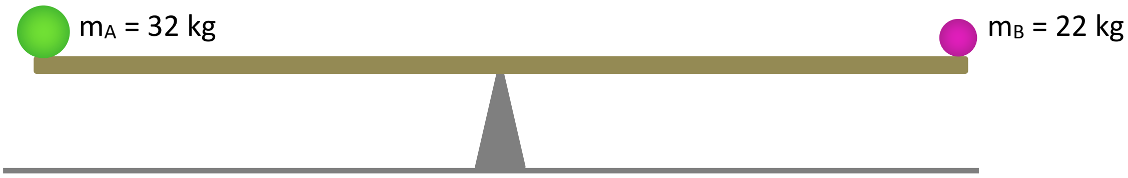
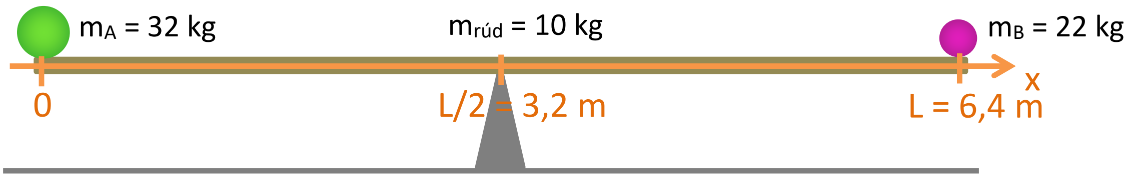
9b/1. Aladár (32 kg) és Bözsi (22 kg) mérleghintázni mennek. A mérleghinta rúdja 6,4 m hosszú és 10 kg tömegű, állandó keresztmetszetű, homogén, és a felezőpontja alatt van alátámasztva egy 40 cm magas tartóval.
a) Hol van az Aladár + Bözsi + rúd rendszer tömegközéppontja, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?
b) Mekkora a nehézségi erő forgatónyomatéka az alátámasztási pontra a rúd vízszintes helyzetében?
c) Mi történik a vízszintes helyzetben, ha a gyerekeknek nem ér le a lábuk?
d) Hová kell üljön Aladár, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyenek?
e) Ha megoldható lenne, hogy az alátámasztást odébb toljuk, akkor hol kéne alátámasztani a rudat, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyen, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?

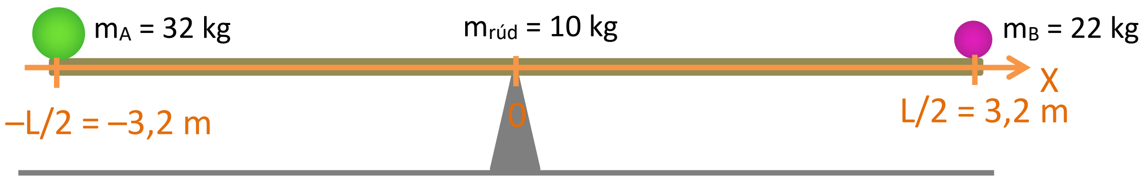


Megoldás:
a) Hol van az Aladár + Bözsi + rúd rendszer tömegközéppontja, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?
A mérleghinta rúdja homogén és állandó keresztmetszetű, ezért a tömegközéppontja a rúd felezőpontjában van.
A tömegközéppont kiszámításához vegyünk fel egy x tengelyt a rúd mentén
pl. így:



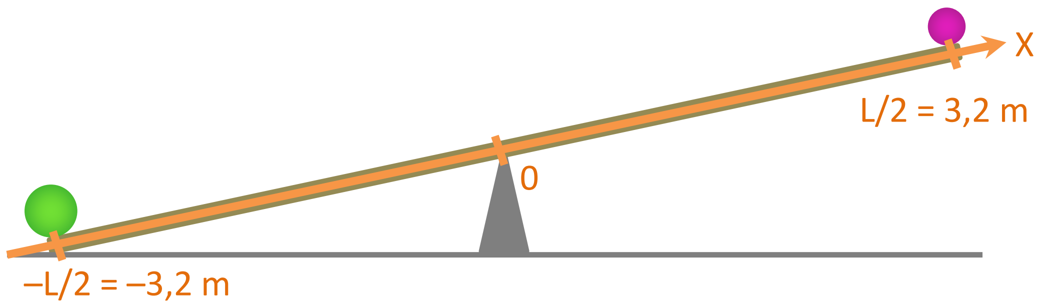
ezzel a tömegközéppont x koordinátája
$x_S = (0·32 + 3,2·10 + 6,4·22) / (32+10+22) = 2,7$ m;

vagy így:



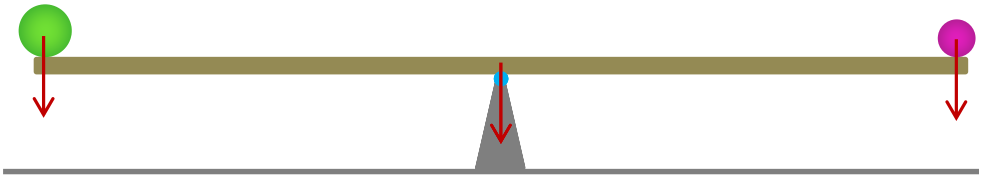
ezzel a tömegközéppont x koordinátája
$X_S = (–3,2·32 + 0·10 + 3,2·22) / (32+10+22) = –0,5$ m.

Tehát a tömegközéppont az alátámasztástól 0,5 m-re van a nehezebb gyerek, Aladár felé (Aladártól 2,7 m-re, Bözsitől 3,7 m-re).
Az egyszerűség kedvéért vízszintes helyzetben ábrázoltuk a mérleghintát, de ferdén is felrajzolhatjuk:



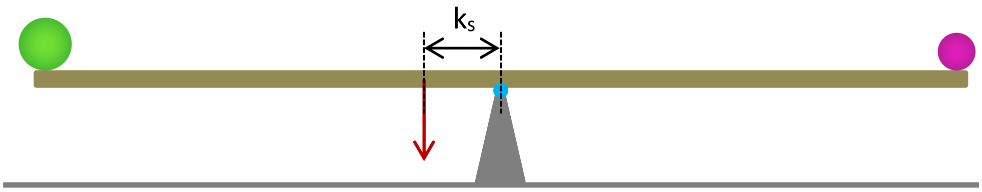
b) Mekkora a nehézségi erő forgatónyomatéka az alátámasztási pontra a rúd vízszintes helyzetében?
A tömegeket kis m-mel, a forgatónyomatékokat nagy M-mel jelöljük.
A forgatónyomatékot kétféleképpen is kiszámolhatjuk:

- Az egyes testekre ható forgatónyomatékok összegeként:



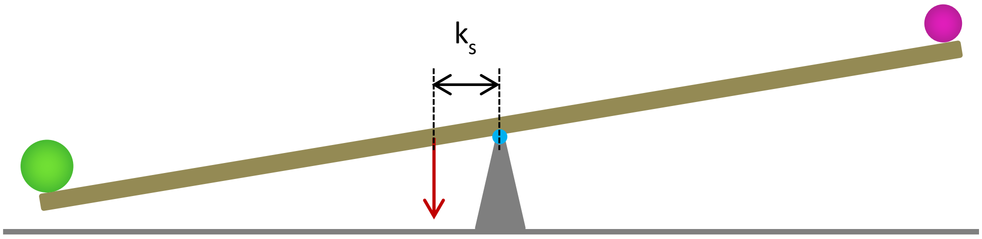
az Aladárra ható $m_A g$ nehézségi erő a hintát balra akarja forgatni (pozitív forgásirányba)
$M_A = m_A g \cdot (L/2) = 32 \cdot 10 \cdot 3{,}2 = 1024$ Nm;
a Bözsire ható $m_B g$ nehézségi erő a hintát jobbra akarja forgatni (negatív forgásirányba)
$M_B = - m_B g \cdot (L/2) = -22 \cdot 10 \cdot 3{,}2 = -704$ Nm;
a rúdra ható $m_{rúd} g$ nehézségi erő forgatónyomatéka zérus, mert az erő átmegy az alátámasztási ponton;
tehát a rendszer forgatónyomatéka összesen
$M = M_A + M_B + 0 = 320$ Nm, balra (mivel az összeg előjele pozitív).

- A rendszert alkotó testeket helyettesíthetjük egyetlen pontszerű testtel, aminek tömege az össztömeg, és a helye a rendszer tömegközéppontja, így egy lépésben számolható a forgatónyomaték:

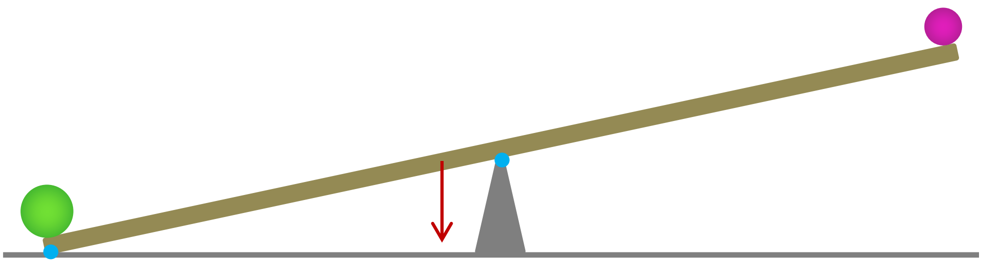


Az erőkar a tömegközéppont és az alátámasztás távolsága, $k_s = 0{,}5$ m:
$M = (m_A+m_B+m_{rúd}) \cdot g \cdot k_s = (32+22+10) \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 320$ Nm, balra.

c) Mivel az alátámasztás nem a tömegközéppont alatt van, ezért a hinta vízszintes helyzetben nincs egyensúlyban. A tömegközéppont az alátámasztástól balra van, ezért a hinta elfordul balra:

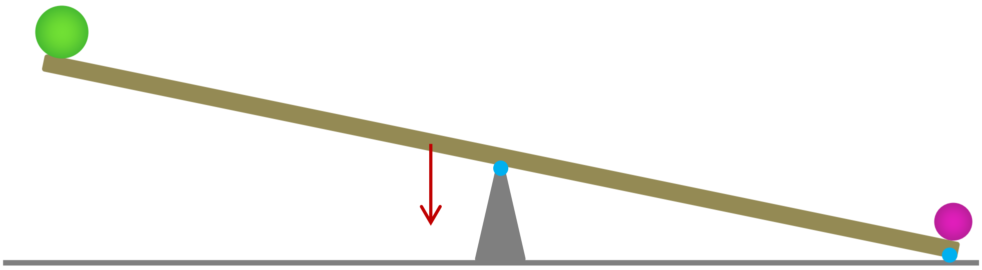


Ahogy elfordul a rendszer, a tömegközépponton átmenő függőleges erővektoron átmenő függőleges egyenes egyre közelebb kerül a forgástengelyhez, csökken az erőkar $\rightarrow$ csökken a forgatónyomaték.



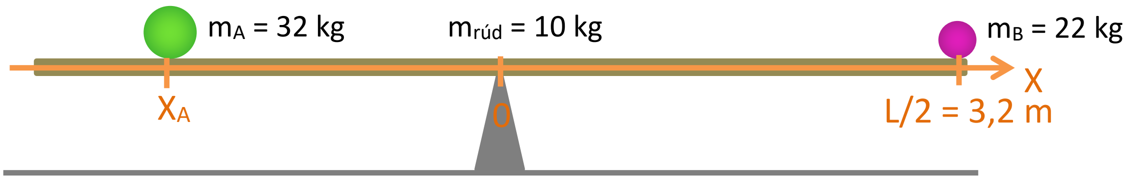
Amikor Aladár oldalán földet ér a mérleghinta, a rendszer egyensúlyban lesz, mivel a tömegközépponton átmenő nehézségi erő vektora a két alátámasztási pont között van (az Aladár oldalán levő alátámasztási pont körül jobbra, a középen levő alátámasztási pont körül balra indítana forgómozgást).

Megjegyzés:
Ha Bözsi oldalán ér földet a rúd, akkor a tömegközépponton átmenő nehézségi erő vektora mindkét alátámasztási ponttól balra van, mindkét pont körül balra indít forgómozgást, így a rendszer elfordul balra:



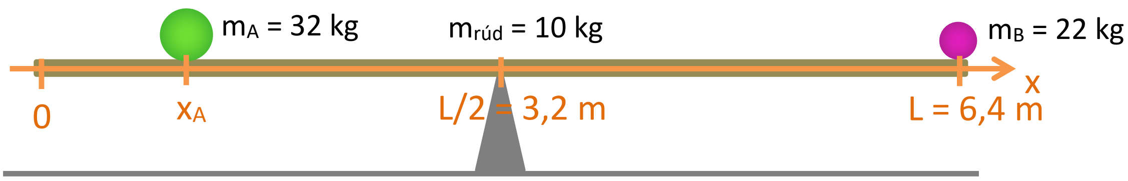
d) Hová kell üljön Aladár, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyenek?
Akkor lesznek (vízszintes helyzetben) egyensúlyban, ha a közös tömegközéppont éppen az alátámasztás fölött van, így az eredő forgatónyomaték zérus.

Ha úgy vesszük fel az X tengelyt, hogy az alátámasztásnál van az origó, akkor $X_s = 0$ kell legyen:



$X_S = (X_A \cdot 32 + 0 \cdot 10 + 3{,}2 \cdot 22) / (32+10+22) = 0 \quad \rightarrow \quad x_A = -2{,}2$ m.

Ha úgy vesszük fel az x tengelyt, hogy a rúd bal végénél van az origó, akkor $x_s = 3{,}2$ m kell legyen:



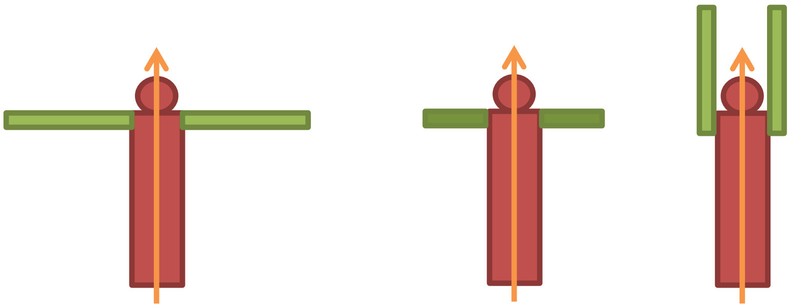
$x_S = (x_A \cdot 32 + 3{,}2 \cdot 10 + 6{,}4 \cdot 22) / (32+10+22) = 3{,}2 \quad \rightarrow \quad x_A = 1$ m.

Tehát Aladárnak 1 m-rel közelebb kell csúsznia a rúd közepe felé.

e) Ha megoldható lenne, hogy az alátámasztást odébb toljuk, akkor hol kéne alátámasztani a rudat, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyen, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?

A tömegközéppont alatt, amit a **b)** részben már kiszámoltunk, tehát a rúd közepétől 0,5 m-rel balra.

9b/2. (Régi zh-feladat.) A Mikulás vízszintesen kitárt karral piruettezni kezdett a jégen.
Mennyire változik meg a forgásának a szögsebessége, ha
a) a karjait továbbra is vízszintesen tartva könyökben vízszintesen visszahajtja?
b) a karjait függőlegesbe fordítja (a válla körül, a törzs-hengerének szélénél)?
A Mikulás homogén sűrűségű, a tömege 150 kg.
Törzsét + lábait + nagykabátját tekintsük 16 cm sugarú, 150 cm magas hengernek,
fejét egy ezen levő 12 cm sugarú gömbnek,
karjait a henger tetejénél, annak szélétől kiinduló 5 cm sugarú, 60 cm hosszú hengereknek.
A Mikulás könyöke a karja közepénél van.
Kinyújtott vízszintes karral a szögsebessége 12,0 s^{-1}.



Megoldás:
Ha piruettezés közben a Mikulás a karját behajlítja vagy függőlegesbe fordítja, a Mikulás összes impulzusmomentuma nem változik meg, mivel a karok mozgatása belső erő hatására történik, közben a külső erők forgatónyomatéka zérus, tehát $L = \text{konst.}$, azaz $\Theta\,\omega = \text{konst.}$
Mivel megváltozik a Mikulás alakja, a karjának félbehajlításával ill. függőlegesbe fordításával azok összességében közelebb kerülnek a forgástengelyhez, ezért a tehetetlenségi nyomatéka lecsökken, és így a szögsebessége megnő.
Először ki kell számolni a tehetetlenségi nyomatékot a kiinduló és a két megváltozott alakra.

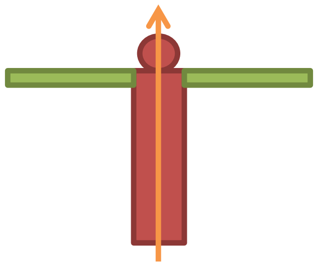
A Mikulás térfogata
$V = V_{törzs} + V_{fej} + 2V_{kar} = 0{,}16^2\pi\cdot1{,}50 + (4/3)\cdot0{,}12^3\pi + 2\cdot(0{,}05^2\pi\cdot0{,}60) = 0{,}1206+0{,}0072+2\cdot0{,}0047 = 0{,}1373\ m^3$,
a sűrűsége
$\rho = m / V = 150 / 0{,}1373 = 1092{,}5\ kg/m^3$,
az egyes részeinek a tömege:
törzs $m_{törzs} = \rho\cdot V_{törzs} = 1092{,}5\cdot0{,}1206 = 131{,}8$ kg,
fej $m_{fej} = \rho\cdot V_{fej} = 1092{,}5\cdot0{,}0072 = 7{,}908$ kg,
egy-egy kar $m_{kar} = \rho\cdot V_{kar} = 1092{,}5\cdot0{,}0047 = 5{,}148$ kg.

A Mikulás törzsének és fejének helyzete nem változik, ezek tehetetlenségi nyomatéka mindhárom esetben ugyanannyi.

- Mikulás törzse egy henger, ami a szimmetriatengelye körül forog;
  henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére $\Theta_{henger} = \frac{1}{2}mR^2$;
  $m_{törzs} = 131{,}8$ kg, $R_{törzs} = 16$ cm $= 0{,}16$ m,
  tehát $\Theta_{törzs} = 0{,}5\cdot131{,}8\cdot0{,}16^2 = 1{,}687\ kgm^2$.

- Mikulás feje egy gömb,
  gömb tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére $\Theta_{gömb} = \frac{2}{5}mR^2$;
  $m_{fej} = 7{,}908$ kg, $R_{fej} = 5$ cm $= 0{,}05$ m,
  tehát $\Theta_{fej} = 0{,}4\cdot7{,}908\cdot0{,}05^2 = 0{,}0455\ kgm^2$.

Ha a Mikulás karja vízszintesen ki van nyújtva, akkor egy-egy karja egy-egy hosszú vékony henger, ami a henger szimmetriatengelyére merőleges tengely körül forog, ezért a henger ilyenkor rúdnak tekintendő!



A rúd felezőpontján átmenő tengelyre $\Theta_s = \frac{1}{12}ML^2$, és mivel a forgástengely nem a rúd felezőpontján megy keresztül, ehhez hozzá kell adni egy Steiner-tagot.

A Steiner-tagba a rúd tömegközéppontja és a forgástengely közötti d távolságot kell beírni. Itt most ez a rúd hosszának a fele ($½L_{kar}$ = 30 cm) és még az a távolság, amilyen távol a karok végpontjai vannak a forgástengelytől, ami éppen a törzs sugara ($R_{törzs}$ = 16 cm), vagyis az eltolás

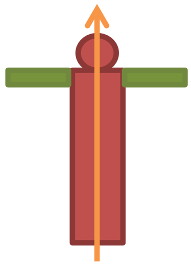
$d = R_{törzs} + ½L_{kar} = 30+16 = 46$ cm $= 0{,}46$ m,

tehát $\Theta_{kar,\,vizsz} = \frac{1}{12} m_{kar} L_{kar}^2 + m_{kar} d^2 = 5{,}148{\cdot}0{,}6^2/12 + 5{,}148{\cdot}0{,}46^2 = 1{,}244$ kgm².

Kinyújtott vízszintes karral Mikulás tehetetlenségi nyomatéka összesen

$$\Theta_1 = \Theta_{törzs} + \Theta_{fej} + 2\,\Theta_{kar,\,vizsz} = 1{,}687+0{,}0455+2{\cdot}1{,}244 = 4{,}220 \text{ kgm}^2.$$

a) Ha a Mikulás karja vissza van hajtva, akkor egy-egy kar két-két olyan hengernek tekinthető, aminek a tömege $½m_{kar}$ = 2,574 kg és a hossza $½L_{kar}$ = 30 cm = 0,30 m. Mindkét rész úgy forog, hogy a vége a forgástengelytől 16 cm-re van, vagyis a részek tömegközéppontjának a távolsága a forgástengelytől



$d' = ½{\cdot}(½L_{kar}) + R_{törzs} = 15+16 = 31$ cm $= 0{,}31$ m,

tehát egy fél kar tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{fél\ kar} = 2{,}574{\cdot}0{,}3^2/12 + 2{,}574{\cdot}0{,}31^2 = 0{,}2475 \text{ kg m}^2.$$

Félbehajtott vízszintes karral a Mikulás tehetetlenségi nyomatéka összesen

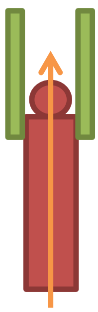
$$\Theta_2 = \Theta_{törzs} + \Theta_{fej} + 4\,\Theta_{fél\ kar} = 1{,}687+0{,}0455+4{\cdot}0{,}2475 = 2{,}722 \text{ kgm}^2.$$

Kinyújtott karral Mikulás szögsebessége $\omega_1 = 12{,}0\ s^{-1}$ volt.

A félbehajtott karral forgó Mikulás ω_2 szögsebessége kiszámolható az impulzusmomentum-megmaradást felírva:

$$\Theta_1\,\omega_1 = \Theta_2\,\omega_2 \quad\rightarrow\quad \omega_2 = \Theta_1 / \Theta_2 \cdot \omega_1 = 4{,}220/2{,}722 \cdot 12{,}0 = 18{,}6\ s^{-1}.$$

b) Ha a Mikulás karja függőleges, akkor a karok tehetetlenségi nyomatéka hengerként számolandó, mivel a karoknak megfelelő hengerek szimmetriatengelye párhuzamos a Mikulás forgástengelyével. Viszont a két tengely el van tolva akkora távolsággal, ami Mikulás forgástengelye (azaz a törzsnek megfelelő henger szimmetriatengelye) és a kar szimmetriatengelye közötti távolság:



$d'' = R_{törzs} + R_{kar} = 21$ cm $= 0{,}21$ m;

$\Theta_{henger} = ½mR^2$; $m_{kar} = 5{,}148$ kg, $R_{kar} = 5$ cm $= 0{,}05$ m,

tehát egy kar tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{kar,függ} = 0{,}5{\cdot}5{,}148{\cdot}0{,}05^2 + 5{,}148{\cdot}0{,}21^2 = 0{,}2335 \text{ kgm}^2.$$

Kinyújtott függőleges karral a Mikulás tehetetlenségi nyomatéka összesen

$$\Theta_3 = \Theta_{törzs} + \Theta_{fej} + 2\,\Theta_{kar,függ} = 1{,}687+0{,}0455+2{\cdot}0{,}2335 = 2{,}200 \text{ kgm}^2.$$

A függőleges karral forgó Mikulás ω_3 szögsebessége kiszámolható az impulzusmomentum-megmaradást felírva:

$$\Theta_1\,\omega_1 = \Theta_3\,\omega_3 \quad\rightarrow\quad \omega_3 = \Theta_1 / \Theta_3 \cdot \omega_1 = 4{,}220/2{,}200 \cdot 12{,}0 = 23{,}0\ s^{-1}.$$

Látható, hogy ahogy egyre kisebb lett a Mikulás tehetetlenségi nyomatéka, úgy nőtt a szögsebessége.