Egy test mozgását az

$$\mathbf{r}(t) = 2A\cos(Bt)\,\mathbf{i} + A\,(\cos(2Bt) - 1)\,\mathbf{j}$$ függvény írja le, ahol $A = 4$ m, $B = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1}$.

a) Határozza meg és rajzolja fel a test pályáját!

b) Jelölje meg a pályán azt a pontot, ill. azokat a pontokat, ahol legnagyobb a test sebessége!

Megoldás:

a) $x(t) = 2A\cos(Bt) = 8\cos(\frac{\pi}{2}t)$

$y(t) = A\,(\cos(2Bt) - 1) = 4\,(\cos(\pi t) - 1) = 4\cos(\pi t) - 4$

A periódusidők: $T_x = 4$ s és $T_y = 2$ s, nem egyeznek meg, de ki tudjuk használni, hogy egyik a másik kétszerese.

$\cos(\pi t)$ átalakítható

$$\cos(\pi t) = \cos^2(\tfrac{\pi}{2}t) - \sin^2(\tfrac{\pi}{2}t) = 2\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t) - 1$$ alakra, tehát

$$y(t) = 4\cos(\pi t) - 4 = 4\,(2\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t) - 1) - 4 = 8\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t) - 8$$

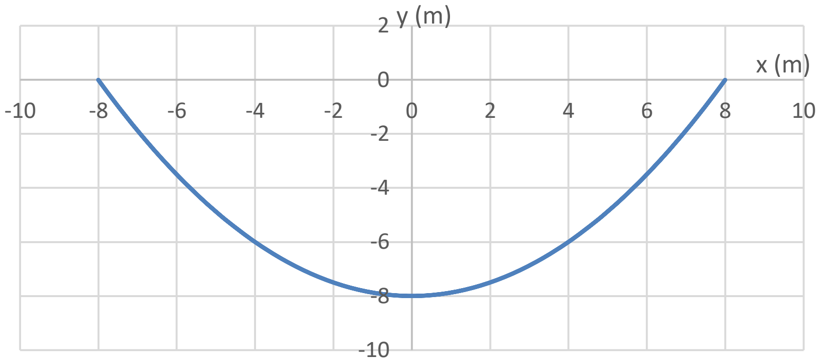
$\cos(\frac{\pi}{2}t)$-t kifejezzük $x(t)$-ből:

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}t) = \tfrac{x}{8},$$

ezt behelyettesítve

$$y(x) = 8\,\frac{x^2}{8^2} - 8 = \frac{x^2}{8} - 8\,.$$

A pálya a fenti egyenlettel megadott parabolának a $-8 \le x \le 8$; $-8 \le y \le 0$ szakasza.



b) $v_x = -2AB\sin(Bt) = -4\pi\sin(\frac{\pi}{2}t)$

$v_y = -2AB\sin(2Bt) = -4\pi\sin(\pi t)$,

utóbbi átírható

$$v_y = -4\pi\sin(\pi t) = -8\pi\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\cos(\tfrac{\pi}{2}t)$$ alakra.

A sebesség abszolút értéke:

$$v = \sqrt{\left(4\pi\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right)^2 + \left(8\pi\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right)^2} = 4\pi\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\sqrt{1 + 4\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t)}$$

Ennek keressük a szélsőértékét.

v-nek és v^2-nek ugyanott van szélsőértéke, utóbbi esetben egyszerűbb a deriválás:

$$v^2 = 16\pi^2\sin^2(\tfrac{\pi}{2}t)\,(1 + 4\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t))$$

$$dv^2/dt = 32\pi^2\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\,\tfrac{\pi}{2}\,(1 + 4\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t)) + 16\pi^2\sin^2(\tfrac{\pi}{2}t)\cdot 8\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\,(-1)\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\,\tfrac{\pi}{2} =$$

$$= 16\pi^3\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\cos(\tfrac{\pi}{2}t) + 64\pi^3\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\cos^3(\tfrac{\pi}{2}t) - 64\pi^3\sin^3(\tfrac{\pi}{2}t)\cos(\tfrac{\pi}{2}t) =$$

$$= 8\pi^3\cdot(2\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\cos(\tfrac{\pi}{2}t)) + 32\pi^3\cdot(2\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\cos(\tfrac{\pi}{2}t))\,(\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t) - \sin^2(\tfrac{\pi}{2}t)) =$$

$$= 8\pi^3\sin(\pi t) + 32\pi^3\sin(\pi t)\cos(\pi t) = 8\pi^3\sin(\pi t)\,(1 + 4\cos(\pi t)) = 0$$

Ebből lehet

$\sin(\pi t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 1$ s; 2 s; 3 s; 4 s, stb.

Ezekben az időpontokban $\sin(\frac{\pi}{2}t) = 0$ ill. $\sin(\pi t) = 0$,

itt $v_x = 0$ ill. $v_y = 0$,

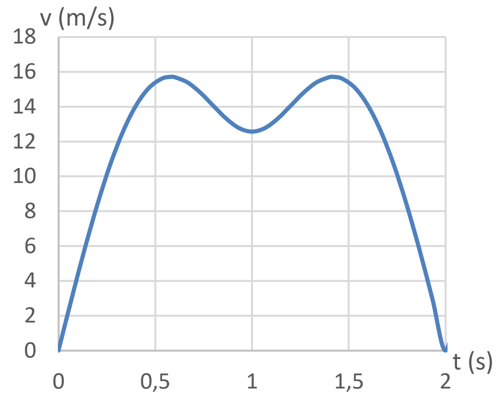
az ábrán láthatóan ezek nem maximumok.

A másik megoldás

$1 + 4\cos(\pi t) = 0$

$\rightarrow \quad \pi t_t = \arccos(-1/4) = 1{,}823$ s $\quad \rightarrow \quad t_1 = 0{,}5804$ s;

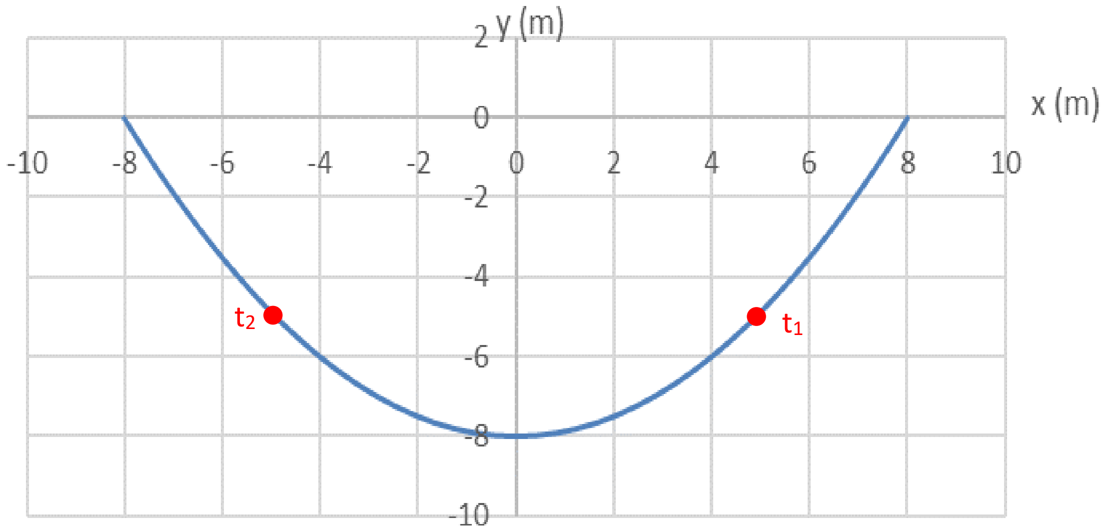
$\rightarrow \quad \pi t_2 = 2\pi - \arccos(-1/4) = 4{,}460$ s $\quad \rightarrow \quad t_2 = 1{,}420$ s.



A t_1 ill. t_2 időt behelyettesítve x(t)-be és y(t)-be megkapjuk, hogy ekkor a test a pálya melyik pontján halad át:

$t_1 = 0{,}5804$ s: $\quad x_1 = 4{,}9$ m, $\quad y_1 = -5$ m;

$t_2 = 1{,}420$ s: $\quad x_2 = -4{,}9$ m, $\quad y_2 = -5$ m.



Más megoldás: azt nézzük meg, mikor lesz merőleges a sebességvektor és a gyorsulásvektor.

$\mathbf{v} = -4\pi\sin(\frac{\pi}{2}t)\,\mathbf{i} \;-4\pi\sin(\pi t)\,\mathbf{j} \quad = -4\pi\sin(\frac{\pi}{2}t)\,\mathbf{i} \;- 8\pi\sin(\frac{\pi}{2}t)\cos(\frac{\pi}{2}t)\,\mathbf{j}$

$\mathbf{a} = -2\pi^2\cos(\frac{\pi}{2}t)\,\mathbf{i} - 4\pi^2\cos(\pi t)\,\mathbf{j} \quad = -2\pi^2\cos(\frac{\pi}{2}t)\,\mathbf{i} \;+ (-4\pi^2 + 8\pi^2\sin^2(\frac{\pi}{2}t))\,\mathbf{j}$

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 8\pi^3\sin(\frac{\pi}{2}t)\cos(\frac{\pi}{2}t) + 32\pi^3\sin(\frac{\pi}{2}t)\cos(\frac{\pi}{2}t) - 64\pi^3\sin^3(\frac{\pi}{2}t)\cos(\frac{\pi}{2}t) =$

$= 40\pi^3\sin(\frac{\pi}{2}t)\cos(\frac{\pi}{2}t) - 64\pi^3\sin^3(\frac{\pi}{2}t)\cos(\frac{\pi}{2}t) = 2\sin(\frac{\pi}{2}t)\cos(\frac{\pi}{2}t)\,(20\pi^3 - 32\pi^3\sin^2(\frac{\pi}{2}t)) =$

$= 4\pi^3\sin(\pi t)\,(\,5 - 8\sin^2(\frac{\pi}{2}t)\,) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin^2(\frac{\pi}{2}t) = 5/8 \quad \rightarrow \quad t = \ldots$ stb.