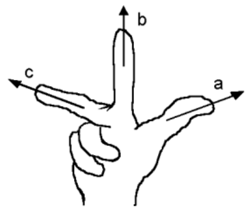
Forgómozgás, gördülés

Vektoriális szorzat

<u>Két vektor vektoriális szorzata:</u>

$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$



Két vektorhoz egy vektort rendel, aminek

nagysága $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\alpha$ (α a két vektor által bezárt szög);

iránya

merőleges a két vektor által kifeszített síkra, és

abba az irányba mutat, amerre <u>jobb</u> kezünk középső ujja mutat, ha a hüvelykujjunk az **a** vektor irányába és a mutatóujjunk a **b** vektor irányába mutat.

Párhuzamos vektorok vektoriális szorzata zérus.

A vektoriális szorzat antikommutatív, azaz ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{c}$.

Forgatónyomaték, impulzusmomentum

Általánosan az **a** vektor <u>nyomatéka</u> (<u>momentuma</u>): $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$, ahol **r** a helyvektor.

A forgatónyomaték (**M**) az erő momentuma: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Az impulzusmomentum (**L**) az impulzus momentuma: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (régebbi zh-megoldásokban **L** helyett **N** jelöli)

Impulzusmomentum-tétel

$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$

Kiterjedt test (ill. pontrendszer) impulzusmomentumának deriváltja egyenlő a testre (ill. pontrendszerre) ható erők forgatónyomatékának eredőjével.

Impulzusmomentum-megmaradás

ha $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{L}$ = konst.

Ha az erők forgatónyomatékának eredője zérus, akkor a test (ill. pontrendszer) impulzusmomentuma állandó.

A gyakorlaton csak <u>rögzített tengely körül</u> elforduló/forgó testekkel és gördüléssel foglalkozunk.

Az egydimenziós haladó és a rögzített tengely körüli forgó mozgás összehasonlítása:

egydimenziós haladó mozgás	**forgómozgás rögzített tengely körül; tiszta gördülés**
m tömeg [kg]	Θ tehetetlenségi nyomaték [kg·m^2]
a gyorsulás [m/s^2]	β szöggyorsulás [s^{-2}]
v sebesség [m/s]	ω szögsebesség [s^{-1}]
x helykoordináta; ill. s megtett út [m]	φ szög, ill. -elfordulás [rad]
$ma = F$ (F az eredő erő)	$\Theta\beta = M$ (M az eredő forgatónyomaték)
F erő [N]	M forgatónyomaték [N·m] rögzített tengely körül: $M = kF$, ahol k az erőkar
impulzus: $p = mv$ [kg·m/s]	impulzusmomentum: $L = \Theta\omega$ [kg·m^2/s]
impulzustétel: $\dot{p} = F_k$ (F_k a külső erők eredője)	impulzusmomentum-tétel: $\dot{L} = M$
impulzus-megmaradás: ha $F_k = 0$, akkor p = konst.	impulzusmomentum-megmaradás: ha $M = 0$, akkor L = konst.
$E_{kin,tr} = ½mv^2$ [J]	$E_{kin,forg} = ½\Theta\omega^2$ [J]

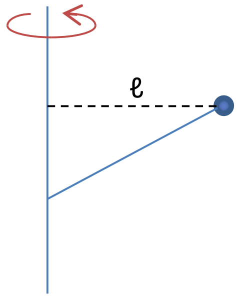
Ha a test tisztán gördül (nem csúszik meg), akkor $a = R\beta$; $v = R\omega$; $s = R\varphi$.

Tehetetlenségi nyomaték

Egy m tömegű, a forgástengelytől ℓ távolságra lévő tömegpont tehetetlenségi nyomatéka egy rögzített forgástengelyre vonatkoztatva:

$\Theta = m\ell^2$.

Mértékegysége [kg·m^2].



A tehetetlenségi nyomaték additív.
Pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka

$\Theta = \Sigma\,(m_i\ell_i^2)$.

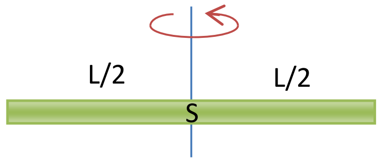
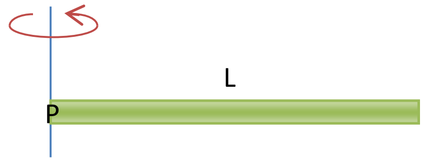
Kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka integrállal számítható:

$\Theta = \int \ell^2\,dm = \int \ell^2\,\rho\,dV$.

A 9/4, 9/6, 9/8, 9/9, 9/10. feladatokban látható, hogy hogyan számítható ki néhány egyszerű kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka integrálással.

Egy bonyolultabb test tehetetlenségi nyomatékát integrálás nélkül is kiszámíthatjuk, ha felbontható olyan részekre, amiknek ismerjük a tehetetlenségi nyomatékát.

<u>Néhány fontos kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka:</u>
m tömegű, homogén, állandó keresztmetszetű (vékony) L hosszú rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúdra merőleges tengelyre, ami a rúd …

… felezőpontján, azaz a súlypontján megy át:	… végpontján megy át:
	
$\Theta_S = \frac{1}{12} mL^2$	$\Theta_P = \frac{1}{3} mL^2$

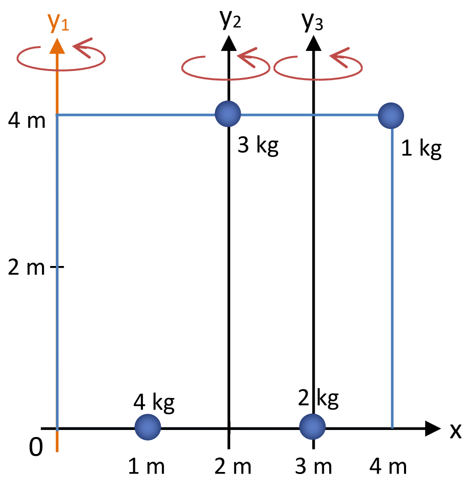
$$\begin{matrix}\text{m tömegű,}\\ \text{R sugarú}\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{korong, ill. tömör henger}\\ \\ \text{hengerpalást}\\ \\ \text{gömb}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{tehetetlenségi nyomatéka}\\ \text{a súlypontján átmenő tengelyre}\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}mR^2\\ \\ mR^2\\ \\ \frac{2}{5}mR^2\end{matrix}\right\}.$$

Steiner-tétel: párhuzamos forgástengelyeket tekintve a test tehetetlenségi nyomatéka a súlypontján átmenő tengelyre a legkisebb, és

$\Theta_P = \Theta_S + \Sigma m\, d^2$, ahol

- Θ_S az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték,
- Θ_P a P ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték,
- Σm az össztömeg,
- d az S súlyponton átmenő tengely és a P ponton átmenő másik tengely távolsága.

9/1. Az ábrán látható 4 test egy elhanyagolható tömegű keretre van rögzítve.
a) Számoljuk ki a kerettel összefogott testek y_1, y_2, ill. y_3 tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!
A keretet vízszintes helyzetbe fordítjuk, az y_1 forgástengelyt vízszintesen rögzítjük, majd a keretet (az x tengelyt) elengedjük, így a keret a testekkel a vízszintes helyzetű y_1 tengely körül függőleges síkban forogni kezd.
b) Adjuk meg a keret szöggyorsulását a kiinduló helyzetben!
c) Adjuk meg a 4 kg-os és az 1 kg-os test gyorsulását a kiinduló helyzetben!
d) Mekkora a gravitációs erők forgatónyomatéka az y_1 tengelyre, amikor a keret a vízszintessel 30°-os szöget zár be?
e) Adjuk meg a keret szögsebességét a vízszintessel bezárt szög függvényében!



Megoldás

a) Mivel a keret tömege elhanyagolható, csak a 4 testtel kell számolnunk, és tudjuk, hogy pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \Sigma(m_i \ell_i^2)$.
ℓ_i, az egyes testek távolsága a forgástengelytől jelen esetben az y_1, y_2, y_3 forgástengely és az egyes testek x koordinátájából számítható, mert a forgástengelyek merőlegesek az x tengelyre.
Az y_1 tengely az $x_1 = 0$ -nál van, ezért az erre a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték számításánál a forgástengelytől mért távolságok

$\ell_{4\,kg} = x_{4\,kg} - x_1 = 1–0 = 1$ m;
$\ell_{3\,kg} = x_{3\,kg} - x_1 = 2–0 = 2$ m;
$\ell_{2\,kg} = x_{2\,kg} - x_1 = 3–0 = 3$ m;
$\ell_{1\,kg} = x_{1\,kg} - x_1 = 4–0 = 4$ m;

tehát

$\Theta_{y1} = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2 = 50$ kgm^2.

Az y_2 tengely az $x_2 = 2$ m -nél van, ezért az erre a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték számításánál a forgástengelytől mért távolságok

$\ell_{4\,kg} = x_{4\,kg} - x_2 = 1–2 = –1$ m;
$\ell_{3\,kg} = x_{3\,kg} - x_2 = 2–2 = 0$ m;
$\ell_{2\,kg} = x_{2\,kg} - x_2 = 3–2 = 1$ m;
$\ell_{1\,kg} = x_{1\,kg} - x_2 = 4–2 = 2$ m;

tehát

$\Theta_{y2} = 4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 10$ kgm^2.

Az y_3 tengely az $x_3 = 3$ m -nél van, ezért az erre a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték számításánál a forgástengelytől mért távolságok

$\ell_{4\,kg} = x_{4\,kg} - x_3 = 1–3 = –2$ m;
$\ell_{3\,kg} = x_{3\,kg} - x_3 = 2–3 = –1$ m;
$\ell_{2\,kg} = x_{2\,kg} - x_3 = 3–3 = 0$ m;
$\ell_{1\,kg} = x_{1\,kg} - x_3 = 4–3 = 1$ m;

tehát

$\Theta_{y3} = 4 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 20$ kgm^2.

Látható, hogy az y_2 tengelyre a legkisebb a tehetetlenségi nyomaték.

Számoljuk ki a tömegközéppont x koordinátáját:

$x_s = \Sigma(x_i m_i)/\Sigma(m_i) = (1{\cdot}4+2{\cdot}3+3{\cdot}2+4{\cdot}1)/(4+3+2+1) = 2$ m.

A Steiner-tétel szerint a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték a legkisebb (párhuzamos tengelyek esetén). Az y_2 tengely éppen az S tömegközépponton megy át, vagyis most $\Theta_{y2} = \Theta_s$, és a számolásunkban láttuk, hogy

$\Theta_{y1} = 50$ kgm^2 $>$ $\Theta_{y2} = 10$ kgm^2 $<$ $\Theta_{y3} = 20$ kgm^2.

A másik két tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot számolhatjuk a Steiner-tétel alkalmazásával:

$\Theta_p = \Theta_s + (\Sigma m_i)d^2$,

ahol d az S súlyponton átmenő tengely és a P ponton átmenő másik tengely távolsága.

A tömegközéppont $x_s = 2$ m, az ezen átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték

$\Theta_s = 10$ kgm^2; az össztömeg $\Sigma m_i = 4+3+2+1 = 10$ kg;

az y_1 tengely távolsága a súlyponton átmenő y_2 tengelytől $d_1 = |x_1 - x_s| = |0-2| = 2$ m $\rightarrow$

$\Theta_{y1} = \Theta_s + (\Sigma m_i)d_1^2 = 10 + 10{\cdot}2^2 = 10 + 40 = 50$ kgm^2;

az y_3 tengely távolsága a súlyponton átmenő y_2 tengelytől $d_3 = |x_3 - x_s| = |3-2| = 1$ m $\rightarrow$

$\Theta_{y3} = \Theta_s + (\Sigma m_i)d_3^2 = 10 + 10{\cdot}1^2 = 10 + 10 = 20$ kgm^2.

<u>Megjegyzés</u>: Az y_1 ill. az y_3 tengelyekre vonatkoztatott Θ_{y1} és Θ_{y3} tehetetlenségi nyomatékok között viszont nem alkalmazható a Steiner-tétel, mert közülük egyik sem a súlyponton átmenő tengely!

pl. $\Theta_{y3} = 20$ kgm^2, d = 3 m: $\Theta_{y1} \neq \Theta_{y3} + 10{\cdot}3^2$!

Ha pl. Θ_{y3} ismeretében a Steiner-tétel alkalmazásával szeretnénk kiszámolni Θ_{y1} értékét, akkor először x_s meghatározása után Θ_s értékét kell kiszámolni:

$\Theta_{y3} = \Theta_s + (\Sigma m_i)d_3^2 \;\rightarrow\; \Theta_s = \Theta_{y3} - (\Sigma m_i)d_3^2 = 20 - 10{\cdot}1^2 = 20 - 10 = 10$ kgm^2,

majd második lépésben már alkalmazható a Steiner-tétel:

$\Theta_{y1} = \Theta_s + (\Sigma m_i)d_1^2 = 10 + 10{\cdot}2^2 = 10 + 40 = 50$ kgm^2.

Ennél a feladatnál ez utóbbi számolás nem rövidebb, mint a $\Theta = \Sigma(m_i \ell_i^2)$ képlet alkalmazása, de hasznos lehet így számolni olyan bonyolultabb testeknél, amiknek nehéz lenne kiszámolni a tehetetlenségi nyomatékát, viszont ismert a tehetetlenségi nyomaték egy olyan tengelyre, ami nem a súlypontján megy át.

b) Alkalmazzuk az impulzusmomentum-tételt: $M = \dot{L}$.

Merev test rögzített tengely körüli forgásánál az impulzusmomentum

$L = \Theta\omega$ (Θ az adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, ω a szögsebesség)

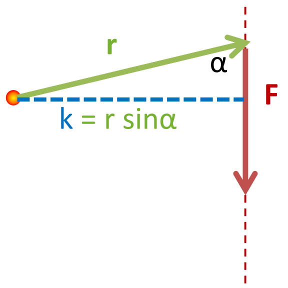
$\rightarrow$ $\dot{L} = \Theta\beta$ (β a szöggyorsulás), tehát

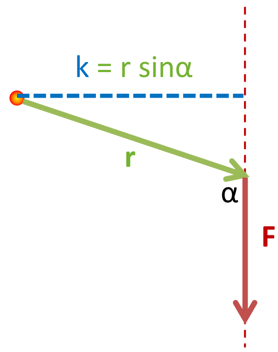
$M = \Theta\beta$ (M az eredő forgatónyomaték).

A forgatónyomaték általános esetben $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ $\rightarrow$ a nagysága

$M = k F$.

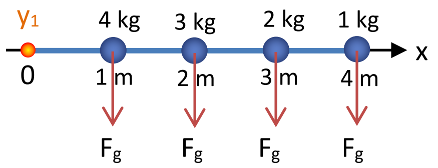
k az erőkar, ami az erőn átmenő egyenes és a forgástengely távolsága:





Az egyes testekre az $\mathbf{F_g}$ gravitációs erő fejt ki forgatónyomatékot, $\mathbf{F_g}$ függőleges.

$\mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{gi}) \quad \to \quad M = \Sigma(k_i m_i g) = \Sigma(k_i m_i)\, g$



Kiindulási állapotban az x tengely vízszintes $\to$ $\mathbf{F_g} \perp \mathbf{r}$ $\to$ $k_i = x_i$ $\to$ $M_0 = \Sigma(x_i m_i)\, g$.
Behelyettesítve

$M_0 = \Sigma(x_i m_i)\, g = (1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) \cdot 10 = 200$ Nm.

Vagy felírhatjuk a forgatónyomatékot az össztömeggel és a tömegközéppont koordinátájával is: mivel

$x_s = \Sigma(x_i m_i)/\Sigma(m_i)$, ezért $\Sigma(x_i m_i) = \Sigma(m_i)\, x_s \quad \to \quad M_0 = \Sigma(m_i)\, x_s\, g = 10 \cdot 2 \cdot 10 = 200$ Nm.

A tehetetlenségi nyomaték a megfelelő (y_1) forgástengelyre: $\Theta = \Theta_{y1} = 50$ kgm^2. $M_0 = \Theta\beta_0$

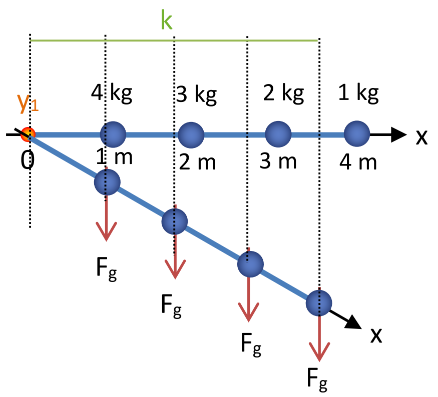
$\to$ vízszintes helyzetben $\beta_0 = M_0 / \Theta_{y1} = 200/50 = 4$ s^{-2} szöggyorsulással indul a keret.

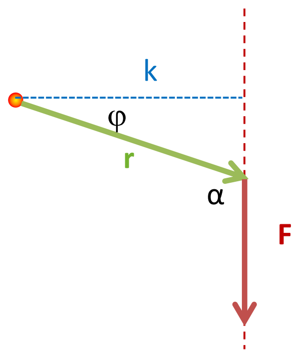
c) Az egyes pontok gyorsulása $a_i = R_i\beta$, ahol R_i a körpálya sugara, a test távolsága a forgástengelytől.
Itt most $R_i = x_i$.

A 4 kg-os testre $a_4 = x_4\, \beta = 1 \cdot 4 = 4$ m/s^2,

az 1 kg-os testre $a_1 = x_1\, \beta = 4 \cdot 4 = 16$ m/s^2 (ami nagyobb g-nél!)

d) Ha a keret a vízszinteshez képest 30°-ot elfordult:





Az erőkar $k_i = x_i \cos\varphi$;

a forgatónyomaték $M_\varphi = \Sigma(k_i F_{gi}) = \Sigma(x_i \cos\varphi\, m_i g) = \Sigma(x_i m_i g) \cos\varphi = M_0 \cos\varphi$

$\to$ $M_{30°} = M_0 \cos 30° = 200 \cdot \cos 30° = 173{,}2$ Nm.

e) Két módon oldhatjuk meg a feladatot.

A szürkével írt részt nem kell tudni a zh-ra.

Az impulzusmomentum-tétel szerint

$\Theta\beta = M \quad \to \quad \beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = M_\varphi / \Theta = M_0/\Theta \cdot \cos\varphi$.

A differenciálegyenlet megoldása a $\varphi(t)$ függvény, amiből kifejezhető $\omega(\varphi)$,
de az alábbi átalakítással közvetlenül a szögsebességet kaphatjuk meg a szög függvényében:

$\beta = \dot{\omega} = d\omega/dt = d\omega/d\varphi \cdot d\varphi/dt = \omega \cdot d\omega/d\varphi$, tehát

$\omega \cdot d\omega/d\varphi = M_0/\Theta \cos\varphi \quad \to$ szeparálva $\omega\, d\omega = M_0/\Theta \cos\varphi\, d\varphi$

$\to$ integrálva, és felhasználva, hogy $\varphi = 0$-nál $\omega = 0$: $\tfrac{1}{2}\omega^2 = M_0/\Theta \sin\varphi$.

Behelyettesítve: $\omega^2 = 2M_0/\Theta_{y1} \sin\varphi = 2 \cdot 200/50 \cdot \sin\varphi = 8 \sin\varphi \quad \to \quad \omega = \sqrt{8 \sin\varphi}$ s^{-1}.

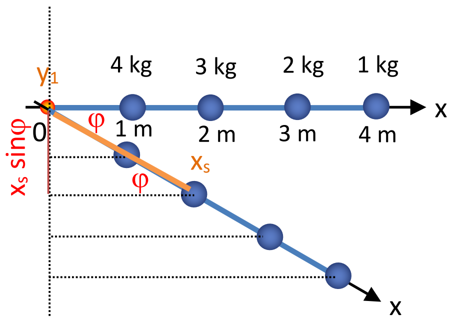
Ha a keret a tengely körül súrlódásmentesen fordul el, akkor a feladat megoldható energia-megmaradással:

$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin,forg} = \text{konst.}$

$E_{pot} = mgz$, a forgási kinetikus energia $E_{kin,forg} = ½\Theta\omega^2$, tehát

$E_{mech} = mgz + ½\Theta\omega^2 = \text{konst.}$

A helyzeti energiát számolhatjuk az egyes tömegpontok helyzeti energiájának összegeként, vagy gyorsabb, ha az össztömeggel és a tömegközéppont koordinátájával számolunk. Vegyük pl. az induló helyzet vízszintes síkjának magasságát a zérus pontnak ($z_{s,0} = 0$), így φ szögelfordulás esetén $z_{s,\varphi} = -x_s \sin\varphi$.



A kiinduló helyzetben $E_{pot} = 0$ és $\omega = 0 \rightarrow E_{kin,forg} = 0$;

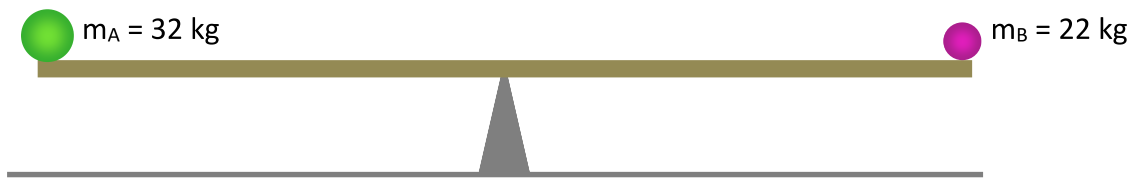
φ szögelfordulás esetén $E_{pot} = \Sigma(m_i)\, g \cdot(-x_s \sin\varphi)$ és $E_{kin,forg} = ½\, \Theta_{y1}\, \omega^2$, tehát

$$0 + 0 = -\Sigma(m_i)\, g\, x_s \sin\varphi + ½\, \Theta_{y1}\, \omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{2\frac{\Sigma(m_i)\, g\, x_s}{\Theta_{y1}}\sin\varphi}\,.$$

Behelyettesítve: $\omega = \sqrt{2\frac{\Sigma(m_i)\, g\, x_s}{\Theta_{y1}}\sin\varphi} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 10\cdot 2/50\cdot \sin\varphi} = \sqrt{8 \sin\varphi}\ s^{-1}$.

9/2. Aladár (32 kg) és Bözsi (22 kg) mérleghintázni mennek. A mérleghinta rúdja 6,4 m hosszú és 10 kg tömegű, állandó keresztmetszetű, homogén, és a felezőpontja alatt van alátámasztva egy 40 cm magas tartóval.

a) Hol van az Aladár + Bözsi + rúd rendszer tömegközéppontja, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?
b) Mekkora a nehézségi erő forgatónyomatéka az alátámasztási pontra a rúd vízszintes helyzetében?
c) Mi történik a vízszintes helyzetben, ha a gyerekeknek nem ér le a lábuk?
d) Hová kell üljön Aladár, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyenek?
e) Ha megoldható lenne, hogy az alátámasztást odébb toljuk, akkor hol kéne alátámasztani a rudat, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyen, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?

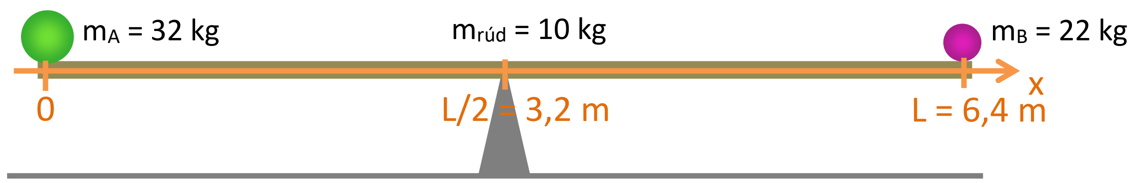


Megoldás:

a) Hol van az Aladár + Bözsi + rúd rendszer tömegközéppontja, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?

A mérleghinta rúdja homogén és állandó keresztmetszetű, ezért a tömegközéppontja a rúd felezőpontjában van.

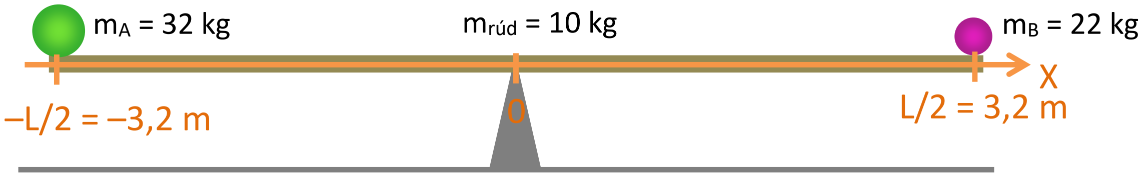
A tömegközéppont kiszámításához vegyünk fel egy x tengelyt a rúd mentén pl. így:



ezzel a tömegközéppont x koordinátája

$x_S = (0\cdot 32 + 3{,}2\cdot 10 + 6{,}4\cdot 22) / (32+10+22) = 2{,}7$ m;

vagy így:

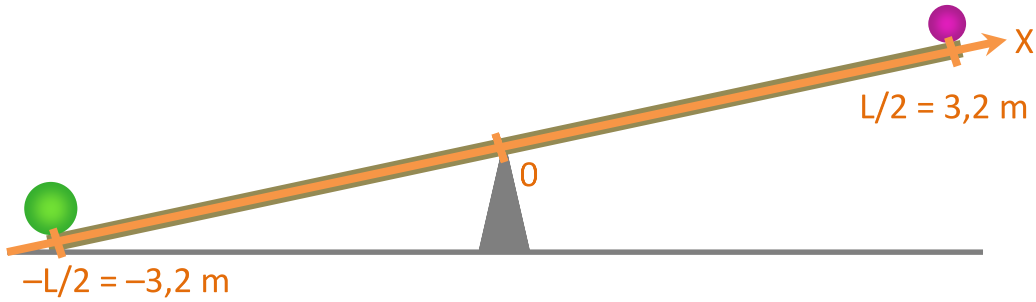


ezzel a tömegközéppont x koordinátája

$X_S = (-3{,}2\cdot32 + 0\cdot10 + 3{,}2\cdot22) / (32+10+22) = -0{,}5$ m.

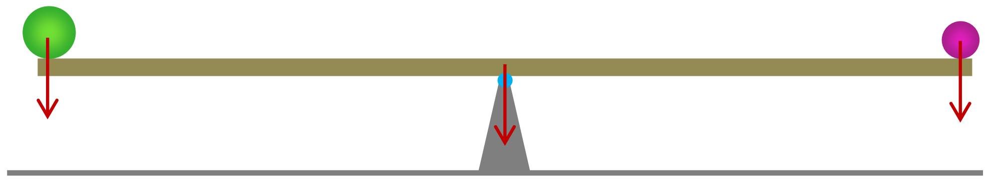
Tehát a tömegközéppont az alátámasztástól 0,5 m-re van a nehezebb gyerek, Aladár felé (Aladártól 2,7 m-re, Bözsitől 3,7 m-re).

Az egyszerűség kedvéért vízszintes helyzetben ábrázoltuk a mérleghintát, de ferdén is felrajzolhatjuk:



b) Mekkora a nehézségi erő forgatónyomatéka az alátámasztási pontra a rúd vízszintes helyzetében?
A tömegeket kis m-mel, a forgatónyomatékokat nagy M-mel jelöljük.
A forgatónyomatékot kétféleképpen is kiszámolhatjuk:

- Az egyes testekre ható forgatónyomatékok összegeként:



az Aladárra ható m_Ag nehézségi erő a hintát balra akarja forgatni (pozitív forgásirányba)

$M_A = m_Ag \cdot (L/2) = 32\cdot10\cdot3{,}2 = 1024$ Nm;

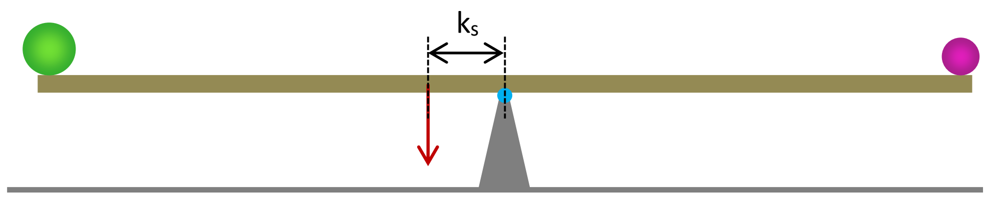
a Bözsire ható m_Bg nehézségi erő a hintát jobbra akarja forgatni (negatív forgásirányba)

$M_B = -\, m_Bg \cdot (L/2) = -22\cdot10\cdot3{,}2 = -704$ Nm;

a rúdra ható $m_{rúd}g$ nehézségi erő forgatónyomatéka zérus, mert az erő átmegy az alátámasztási ponton;
tehát a rendszer forgatónyomatéka összesen

$M = M_A + M_B + 0 = 320$ Nm, balra (mivel az összeg előjele pozitív).

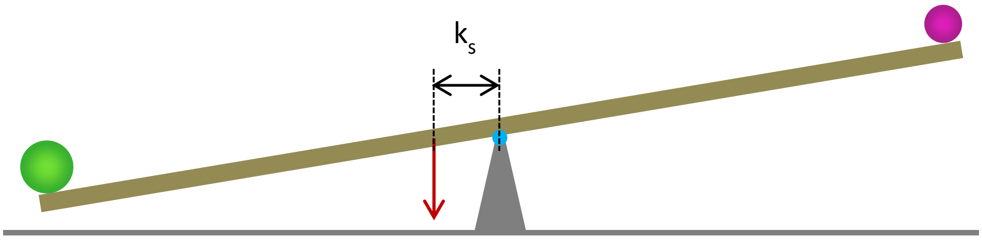
- A rendszert alkotó testeket helyettesíthetjük egyetlen pontszerű testtel, aminek tömege az össztömeg, és a helye a rendszer tömegközéppontja, így egy lépésben számolható a forgatónyomaték:



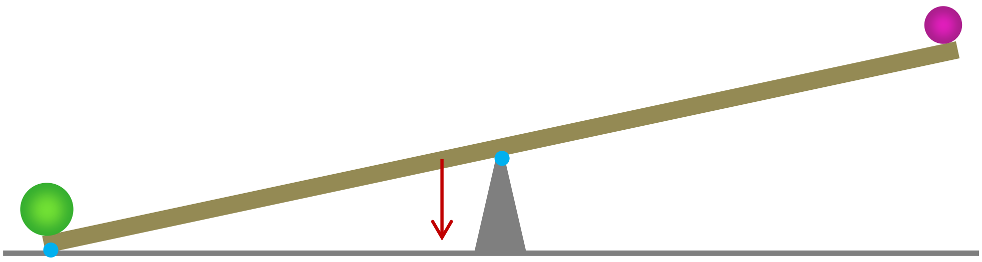
Az erőkar a tömegközéppont és az alátámasztás távolsága, $k_s = 0{,}5$ m:

$M = (m_A+m_B+m_{rúd})\cdot g \cdot k_s = (32+22+10)\cdot10 \cdot 0{,}5 = 320$ Nm, balra.

c) Mivel az alátámasztás nem a tömegközéppont alatt van, ezért a hinta vízszintes helyzetben nincs egyensúlyban. A tömegközéppont az alátámasztástól balra van, ezért a hinta elfordul balra:



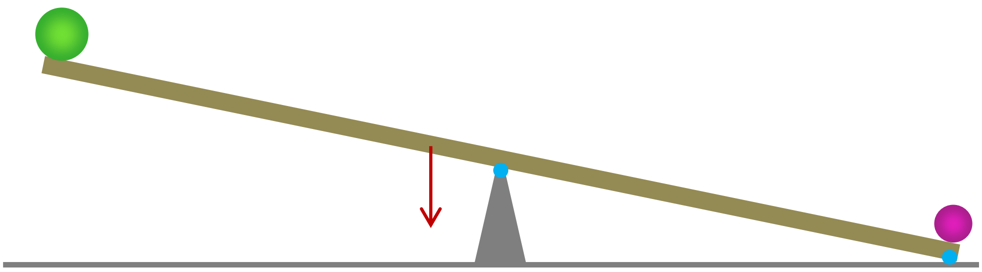
Ahogy elfordul a rendszer, a tömegközépponton átmenő függőleges erővektoron átmenő függőleges egyenes egyre közelebb kerül a forgástengelyhez, csökken az erőkar $\rightarrow$ csökken a forgatónyomaték.



Amikor Aladár oldalán földet ér a mérleghinta, a rendszer egyensúlyban lesz, mivel a tömegközépponton átmenő nehézségi erő vektora a két alátámasztási pont között van (az Aladár oldalán levő alátámasztási pont körül jobbra, a középen levő alátámasztási pont körül balra indítana forgómozgást).

<u>Megjegyzés:</u>

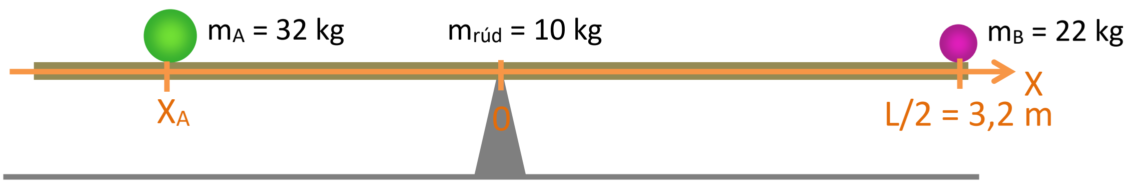
Ha Bözsi oldalán ér földet a rúd, akkor a tömegközépponton átmenő nehézségi erő vektora mindkét alátámasztási ponttól balra van, mindkét pont körül balra indít forgómozgást, így a rendszer elfordul balra:



d) Hová kell üljön Aladár, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyenek?

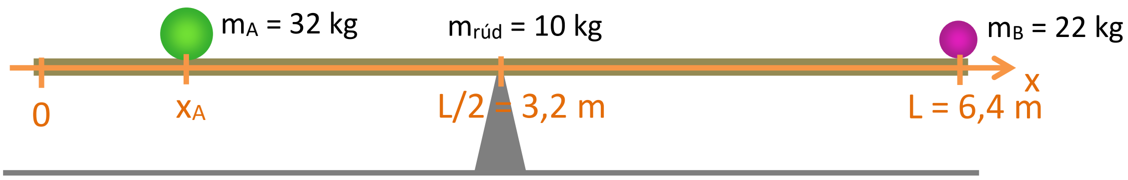
Akkor lesznek (vízszintes helyzetben) egyensúlyban, ha a közös tömegközéppont éppen az alátámasztás fölött van, így az eredő forgatónyomaték zérus.

Ha úgy vesszük fel az X tengelyt, hogy az alátámasztásnál van az origó, akkor $X_s = 0$ kell legyen:



$X_S = (X_A \cdot 32 + 0 \cdot 10 + 3{,}2 \cdot 22) / (32+10+22) = 0 \quad \rightarrow \quad x_A = -2{,}2$ m.

Ha úgy vesszük fel az x tengelyt, hogy a rúd bal végénél van az origó, akkor $x_s = 3{,}2$ m kell legyen:



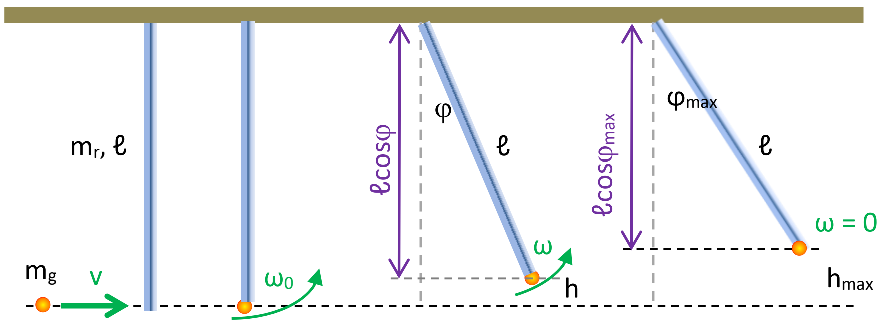
$x_S = (x_A \cdot 32 + 3{,}2 \cdot 10 + 6{,}4 \cdot 22) / (32+10+22) = 3{,}2 \quad \rightarrow \quad x_A = 1$ m.

Tehát Aladárnak 1 m-rel közelebb kell csúsznia a rúd közepe felé.

e) Ha megoldható lenne, hogy az alátámasztást odébb toljuk, akkor hol kéne alátámasztani a rudat, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyen, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?

A tömegközéppont alatt, amit a **b)** részben már kiszámoltunk, tehát a rúd közepétől 0,5 m-rel balra.

9/3. Függőlegesen fellógatott m_r tömegű, ℓ hosszúságú homogén rúd alsó pontjához vízszintes v sebességgel érkezve hozzátapad egy m_g tömegű golyó.
a) Mekkora szögsebességgel indul a rúd a hozzátapadt golyóval?
b) Maximum mekkora szöggel lendül ki?



Megoldás

a) Ütközés után a rúd a hozzátapadt golyóval a rúd rögzítési pontja – mint rögzített tengely – körül forgó mozgásba kezd. Az ütközésnél az impulzus nem marad meg, mert az ütközés pillanatában a merev rúd közvetítésével a rögzítési pontban fellép egy F_r erő (ellentétben a matematikai ingával, ahol a kötél nem közvetít erőt a rögzítési ponthoz), vagyis a rúd + golyó rendszerre ható külső erők eredője nem zérus. Viszont a külső erők forgatónyomatéka a rögzítési pontra az ütközés pillanatában zérus, így a rúd + golyó rendszernek a forgástengelyre vonatkoztatott impulzusmomentuma az ütközés előtt ill. után megegyezik.

A rendszer impulzusmomentumának csak a nagyságát felírva

- ütközés előtt a golyó impulzusa $p = m_g v$, ennek momentuma a forgástengelyre $L_g = m_g v\,\ell$ (a rúd impulzusmomentuma pedig zérus),
- ütközés után közvetlenül a rúd + golyó rendszer impulzusmomentuma $L = \Theta\omega_0$.

Θ a rúd + golyó rendszer tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre, azaz a felfüggesztési pontra nézve:

a rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontjára: $\Theta_{rúd,vég} = ⅓ m_r \ell^2$ (ld. a táblázatot a bevezetőben),

a golyó tehetetlenségi nyomatéka az ℓ távolságra levő pontra: $\Theta_{golyó} = m_g \ell^2$, tehát

$\Theta = \Theta_{rúd,vég} + \Theta_{golyó} = ⅓ m_r \ell^2 + m_g \ell^2$.

Az impulzusmomentum-megmaradás:

$m_g v\,\ell = (⅓ m_r \ell^2 + m_g \ell^2)\,\omega_0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{m_g}{m_g + m_r/3} \cdot \frac{v}{\ell}$ a szögsebesség induláskor.

A golyó a rúd végére tapadva

$v_0 = \omega_0 \ell = v \cdot m_g/(m_g + ⅓ m_r)$ sebességgel indul, vagyis $m_g/(m_g + ⅓ m_r)$-ed részére lassul.

b) Mivel a rúd súrlódásmentesen fordul, energia-megmaradással számíthatjuk, milyen magasra lendül ki:

$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin,forg} = \Sigma m\, g\, z + ½\Theta\omega^2 = \text{konst.}$

Közvetlenül az ütközés után $E_{kin,forg,0} = ½\Theta\omega_0^2$:

$\Theta = ⅓m_r\ell^2+m_g\ell^2$ és $\omega_0 = m_g/(⅓m_r+m_g) \cdot v/\ell$ behelyettesítésével

$E_{kin,forg,0} = ½\Theta\omega_0^2 = ½\,(⅓m_r\ell^2+m_g\ell^2) \cdot [m_g/(⅓m_r+m_g) \cdot v/\ell]^2 = \ldots = \frac{1}{2} m_g \frac{m_g}{m_g+m_r/3} v^2.$

Látható, hogy az ütközés utáni $E_{kin,forg,0} = ½\Theta\omega_0^2$ forgási kinetikus energia kisebb, mint az ütközés előtti $E_{kin,tr} = ½m_g v^2$ kinetikus energia, mert az ütközés rugalmatlan (a különbség a deformációs munka).

Az inga kiindulási (függőleges) helyzetében a z=0 megfelelő választásával $E_{pot,0} = 0$, a mechanikai energia tehát

$E_{mech,0} = E_{pot,0} + E_{kin,forg,0} = 0 + \frac{1}{2} m_g \frac{m_g}{m_g+m_r/3} v^2.$

A φ_{max} maximális kilendülésnél

az m_g tömeg emelkedése $h_{max} = \ell(1–\cos\varphi_{max})$ [ld. az ábrát];

a rúd súlypontja a rúd felénél van, így a rúd súlypontjának emelkedése $½h_{max} = ½\ell(1–\cos\varphi_{max})$, tehát

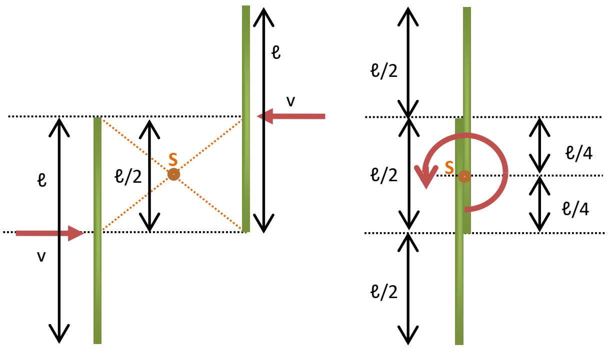
$E_{pot,\varphi\_max} = m_g g\, \ell(1– \cos\varphi) + m_r g\, ½\ell(1–\cos\varphi) = (m_g+½m_r)g\, \ell(1–\cos\varphi);$

és ebben a helyzetben $E_{kin,forg,\varphi\_max} = 0.$

Az energia-megmaradás: $E_{pot,0} + E_{kin,forg,0} = E_{pot,\varphi\_max} + E_{kin,forg,\varphi\_max}$, azaz $E_{kin,forg,0} = E_{pot,\varphi\_max}$:

$\frac{1}{2} m_g \frac{m_g}{m_g+m_r/3} v^2 = (m_g+½m_r)g\, \ell(1–\cos\varphi) \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = 1 - \frac{m_g^2}{2\left(\frac{m_r}{3} + m_g\right)\cdot\left(\frac{m_r}{2} + m_g\right)} \cdot \frac{v^2}{g\ell}.$

9/4. Két homogén, m tömegű, ℓ hosszú pálca v sebességgel közeledik egymáshoz vízszintes súrlódásmentes asztalon. A pálcák merőlegesek a sebességükre, de az ábra szerint el vannak tolódva egymáshoz képest. Ütközés után a két pálca összeragad. Hogy fognak mozogni?



Megoldás

Az ütközés közben a pálcákra ható külső erők ($m\mathbf{g}$ és $\mathbf{F}_{ny}$) eredője zérus,
így érvényes az impulzus- és az impulzusmomentum-megmaradás is.

Az ütközés előtt a két pálca sebességének nagysága v, de az irányuk ellentétes, így az összes impulzusuk

$p_e = mv + m(–v) = 0;$

az összeragadt két pálca tömegközéppontjának a sebessége az ütközés után u, az impulzusa

$p_u = (m+m)u;$

az impulzus-megmaradást felírva

$mv + m(–v) = 0 = (m+m)u \quad \rightarrow \quad u = 0.$

Mivel a két test tömege és sebessége egyenlő, az össz-impulzus zérus, ütközés után az összeragadt pálcák haladó mozgást nem végeznek, vagyis a tömegközéppont helyben marad.

A két pálca összeragadva az S tömegközéppont körül fog forogni állandó szögsebességgel.
A szögsebességet az impulzusmomentum-megmaradásból tudjuk kiszámolni:
Az ütközés előtt haladó mozgást végző pálcák impulzusának momentuma a tömegközéppontra, azaz a majdani forgástengelyre

$\mathbf{L}_e = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2$

A tömegek és a sebességek nagysága megegyezik, és a szimmetria miatt a pálcák tömegközéppontjának az S tömegközépponthoz (majdani forgástengelyhez) képest megadott helyvektorának nagysága is, tehát a két tag nagysága egyenlő, de kérdés, hogy a vektoriális szorzatok előjele megegyezik vagy ellentétes. Látható, hogy mindkét pálca ugyanolyan irányú forgómozgásba kezdene egymagában is az S pont körül, tehát a majdani forgástengelyre vonatkoztatva mindkét tömeg esetében ugyanolyan előjelű a vektoriális szorzat. (Ezt abból is beláthatjuk, hogy $\mathbf{v_2} = -\mathbf{v_1}$ és $\mathbf{r_2} = -\mathbf{r_1}$.)
Az impulzus „karja" ahhoz hasonlóan számolható, ahogyan az erőkar a forgatónyomatéknál: a tömegközéppont **v** sebességvektorán átmenő egyenes és a forgástengely távolságát kell meghatároznunk, ami jelen esetben $\ell/4$, tehát $|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = v\,\ell/4$; így

$$L_e = 2\left(mv\frac{\ell}{4}\right).$$

Az ütközés után az összetapadt, forgó mozgást végző pálcák impulzusmomentuma:

$$L_u = \Theta\,\omega\,.$$

Fel kell írnunk az összetapadt forgó pálcák Θ tehetetlenségi nyomatékát:
A forgástengely mindkét pálcát ¼ – ¾ arányban osztja. Egy pálca tehetetlenségi nyomatéka erre a pontra Steiner-tétellel számolható: a súlyponton, vagyis a rúd felénél átmenő tengelyre $\Theta_s = \frac{1}{12}m\ell^2$ (ld. a bevezetőben), ehhez képest $d = \ell/4$ távolságra van eltolódva a forgástengely, tehát

$$\Theta_P = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}m\ell^2; \quad \text{a két pálcára } \Theta = \frac{7}{24}m\ell^2.$$

VAGY integrálással: $\Theta = 2\int_{-\ell/4}^{3\ell/4} x^2\,\rho\,A\,dx = 2\int_{-\ell/4}^{3\ell/4} x^2\,\frac{m}{A\ell}\,A\,dx = 2\frac{m}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/4}^{3\ell/4} = \frac{7}{24}m\ell^2.$

Az ütközés utáni impulzusmomentum tehát

$$L_u = \frac{7}{24}m\ell^2\,\omega\,.$$

Az impulzusmomentum-megmaradás:

$$2\left(mv\frac{\ell}{4}\right) = \frac{7}{24}m\ell^2\,\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{12}{7}\frac{v}{\ell}$$ lesz az összeragadt pálcák szögsebessége.

Gyakorló feladatok a zh-ra

9/5. Elhanyagolható tömegű 1 m hosszú rúd két végén 5–5 kg tömegű golyók vannak felerősítve.
a) Számítsuk ki a rúd felezési pontján átmenő, a rúdra merőleges tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot!
b) Mennyivel változik a tehetetlenségi nyomaték, ha a tengelyt a rúd mentén önmagával párhuzamosan 10 cm-rel eltoljuk? Fejezzük ki az új tehetetlenségi nyomatékot az eredeti nyomaték, a tömeg és az eltolás segítségével!

Megoldás
a) A rúd tömege elhanyagolható, tehát csak a két golyó tehetetlenségi nyomatékát kell számolni:

$$\Theta_s = \Sigma(m_i\ell_i^2) = 2\cdot(5\cdot0{,}5^2) = 2{,}5\text{ kgm}^2.$$

b) Az új tengelyre $\Theta_p = 5\cdot0{,}4^2 + 5\cdot0{,}6^2 = 2{,}6$ kgm^2, azaz a tehetetlenségi nyomaték 0,1 kgm^2-tel nő.
A Steiner-tétel szerint az S súlyponton átmenő tengelyt párhuzamosan a P pontba tolva az új tehetetlenségi nyomaték $\Theta_P = \Theta_s + (\Sigma m_i)d^2$, ahol Θ_s az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, d pedig a két tengely távolsága.
Az **a)** részben kiszámolt tehetetlenségi nyomaték a rúd felezési pontján, azaz a súlyponton megy át, így a Steiner-tételt alkalmazva: $\Theta_P = \Theta_s + (\Sigma m_i)d^2 = 2{,}5 + 10\cdot0{,}1^2 = 2{,}6$ kgm^2, azaz $(\Sigma m_i)d^2 = 0{,}1$ kgm^2-tel nőtt.

9/6. Egyik végén (súrlódásmentes) csuklóval felfogott homogén rudat vízszintes helyzetből (kezdősebesség nélkül) elengedünk.
Adjuk meg
a) a rúd szöggyorsulását,
b) a rúd tömegközéppontjának gyorsulását;
c) a rúd rögzítetlen végpontjának gyorsulását a kiindulási pillanatra!
d) Adjuk meg a rúd ω szögsebességét a vízszintessel bezárt φ szög függvényében!

Megoldás
a) Írjuk fel az impulzusmomentum-tételt: $M = \dot{L}$, ahol
a forgatónyomaték $M = F\,k$;
$F = mg$;
a rúd tömegközéppontjában ható mg erő erőkarja $k = \ell/2 \cos\varphi$, ha a φ szöget a vízszintestől mérjük;
az impulzusmomentum $L = \Theta\omega$, a deriváltja $\dot{L} = \Theta\beta$,
a rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontján átmenő tengelyre $\Theta = \frac{1}{3} m\ell^2$;
$\rightarrow$ $F\,k = \Theta\beta$: $mg\,(\ell/2 \cos\varphi) = (1/3\, m\ell^2)\,\beta$,
ebből a rúd szöggyorsulása
$\beta = 3/2\, g \cos\varphi / \ell$. (*)

b) A rúd tömegközéppontja a forgástengelytől $\ell/2$ távolságra van, tehát a gyorsulása
$a_S = \ell/2\, \beta = 3/4\, g \cos\varphi$.

c) A rúd rögzítetlen végpontja a forgástengelytől ℓ távolságra van, tehát a gyorsulása
$a = \ell\,\beta = 3/2\, g \cos\varphi$
Ez induláskor $a = 3/2\, g > g$!

d)
A (*) differenciálegyenlet megadja a β szöggyorsulást az időfüggő φ szög függvényében:
$\beta = \ddot{\varphi} = 3/2\, g \cos\varphi / \ell$, ennek megoldása a $\varphi(t)$ függvény lenne, de
$\beta = \dot{\omega} = d\omega/dt = d\omega/d\varphi \cdot d\varphi/dt = \omega \cdot d\omega/d\varphi$ átalakítással integrálás után közvetlenül az $\omega(\varphi)$ függvényt kapjuk meg:
$\omega \cdot d\omega/d\varphi = 3/2\, g \cos\varphi / \ell$ $\rightarrow$ szeparálva $\omega\, d\omega = 3/2\, g \cos\varphi / \ell\ \, d\varphi$.
Ezt integrálva, és felhasználva, hogy $\varphi = 0$-nál $\omega = 0$: $\omega = \sqrt{3\, g \sin\varphi / \ell}$.
VAGY:
A rúd szögsebességét a vízszintessel bezárt φ szöge függvényében megkaphatjuk energia-megmaradásból is (mivel a súrlódást, közegellenállást elhanyagolhatjuk). A rúd helyzeti energiáját a tömegközéppontjának helyzetével adjuk meg. Legyen a helyzeti energia zérus a kezdő állapotban:
$0 = -mg\,(\ell/2 \sin\varphi) + ½\, \Theta\, \omega^2 = -mg\,(\ell/2 \sin\varphi) + ½\,(1/3 m\ell^2)\, \omega^2$
$\rightarrow$ $\omega = \sqrt{3\, g \sin\varphi / \ell}$.

A megoldásban felhasznált tehetetlenségi nyomaték kiszámítása:
$\Theta = \int \ell^2\, dm = \int \ell^2 \rho\, dV$
Az x tengely mentén O és ℓ között elhelyezkedő vékony, A keresztmetszetű rúdra az x tengelyre merőlegesen bontjuk $dV = A\,dx$ térfogatelemekre,
a sűrűsége $\rho = m/(A\ell)$,
és mivel a forgástengely O-n megy át, ezért $\ell = x$, így
$\Theta = \int_0^\ell x^2 \rho\, A\, dx = \int_0^\ell x^2\, \frac{m}{A\ell}\, A\, dx = \frac{m}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\ell = \frac{1}{3} m\ell^2$.

9/7. Egy M tömegű, ℓ hosszúságú pálca egyik végét az asztalra helyezzük, majd függőleges helyzetből elengedjük. Az asztalon lévő vége nem csúszik meg.
a) Adjuk meg a rúd szögsebességét a függőlegessel bezárt szög függvényében!
b) Mekkora sebességgel ér az asztalra a pálca vége?

Megoldás
Energia-megmaradással számolhatunk.
a) A pálca tömegközéppontja kezdetben $h_0 = \ell/2$ magasságban van, majd forgás közben $h = \ell/2 \cos\varphi$ magasságban (φ a függőlegessel bezárt szög). Ahogy csökken a pálca helyzeti energiája, úgy nő a forgási kinetikus energiája:

$$mg\,\ell/2 \cos\varphi + 0 = mg\,\ell/2 \cos\varphi + ½\,\Theta\omega^2 = mg\,\ell/2 \cos\varphi + ½\cdot⅓m\ell^2\ \omega^2$$

$$\rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(1-\cos\varphi)}\ .$$

b) $\varphi = 90°$, $v = \ell\omega$ (mivel a pálca nem csúszik meg az asztalon):

$$v = \sqrt{3g\ell}\ .$$

Nem zh-feladatok

9/8. Számítsuk ki egy R sugarú, homogén tömegeloszlású korongnak a középpontján a korongra merőlegesen álló tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!
Megoldás

$$\Theta = \int \ell^2\, dm = \int \ell^2\, \rho\, dV$$

Ha M a korong tömege, akkor a sűrűsége $\rho = M/V = M/(R^2\pi D)$, ahol D a korong vastagsága.
Hengerkoordináta-rendszert használva a térfogatelem $dV = D\ r\, d\varphi\ dr$;
a térfogatelem távolsága a forgástengelytől $\ell = r$, tehát

$$\Theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \frac{M}{R^2\pi D} Dr\, d\varphi\, dr = \frac{M}{R^2\pi}\int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) dr = \frac{M}{R^2\pi} 2\pi \int_0^R r^3\, dr = \frac{2M}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2.$$

Vegyük észre, hogy a tehetetlenségi nyomaték a korong vastagságától független!

9/9. Határozzuk meg egy homogén egyenes körhenger tehetetlenségi nyomatékát
a) a szimmetriatengelyre vonatkoztatva;
b) egy alkotóra vonatkoztatva!
Megoldás
a) Az előző feladat eredményét felhasználhatjuk, hiszen a körhenger metszete is korong, és a korong tehetetlenségi nyomatéka nem függött a korong vastagságától, azaz a henger magasságától, vagyis

$$\Theta_S = ½\ MR^2\ .$$

b) A Steiner-tételt használhatjuk. A két tengely távolsága R, tehát

$$\Theta_P = \Theta_S + MR^2 = ½\ MR^2 + MR^2 = 3/2\ MR^2.$$

9/10. Számítsuk ki egy R sugarú félgömb szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!
Megoldás
M tömegű félgömb sűrűsége $\rho = M/V = M/(2R^3\pi/3) = 3M/(2R^3\pi)$.
A félgömböt összerakhatjuk a forgástengelyre merőleges korongokból, melyek

sugara $r = \sqrt{R^2-x^2}$,
térfogata $dV = r^2\pi\, dx = (R^2-x^2)\pi\, dx$,
tömege $dm = \rho\, dV = 3M/(2R^3\pi)\cdot(R^2-x^2)\pi\, dx = 3M/(2R^3)\cdot(R^2-x^2)\, dx$,
tehetetlenségi nyomatéka

$$d\Theta = ½\, dm\, r^2 = ½\,[3M/(2R^3)\cdot(R^2-x^2)\, dx]\cdot(R^2-x^2) = 3M/(4R^3)\cdot(R^2-x^2)^2\, dx$$

A félgömbre tehát

$$\Theta = \int d\Theta = \int_0^R \frac{3M}{4R^3}\left(R^2-x^2\right)^2 dx = \ldots = \frac{2}{5} M R^2\ .$$

9/11. Egy M tömegű, R sugarú korongot leteszünk vízszintes síkra úgy, hogy egy helyben ω_0 szögsebességgel pörög. Mit fog csinálni, ha a síkkal való érintkezési pontjánál F_s súrlódási erő lép fel?

Megoldás

Az F_s súrlódási erő a korong forgását fékezi (1), de ezzel a haladó mozgását gyorsítja (2), tehát

(1) $\Theta\beta = -F_s R$, ahol $\Theta = ½ MR^2$

(2) $Ma = F_s$, ahol $F_s = \mu Mg$

Mivel a korong most nem gördül, ezért most nem igaz, hogy $a = \beta R$!

A fentiekből

(1) $½ MR^2 \beta = -\mu Mg R \rightarrow \beta = -2\mu g/R$

$\rightarrow$ a szögsebesség az idő függvényében $\omega(t) = \omega_0 + \beta t = \omega_0 - (2\mu g/R) t$;

(2) $Ma = \mu Mg \rightarrow a = \mu g$

$\rightarrow$ a korong sebessége az idő függvényében $v(t) = v_0 + at = \mu g t$.

A korong szögsebessége csökken, sebessége nő, és attól a t* pillanattól kezdve, amikor $v(t^*) = R\,\omega(t^*)$ teljesül, a korong tisztán gördülni fog:

$R (\omega_0 - 2\mu g/R\, t^*) = \mu g t^* \rightarrow t^* = R\omega_0 / 3\mu g$.

9/12. Egy M tömegű, R sugarú korongot meglökünk v_0 kezdősebességgel vízszintes síkon úgy, hogy forgás nélkül tisztán csúszik. Mikortól fog tisztán gördülni?

Megoldás

A korongnak a síkkal való érintkezési pontjánál fellépő F_s súrlódási erő a haladó mozgást fékezi (1) , de a korong forgását gyorsítja (2).

(1) $Ma = -F_s$, $F_s = \mu Mg \rightarrow a = -\mu g$

(2) $\Theta\beta = F_s R$, ahol $\Theta = ½ MR^2$ (most nem igaz, hogy $a = \beta R$!)

$\rightarrow$ a korong sebessége az idő függvényében $v(t) = v_0 - at = v_0 - \mu g t$

$\rightarrow$ a szögsebesség az idő függvényében $\omega(t) = \omega_0 + \beta t = 2\mu g/R\, t$

Attól a t* pillanattól kezdve, amikor $v(t^*) = R\,\omega(t^*)$ teljesül, a korong tisztán gördülni fog:

$2\mu g\, t^* = v_0 - \mu g t^* \rightarrow t^* = v_0 / 3\mu g$.