) + v_{0x}\cdot 10 + 4 + x_0 = -4\cos(5\pi) + 10v_{0x} + 4 + x_0 = +4 + 10v_{0x} + 4 + x_0 = 10v_{0x} + x_0 + 8 = 0$.

Az egyenletrendszer megoldása: $v_{0x} = 5\ m/s$ és $x_0 = -58\ m$.

$v_x(t) = 5 + 2\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$,

$x(t) = -58 + 5t - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 4 = -54 + 5t - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

$a_y = 0$

$v_y = v_{0y}$

$y(t) = v_{0y}\,t + y_0$

$t_1 = 2$ s-ban $y(2) = 32$:

$y(2) = 2\,v_{0y} + y_0 = 32$;

$t_2 = 10$ s-ban $y(10) = 0$:

$y(10) = 10\,v_{0y} + y_0 = 0$.

Az egyenletrendszer megoldása: $v_{0y} = -4\ m/s$ és $y_0 = 40\ m$.

$v_y = -4$,

$y(t) = -4\,t + 40$.

$a_z = C = -10$

$v_z = -10t + v_{0z}$

$z(t) = -5t^2 + v_{0z}\, t + z_0$

$t_1 = 2$ s-ban $\quad z(2) = 960$:

$y(2) = -5\cdot 2^2 + 2\, v_{0z} + z_0 = -20 + 2\, v_{0z} + z_0 = 960$;

$t_2 = 10$ s-ban $\quad z(10) = 0$:

$z(10) = -5\cdot 10^2 + 10\, v_{0z} + z_0 = -500 + 10\, v_{0z} + z_0 = 0$.

Az egyenletrendszer megoldása: $\quad v_{0z} = -60$ m/s $\quad$ és $\quad z_0 = 1100$ m.

$v_z = -10\, t - 60$,

$z(t) = -5\, t^2 - 60\, t + 1100$.

A test sebességvektora

$$\mathbf{v}(t) = \left(5 + 2\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)\right) \mathbf{i} - 4\, \mathbf{j} + (-10t - 60)\, \mathbf{k} \quad [\mathrm{m/s}],$$

$t = 0$ -ban a test kezdősebesség-vektora:

$\mathbf{v}(0) = 5\, \mathbf{i} - 4\, \mathbf{j} - 60\, \mathbf{k}$ [m/s].

A test helyvektora

$$\mathbf{r}(t) = \left(-54 + 5t - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)\right) \mathbf{i} + (-4\, t + 40)\, \mathbf{j} + (-5t^2 - 60t + 1100)\, \mathbf{k} \quad [\mathrm{m}],$$

$t = 0$ -ban a test az

$\mathbf{r}(0) = -58\, \mathbf{i} + 40\, \mathbf{j} + 1100\, \mathbf{k}$ [m] pontból indult.