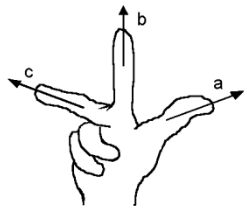
Forgómozgás, gördülés

Vektoriális szorzat

<u>Két vektor vektoriális szorzata:</u>

$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$



Két vektorhoz egy vektort rendel, aminek

nagysága $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\alpha$ (α a két vektor által bezárt szög);

iránya

merőleges a két vektor által kifeszített síkra, és

abba az irányba mutat, amerre <u>jobb</u> kezünk középső ujja mutat, ha a hüvelykujjunk az **a** vektor irányába és a mutatóujjunk a **b** vektor irányába mutat.

Párhuzamos vektorok vektoriális szorzata zérus.

A vektoriális szorzat antikommutatív, azaz ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{c}$.

Forgatónyomaték, impulzusmomentum

Általánosan az **a** vektor <u>nyomatéka</u> (<u>momentuma</u>): $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$, ahol **r** a helyvektor.

A forgatónyomaték az erő momentuma: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Az impulzusmomentum az impulzus momentuma: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (régebbi zh-megoldásokban **L** helyett **N** jelöli)

Impulzusmomentum-tétel

$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$

Kiterjedt test (pontrendszer) impulzusmomentumának deriváltja egyenlő a testre (pontrendszerre) ható erők forgatónyomatékának eredőjével.

Impulzusmomentum-megmaradás

ha $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{L}$ = konst.

Ha az erők forgatónyomatékának eredője zérus, akkor a test (pontrendszer) impulzusmomentuma állandó.

A gyakorlaton csak <u>rögzített tengely körül</u> elforduló/forgó testekkel és gördüléssel foglalkozunk.

Az egydimenziós haladó és a rögzített tengely körüli forgó mozgás összehasonlítása:

egydimenziós haladó mozgás	**forgómozgás rögzített tengely körül; tiszta gördülés**
m tömeg [kg]	Θ tehetetlenségi nyomaték [$kg\cdot m^2$]
a gyorsulás [m/s^2]	β szöggyorsulás [s^{-2}]
v sebesség [m/s]	ω szögsebesség [s^{-1}]
x helykoordináta; ill. s megtett út [m]	φ szög, ill. -elfordulás [rad]
$ma = F$ (F az eredő erő)	$\Theta\beta = M$ (M az eredő forgatónyomaték)
F erő [N]	M forgatónyomaték [N·m] rögzített tengely körül: $M = kF$, ahol k az erőkar
impulzus: $p = mv$ [kg·m/s]	impulzusmomentum: $L = \Theta\omega$ [$kg\cdot m^2/s$]
impulzustétel: $\dot{p} = F_k$ (F_k a külső erők eredője)	impulzusmomentum-tétel: $\dot{L} = M$
impulzus-megmaradás: ha $F_k = 0$, akkor p = konst.	impulzusmomentum-megmaradás: ha $M = 0$, akkor L = konst.
$E_{kin,tr} = \frac{1}{2}mv^2$ [J]	$E_{kin,forg} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$ [J]

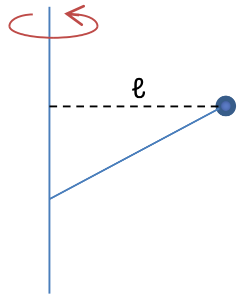
Ha a test tisztán gördül (nem csúszik meg), akkor $a = R\beta$; $v = R\omega$; $s = R\varphi$.

Tehetetlenségi nyomaték

Egy m tömegű, a forgástengelytől ℓ távolságra lévő tömegpont tehetetlenségi nyomatéka egy rögzített forgástengelyre vonatkoztatva:

$\Theta = m\ell^2$.

Mértékegysége [kg·m^2].



A tehetetlenségi nyomaték additív.

Pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka

$\Theta = \Sigma\,(m_i\ell_i^2)$.

Kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka integrállal számítható:

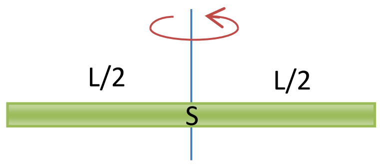
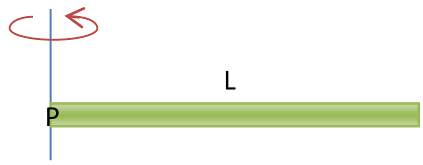
$\Theta = \int \ell^2\,dm = \int \ell^2\,\rho\,dV$.

A 9/3., 9/12., 9/14. feladatokban látható, hogy hogyan számítható ki néhány egyszerű kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka integrálással.

Egy bonyolultabb test tehetetlenségi nyomatékát integrálás nélkül is kiszámíthatjuk, ha felbontható olyan részekre, amiknek ismerjük a tehetetlenségi nyomatékát.

<u>Néhány fontos kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka:</u>

m tömegű, homogén, állandó keresztmetszetű (vékony) L hosszú rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúdra merőleges tengelyre, ami a rúd

felezőpontján, azaz a súlypontján megy át:	végpontján megy át:
	
$\Theta_S = \frac{1}{12}mL^2$	$\Theta_P = \frac{1}{3}mL^2$

$$\begin{matrix}\text{m tömegű,}\\ \text{R sugarú}\end{matrix}\;\left\{\begin{matrix}\text{korong, ill. tömör henger}\\ \\ \text{hengerpalást}\\ \\ \text{gömb}\end{matrix}\right\}\;\begin{matrix}\text{tehetetlenségi nyomatéka}\\ \text{a súlypontján átmenő tengelyre}\end{matrix}\;\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}mR^2\\ \\ mR^2\\ \\ \frac{2}{5}mR^2\end{matrix}\right\}.$$

Steiner-tétel: párhuzamos forgástengelyeket tekintve a test tehetetlenségi nyomatéka a súlypontján átmenő tengelyre a legkisebb, és

$\Theta_P = \Theta_S + \Sigma m\,d^2$, ahol

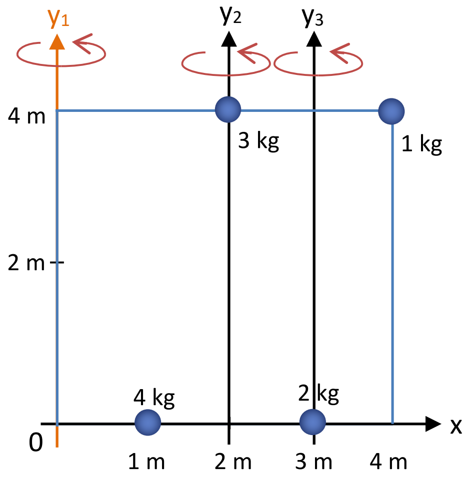
Θ_S az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték,

Θ_P a P ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték,

Σm az össztömeg,

d az S súlyponton átmenő tengely és a P ponton átmenő másik tengely távolsága.

9/1. Az ábrán látható 4 test egy elhanyagolható tömegű keretre van rögzítve.



a) Számoljuk ki a kerettel összefogott testek y_1, y_2, ill. y_3 tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

A keretet vízszintes helyzetbe fordítjuk, az y_1 forgástengelyt vízszintesen rögzítjük, majd a keretet (az x tengelyt) elengedjük, így a keret a testekkel a vízszintes helyzetű y_1 tengely körül függőleges síkban forogni kezd.

b) Adjuk meg a keret szöggyorsulását a kiinduló helyzetben!

c) Adjuk meg a 4 kg-os és az 1 kg-os test gyorsulását a kiinduló helyzetben!

d) Mekkora a gravitációs erők forgatónyomatéka az y_1 tengelyre, amikor a keret a vízszintessel 30°-os szöget zár be?

e) Adjuk meg a keret szögsebességét a vízszintessel bezárt szög függvényében!

Megoldás

a) Mivel a keret tömege elhanyagolható, csak a 4 testtel kell számolnunk, és tudjuk, hogy pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \Sigma\,(m_i \ell_i^2)$.

ℓ_i, az egyes testek távolsága a forgástengelytől jelen esetben az y_1, y_2, y_3 forgástengely és az egyes testek x koordinátájából számítható, mert a forgástengelyek merőlegesek az x tengelyre.

Az y_1 tengely az $x_1 = 0$ -nál van, ezért az erre a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték számításánál a forgástengelytől mért távolságok

$\ell_{4\,kg} = x_{4\,kg} - x_1 = 1–0 = 1$ m;

$\ell_{3\,kg} = x_{3\,kg} - x_1 = 2–0 = 2$ m;

$\ell_{2\,kg} = x_{2\,kg} - x_1 = 3–0 = 3$ m;

$\ell_{1\,kg} = x_{1\,kg} - x_1 = 4–0 = 4$ m;

tehát

$\Theta_{y1} = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2 = 50$ kgm^2.

Az y_2 tengely az $x_2 = 2$ m -nél van, ezért az erre a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték számításánál a forgástengelytől mért távolságok

$\ell_{4\,kg} = x_{4\,kg} - x_2 = 1–2 = –1$ m;

$\ell_{3\,kg} = x_{3\,kg} - x_2 = 2–2 = 0$ m;

$\ell_{2\,kg} = x_{2\,kg} - x_2 = 3–2 = 1$ m;

$\ell_{1\,kg} = x_{1\,kg} - x_2 = 4–2 = 2$ m;

tehát

$\Theta_{y2} = 4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 10$ kgm^2.

Az y_3 tengely az $x_3 = 3$ m -nél van, ezért az erre a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték számításánál a forgástengelytől mért távolságok

$\ell_{4\,kg} = x_{4\,kg} - x_3 = 1–3 = –2$ m;

$\ell_{3\,kg} = x_{3\,kg} - x_3 = 2–3 = –1$ m;

$\ell_{2\,kg} = x_{2\,kg} - x_3 = 3–3 = 0$ m;

$\ell_{1\,kg} = x_{1\,kg} - x_3 = 4–3 = 1$ m;

tehát

$\Theta_{y3} = 4 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 20$ kgm^2.

Látható, hogy az y_2 tengelyre a legkisebb a tehetetlenségi nyomaték.

Számoljuk ki a tömegközéppont x koordinátáját:

$x_s = \Sigma(x_i m_i)/\Sigma(m_i) = (1\cdot4+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot1)/(4+3+2+1) = 2$ m,

vagyis az y_2 tengely éppen a tömegközépponton megy át, vagyis most $\Theta_{y2} = \Theta_s$.

A Steiner-tétel szerint a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték a legkisebb (párhuzamos tengelyek esetén).

A másik két tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot számolhatjuk a Steiner-tétel alkalmazásával:

$\Theta_p = \Theta_s + (\Sigma m_i)d^2$, ahol az S súlyponton átmenő tengely és a P ponton átmenő másik tengely távolsága.

A tömegközéppont $x_s = 2$ m, az ezen átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték

$\Theta_s = 10$ kgm^2; az össztömeg $\Sigma m_i = 4+3+2+1 = 10$ kg;

az y_1 tengely távolsága a súlyponton átmenő y_2 tengelytől $d_1 = |x_1 - x_s| = |0 - 2| = 2$ m $\rightarrow$

$\Theta_{y1} = \Theta_s + (\Sigma m_i)d_1^2 = 10 + 10\cdot2^2 = 10 + 40 = 50$ kgm^2.

az y_3 tengely távolsága a súlyponton átmenő y_2 tengelytől $d_3 = |x_3 - x_s| = |3 - 2| = 1$ m $\rightarrow$

$\Theta_{y3} = \Theta_s + (\Sigma m_i)d_3^2 = 10 + 10\cdot1^2 = 10 + 10 = 20$ kgm^2.

Az y_1 ill. az y_3 tengelyre vonatkoztatott Θ_{y1} és Θ_{y3} tehetetlenségi nyomatékok között viszont nem alkalmazható a Steiner-tétel, mert közülük egyik sem a súlyponton átmenő tengely!

$\Theta_{y3} = 20$ kgm^2, d = 3 m: $\Theta_{y1} \neq \Theta_{y3} + 10\cdot3^2$

Ha pl. Θ_{y3} ismeretében a Steiner-tétel alkalmazásával szeretnénk kiszámolni Θ_{y1} értékét, akkor először x_s meghatározása után Θ_s értékét kell kiszámolni:

$\Theta_{y3} = \Theta_s + (\Sigma m_i)d_3^2 \rightarrow \Theta_s = \Theta_{y3} - (\Sigma m_i)d_3^2 = 20 - 10\cdot1^2 = 20 - 10 = 10$ kgm^2,

majd második lépésben már alkalmazható a Steiner-tétel:

$\Theta_{y1} = \Theta_s + (\Sigma m_i)d_1^2 = 10 + 10\cdot2^2 = 10 + 40 = 50$ kgm^2.

Ennél a feladatnál ez utóbbi számolás nem rövidebb, mint a $\Theta = \Sigma(m_i \ell_i^2)$ képlet alkalmazása, de hasznos lehet így számolni olyan bonyolultabb testeknél, amiknek nehéz lenne kiszámolni a tehetetlenségi nyomatékát, viszont ismert a tehetetlenségi nyomaték egy olyan tengelyre, ami nem a súlypontján megy át.

b) Alkalmazzuk az impulzusmomentum-tételt: $M = \dot{L}$.

Merev test rögzített tengely körüli forgásánál az impulzusmomentum

$L = \Theta\omega$ (Θ az adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, ω a szögsebesség)

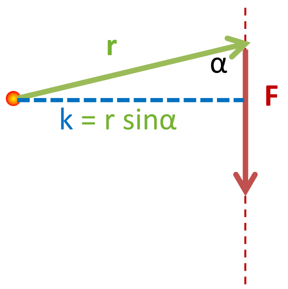
$\rightarrow$ $\dot{L} = \Theta\beta$ (β a szöggyorsulás), tehát

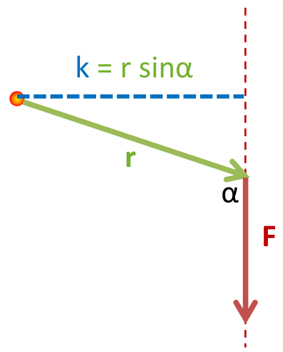
$M = \Theta\beta$ (M az eredő forgatónyomaték).

A forgatónyomaték általános esetben $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ $\rightarrow$ a nagysága

$M = k F$.

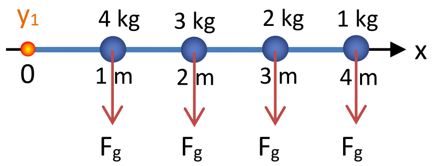
k az erőkar, ami az erőn átmenő egyenes és a forgástengely távolsága:





Az egyes testekre az $\mathbf{F_g}$ gravitációs erő fejt ki forgatónyomatékot, $\mathbf{F_g}$ függőleges.

$\mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{gi}) \quad \rightarrow \quad M = \Sigma(k_i m_i g) = \Sigma(k_i m_i)\, g$



Kiindulási állapotban az x tengely vízszintes $\rightarrow$ $\mathbf{F_g} \perp \mathbf{r}$ $\rightarrow$ $k_i = x_i$ $\rightarrow$ $M_0 = \Sigma(x_i m_i)\, g$.
Behelyettesítve

$M_0 = \Sigma(x_i m_i)\, g = (1\cdot4+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot1)\cdot10 = 200$ Nm.

Vagy felírhatjuk a forgatónyomatékot az össztömeggel és a tömegközéppont koordinátájával is: mivel

$x_s = \Sigma(x_i m_i)/\Sigma(m_i)$, ezért $\Sigma(x_i m_i) = \Sigma(m_i)\, x_s \quad \rightarrow \quad M_0 = \Sigma(m_i)\, x_s\, g = 10\cdot2\cdot10 = 200$ Nm.

A tehetetlenségi nyomaték a megfelelő (y_1) forgástengelyre: $\Theta = \Theta_{y1} = 50$ kgm^2. $M_0 = \Theta\beta_0$

$\rightarrow$ vízszintes helyzetben $\beta_0 = M_0 / \Theta_{y1} = 200/50 = 4$ s^{-2} szöggyorsulással indul a keret.

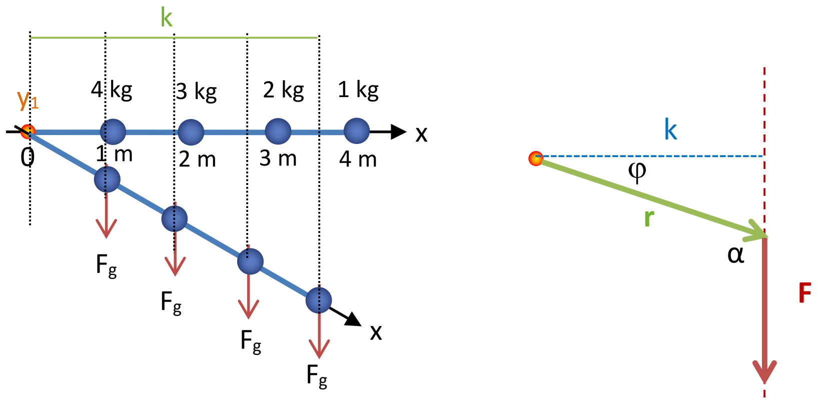
c) Az egyes pontok gyorsulása $a_i = R_i\beta$, ahol R_i a körpálya sugara, a test távolsága a forgástengelytől.

Itt most $R_i = x_i$.

A 4 kg-os testre $a_4 = x_4\, \beta = 1\cdot4 = 4$ m/s^2,

az 1 kg-os testre $a_1 = x_1\, \beta = 4\cdot4 = 16$ m/s^2 (ami nagyobb g-nél!)

d) Ha a keret a vízszinteshez képest 30°-ot elfordult:



Az erőkar $k_i = x_i \cos\varphi$;

a forgatónyomaték $M_\varphi = \Sigma(k_i F_{gi}) = \Sigma(x_i \cos\varphi\, m_i g) = \Sigma(x_i m_i g) \cos\varphi = M_0 \cos\varphi$

$\rightarrow$ $M_{30°} = M_0\cos30° = 200\cdot\cos30° = 173{,}2$ Nm.

e) Két módon oldhatjuk meg a feladatot.

A szürkével jelölt részt nem kell tudni a zh-ra.

Az impulzusmomentum-tétel szerint

$\Theta\beta = M \quad \rightarrow \quad \beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = M_\varphi / \Theta = M_0/\Theta \cdot \cos\varphi$.

A differenciálegyenlet megoldása a $\varphi(t)$ függvény, amiből kifejezhető $\omega(\varphi)$,

de az alábbi átalakítással közvetlenül a szögsebességet kaphatjuk meg a szög függvényében:

$\beta = \dot{\omega} = d\omega/dt = d\omega/d\varphi \cdot d\varphi/dt = \omega \cdot d\omega/d\varphi$, tehát

$\omega \cdot d\omega/d\varphi = M_0/\Theta \cos\varphi \quad \rightarrow$ szeparálva $\quad \omega\, d\omega = M_0/\Theta \cos\varphi\, d\varphi$

$\rightarrow$ integrálva, és felhasználva, hogy $\varphi = 0$-nál $\omega = 0$: $\quad \tfrac{1}{2}\omega^2 = M_0/\Theta \sin\varphi$.

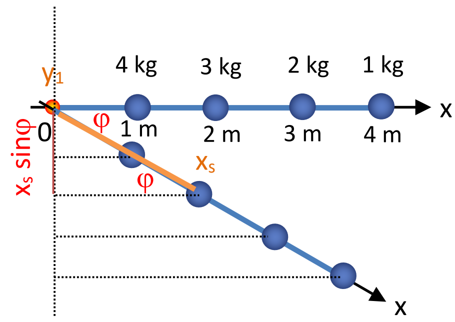
Behelyettesítve: $\omega^2 = 2M_0/\Theta_{y1} \sin\varphi = 2\cdot200/50\cdot\sin\varphi = 8 \sin\varphi \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{8 \sin\varphi}$ s^{-1}.

Ha a keret a tengely körül súrlódásmentesen fordul el, akkor a feladat megoldható energia-megmaradással:

$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin,forg} =$ konst.

$E_{pot} = mgz$, a forgási kinetikus energia $E_{kin,forg} = ½\Theta\omega^2$, tehát

$E_{mech} = mgz + ½\Theta\omega^2 =$ konst.



A helyzeti energiát számolhatjuk az egyes tömegpontok helyzeti energiájának összegeként, vagy gyorsabb, ha az össztömeggel és a tömegközéppont koordinátájával számolunk. Vegyük pl. az induló helyzet vízszintes síkjának magasságát a zérus pontnak ($z_{s,0} = 0$), így φ szögelfordulás esetén $z_{s,\varphi} = -x_s \sin\varphi$.

A kiinduló helyzetben $E_{pot} = 0$ és $\omega = 0 \rightarrow E_{kin,forg} = 0$;

φ szögelfordulás esetén $E_{pot} = \Sigma(m_i)g\,(-x_s\sin\varphi)$ és $E_{kin,forg} = ½\Theta_{y1}\omega^2$, tehát

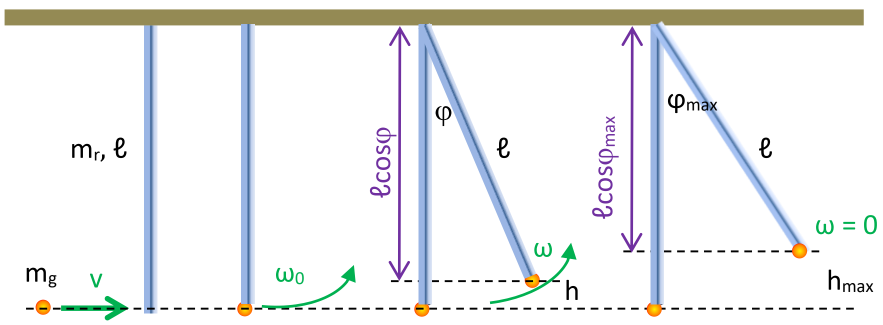
$$0 + 0 = -\Sigma(m_i)g\, x_s\sin\varphi + ½\Theta_{y1}\omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{2\frac{\Sigma(m_i)g\, x_s}{\Theta_{y1}}\sin\varphi}\,.$$

Behelyettesítve: $\omega = \sqrt{2\frac{\Sigma(m_i)gx_s}{\Theta_{y1}}\sin\varphi} = \sqrt{2\cdot10\cdot10\cdot2/50\cdot\sin\varphi} = \sqrt{8\sin\varphi}\ s^{-1}$.

9/2. Függőlegesen fellógatott m_r tömegű, ℓ hosszúságú homogén rúd alsó pontjához vízszintes v sebességgel érkezve hozzátapad egy m_g tömegű golyó.

a) Mekkora szögsebességgel indul a rúd a hozzátapadt golyóval?

b) Maximum mekkora szöggel lendül ki?



Megoldás

a) Ütközés után a rúd a hozzátapadt golyóval a rúd rögzítési pontja – mint rögzített tengely – körül forgó mozgásba kezd. Az ütközésnél az impulzus nem marad meg, mert az ütközés pillanatában a merev rúd közvetítésével a rögzítési pontban fellép egy F_r erő (ellentétben a matematikai ingával, ahol a kötél nem közvetít erőt a rögzítési ponthoz), vagyis a rúd + golyó rendszerre ható külső erők eredője nem zérus. Viszont a külső erők forgatónyomatéka a rögzítési pontra az ütközés pillanatában zérus, így a rúd + golyó rendszernek a forgástengelyre vonatkoztatott impulzusmomentuma az ütközés előtt ill. után megegyezik.

A rendszer impulzusmomentumának csak a nagyságát felírva

– ütközés előtt a golyó impulzusa $p = m_g v$, ennek momentuma a forgástengelyre $L_g = m_g v\,\ell$ (a rúd impulzusmomentuma pedig zérus),
– ütközés után közvetlenül a rúd + golyó rendszer impulzusmomentuma $L = \Theta\omega_0$.

Θ a rúd + golyó rendszer tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre, azaz a felfüggesztési pontra nézve:

a rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontjára: $\Theta_{rúd,vég} = ⅓m_r\ell^2$ (ld. a táblázatot a bevezetőben),

a golyó tehetetlenségi nyomatéka az ℓ távolságra levő pontra: $\Theta_{golyó} = m_g\ell^2$, tehát

$\Theta = \Theta_{rúd,vég} + \Theta_{golyó} = ⅓m_r\ell^2 + m_g\ell^2$.

Az impulzusmomentum-megmaradás:

$m_g v \ell = (\tfrac{1}{3}m_r\ell^2 + m_g\ell^2)\,\omega_0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = m_g/(\tfrac{1}{3}m_r+m_g)\, v/\ell$ a szögsebesség induláskor.

A golyó a rúd végére tapadva $\omega_0\ell = m_g/(\tfrac{1}{3}m_r+m_g)v$ sebességgel indul, vagyis $m_g/(\tfrac{1}{3}m_r+m_g)$-ed részére lassul.

b) Mivel a rúd súrlódásmentesen fordul, energia-megmaradással számíthatjuk, milyen magasra lendül ki:

$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin,forg} = \Sigma m\, g\, z + \tfrac{1}{2}\Theta\omega^2 = \text{konst.}$

Közvetlenül az ütközés után $E_{pot,0} = 0$ és $E_{kin,forg,0} = \tfrac{1}{2}\Theta\omega_0^2$.

$\Theta = \tfrac{1}{3}m_r\ell^2+m_g\ell^2$ és $\omega_0 = m_g/(\tfrac{1}{3}m_r+m_g)\, v/\ell$ behelyettesítésével

$\tfrac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{3}m_r\ell^2+m_g\ell^2)\cdot[m_g/(\tfrac{1}{3}m_r+m_g)\, v/\ell]^2 = \ldots = \tfrac{1}{2}m_g v^2 \cdot m_g/(\tfrac{1}{3}m_r+m_g)$

Látható, hogy az ütközés utáni $\tfrac{1}{2}\Theta\omega_0^2$ forgási kinetikus energia kisebb, mint az ütközés előtti $\tfrac{1}{2}mv^2$ kinetikus energia, mert az ütközés rugalmatlan.

Tehát

$E_{mech,0} = E_{pot,0} + E_{kin,forg,0} = \tfrac{1}{2}m_g v^2 \cdot m_g/(\tfrac{1}{3}m_r+m_g)$.

A maximális kilendülésnél az m_g tömeg emelkedése $h_{max} = \ell(1-\cos\varphi_{max})$ [ld. az ábrát!]; a rúd súlypontja a rúd felénél van, így a rúd súlypontjának emelkedése $\tfrac{1}{2}h_{max} = \tfrac{1}{2}\ell(1-\cos\varphi_{max})$, tehát

$E_{pot,\varphi\_max} = m_g g\, \ell(1-\cos\varphi) + m_r g\, \tfrac{1}{2}\ell(1-\cos\varphi) = (m_g+\tfrac{1}{2}m_r)g\, \ell(1-\cos\varphi)$,

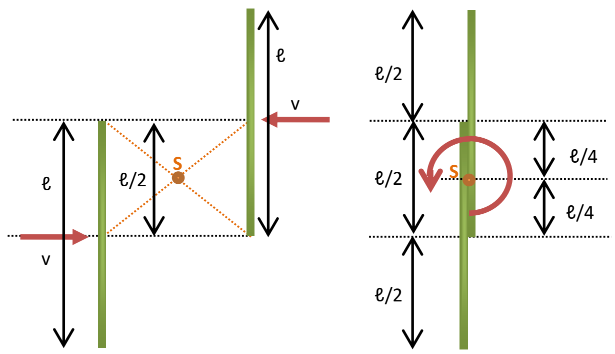
és itt $E_{kin,forg,\varphi\_max} = 0$.

Az energia-megmaradás tehát

$\tfrac{1}{2}m_g v^2 \cdot m_g/(\tfrac{1}{3}m_r+m_g) = (m_g+\tfrac{1}{2}m_r)g\, \ell(1-\cos\varphi)$

$$\rightarrow \quad \cos\alpha = 1 - \frac{m_g^{\,2}}{2\left(\frac{m_r}{3}+m_g\right)\cdot\left(\frac{m_r}{2}+m_g\right)}\cdot\frac{v^2}{g\ell}.$$

9/3. Két homogén, m tömegű, ℓ hosszú pálca v sebességgel közeledik egymáshoz vízszintes súrlódásmentes asztalon. A pálcák merőlegesek a sebességükre, de az ábra szerint el vannak tolódva egymáshoz képest. Ütközés után a két pálca összeragad. Hogy fognak mozogni?



Megoldás

Az ütközés közben a pálcákra ható külső erők (m**g** és **F**$_{ny}$) eredője zérus, így érvényes az impulzus- és az impulzusmomentum-megmaradás is.

Az ütközés előtt a két pálca sebességének nagysága v, de az irányuk ellentétes, így az összes impulzusuk

$p_e = mv + m(-v) = 0$;

az összeragadt két pálca tömegközéppontjának a sebessége az ütközés után u, az impulzusa

$p_u = (m+m)u$;

az impulzus-megmaradást felírva

$mv + m(-v) = 0 = (m+m)u \quad \rightarrow \quad u = 0.$

Mivel a két test tömege és sebessége egyenlő, az össz-impulzus zérus, ütközés után az összeragadt pálcák haladó mozgást nem végeznek, vagyis a tömegközéppont helyben marad.

A két pálca összeragadva az S tömegközéppont körül fog forogni állandó szögsebességgel.

A szögsebességet az impulzusmomentum-megmaradásból tudjuk kiszámolni:

Az ütközés előtt haladó mozgást végző pálcák impulzusának momentuma a tömegközéppontra, azaz a majdani forgástengelyre

$\mathbf{L}_e = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2$

A tömegek és a sebességek nagysága megegyezik, és a szimmetria miatt a pálcák tömegközéppontjának az S tömegközépponthoz (majdani forgástengelyhez) képest megadott helyvektorának nagysága is, tehát a két tag nagysága egyenlő, de kérdés, hogy a vektoriális szorzatok előjele megegyezik vagy ellentétes. Látható, hogy mindkét pálca ugyanolyan irányú forgómozgásba kezdene egymagában is az S pont körül, tehát a majdani forgástengelyre vonatkoztatva mindkét tömeg esetében ugyanolyan előjelű a vektoriális szorzat. (Ezt abból is beláthatjuk, hogy $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1$.)

Az impulzus „karja" ahhoz hasonlóan számolható, ahogyan az erőkar a forgatónyomatéknál: a tömegközéppont **v** sebességvektorán átmenő egyenes és a forgástengely távolságát kell meghatároznunk, ami jelen esetben $\ell/4$, tehát $|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = v\,\ell/4$; így

$L_e = 2\left(mv\frac{\ell}{4}\right).$

Az ütközés után az összetapadt, forgó mozgást végző pálcák impulzusmomentuma:

$L_u = \Theta\,\omega$.

Fel kell írnunk az összetapadt forgó pálcák Θ tehetetlenségi nyomatékát:

A forgástengely mindkét pálcát ¼ – ¾ arányban osztja. Egy pálca tehetetlenségi nyomatéka erre a pontra Steiner-tétellel számolható: a súlyponton, vagyis a rúd felénél átmenő tengelyre $\Theta_s = \frac{1}{12}m\ell^2$ (ld. a bevezetőben), ehhez képest $d = \ell/4$ távolságra van eltolódva a forgástengely, tehát

$\Theta_P = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}m\ell^2$; a két pálcára $\Theta = \frac{7}{24}m\ell^2$.

VAGY integrálással: $\Theta = 2\int_{-\ell/4}^{3\ell/4} x^2\,\rho\,A\,dx = 2\int_{-\ell/4}^{3\ell/4} x^2\,\frac{m}{A\ell}\,A\,dx = 2\frac{m}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/4}^{3\ell/4} = \frac{7}{24}m\ell^2.$

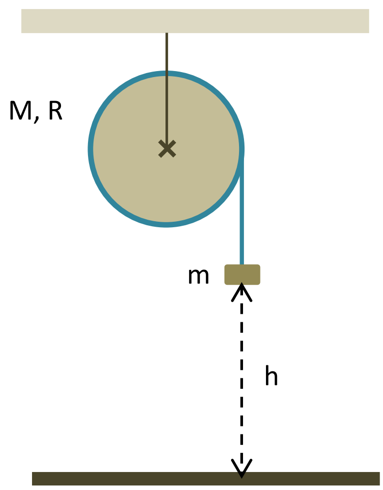
Az ütközés utáni impulzusmomentum tehát

$L_u = \frac{7}{24}m\ell^2\,\omega$.

Az impulzusmomentum-megmaradás:

$2\left(mv\frac{\ell}{4}\right) = \frac{7}{24}m\ell^2\,\omega \quad\rightarrow\quad \omega = \frac{12}{7}\frac{v}{\ell}$ lesz az összeragadt pálcák szögsebessége.

9/4. M tömegű, R sugarú csigára feltekert fonálon m tömegű teher függ a földtől h magasságban. Elengedve milyen végsebességgel érkezik le? A kötél nem csúszik meg a csigán, a csiga súrlódása elhanyagolható.



Megoldás

A súrlódás elhanyagolható, ezért a csiga + teher rendszerre érvényes az energia-megmaradás. A csiga + teher rendszer mechanikai energiája tartalmazza a teher helyzeti és kinetikus energiáját, és a csiga forgási kinetikus energiáját:

$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} + E_{kin,forg} = mgz + ½mv^2 + ½\Theta\omega^2 = \text{konst.}$

Kezdetben a kinetikus energia zérus, és a potenciális energia zérus pontját a földre felvéve $E_{pot,0} = mgh$.

A földre érkezve $E_{pot,1} = 0$; az m tömegnek v sebessége van: $E_{kin,1} = ½mv^2$, és a csigának ω szögsebessége van:

$E_{kin,forg,1} = ½\Theta\omega^2$, tehát az energia-megmaradás:

$mgh + 0 + 0 = 0 + ½mv^2 + ½\Theta\omega^2$.

Ha a kötél nem csúszik meg a csigán, akkor a csiga szögsebessége és az m tömeg, azaz a kötél sebessége között érvényes, hogy $\omega = v/R$.

A csiga egy korong (henger), aminek a tehetetlenségi nyomatéka a közepén átmenő tengelyre $\Theta = ½MR^2$ (ld. a bevezetőt, ill. a 9/12. feladatot).
Ezeket behelyettesítve a forgási kinetikus energiába

$$E_{kin,forg,1} = ½\Theta\omega^2 = ½\,(½\,MR^2)\,(v/R)^2 = \ldots = ½\,(M/2)\,v^2\ .$$

Tehát $\quad mgh = ½\,mv^2 + ½\,(M/2)\,v^2 = ½\,(m + M/2)\,v^2 \quad\rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{m}{m+M/2}\,2gh}\ .$

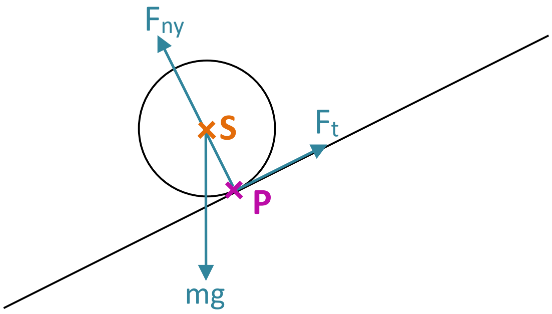
9/5.

a) Mekkora gyorsulással gördül le egy α hajlásszögű és s hosszúságú lejtőn egy R sugarú
[A] henger;
[B] golyó;
[C] hengerpalást?

b) Mekkora lesz a sebességük a lejtő alján, ha a lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indulnak?

c) Miért térnek el ezek a sebességek a súrlódásmentesen lecsúszó test sebességétől?

Megoldás



a) A lejtőn legördülő testre hat az **mg** gravitációs erő, a lejtő $\mathbf{F_{ny}}$ nyomóereje, és egy $\mathbf{F_t}$ tapadási súrlódási erő a lejtőn felfelé a test és a lejtő érintkezésénél.
Felírhatjuk
– egyrészt a tömegközéppont-tételt:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_t}$$

→ a lejtő síkjával párhuzamosan $\quad ma = mg\sin\alpha - F_t \quad (1);$
– másrészt az impulzusmomentum-tételt:

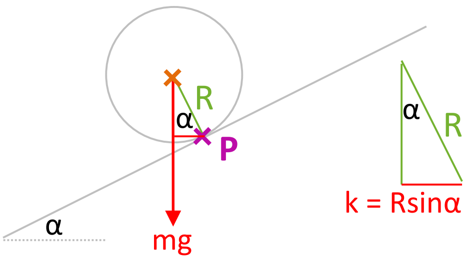
$$M = \Theta\beta.$$

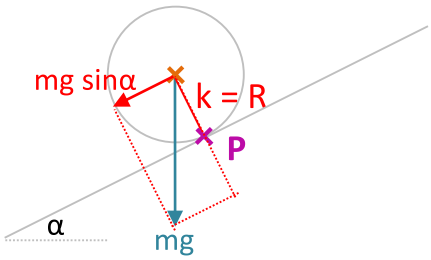
Utóbbit felírhatjuk
vagy az S tömegközépponton átmenő tengelyre; ekkor mivel m**g** és $\mathbf{F_{ny}}$ átmennek a tömegközépponton, arra a pontra forgatónyomatéka csak $\mathbf{F_t}$-nek van:

$\Theta_S\,\beta = F_t\,R \qquad (2A),\quad$ itt Θ_S a test tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka;

vagy a test és a lejtő P érintkezési pontján átmenő tengelyre; ekkor mivel $\mathbf{F_{ny}}$ és $\mathbf{F_t}$ átmennek azon a ponton, forgatónyomatéka csak m**g**-nek van, mégpedig $M = mg\,R\sin\alpha$, tehát

$\Theta_P\,\beta = mg\,R\sin\alpha \quad (2B),\quad$ itt Θ_P a Steiner-tétel szerint $\Theta_P = \Theta_S + mR^2$.





Ha a test tisztán gördül (nem csúszik meg), akkor $\quad a = R\beta \quad (3).$

A legördülő test tömegközéppontjának gyorsulását kifejezhetjük a (2B)+(3), vagy az (1)+(2A)+(3) egyenletekből:

(3): $\quad a = R\beta \rightarrow \beta = a/R;$

(2B): $\quad \Theta_P\,\beta = (\Theta_S + mR^2)\,a/R = mg\,R\sin\alpha \quad\rightarrow\quad a = \frac{mR^2\,g\sin\alpha}{\Theta_S + m\,R^2} = \frac{g\sin\alpha}{\frac{\Theta_S}{m\,R^2}+1};$

vagy

(2A): $\quad \Theta_S\beta = F_t\,R \;\rightarrow\; F_t = \Theta_S\,a/R^2;$

(1): $\quad ma = mg\sin\alpha - F_t = mg\sin\alpha - \Theta_S\,a/R^2 \quad\rightarrow\quad a = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{\Theta_S}{m\,R^2}}\ .$

A tömegközépponton átmenő tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok (ld. a bevezetőben):

[A] hengerre $\Theta_{henger} = 1/2\ mR^2 \rightarrow a_{henger} = 2/3\ g\ \sin\alpha$;

[B] gömbre $\Theta_{gömb} = 2/5\ mR^2 \rightarrow a_{gömb} = 5/7\ g\ \sin\alpha$;

[C] hengerpalástra $\Theta_{hengerpalást} = mR^2 \rightarrow a_{hengerpalást} = 1/2\ g\ \sin\alpha$.

(Minél nagyobb a test tehetetlenségi nyomatéka, annál kisebb lesz a gyorsulása.)

b) A lejtő hossza s: $s = ½\ at^2 \rightarrow t = \sqrt{2s/a}$ és $v = at = a\sqrt{2s/a} = \sqrt{2as}$, vagyis

[A] hengerre $v_{henger} = \sqrt{\frac{4}{3} g\ s\ \sin\alpha}$,

[B] gömbre $v_{gömb} = \sqrt{\frac{10}{7} g\ s\ \sin\alpha}$,

[C] hengerpalástra $v_{hengerpalást} = \sqrt{g\ s\ \sin\alpha}$;

illetve a lejtő h magasságával kifejezve ($h = s\ \sin\alpha$)

[A] hengerre $v_{henger} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$,

[B] gömbre $v_{gömb} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$,

[C] hengerpalástra $v_{hengerpalást} = \sqrt{gh}$.

c) A súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége a lejtő alján $v = \sqrt{2g\ s\ \sin\alpha} = \sqrt{2gh}$, a gördülő testek végsebessége ennél kisebb lesz. Az energia-megmaradás viszont teljesül, mert a gördülő testeknek forgási kinetikus energiájuk is van: $E_{kin,forg} = ½\Theta\omega^2$.

Ekkor tehát $E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} + E_{kin,forg} =$ konst., amit felírhatunk úgy is, hogy $\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} + \Delta E_{kin,forg} = 0$:

$-mg\ s\ \sin\alpha + ½mv^2 + ½\Theta\omega^2 = 0$.

Ellenőrizhetjük pl. a henger esetében:

$\Delta E_{pot} = -mg\ s\ \sin\alpha$;

$\Delta E_{kin} = ½\ mv^2 = ½\ m\ (\frac{4}{3} g\ s\ \sin\alpha) = \frac{2}{3} mg\ s\ \sin\alpha$;

$\Delta E_{kin,forg} = ½\Theta\omega^2$; mivel a testek tisztán gördülnek, ezért $\omega = v/R \rightarrow$

$\Delta E_{kin,forg} = ½\Theta(v/R)^2 = ½\ (\frac{1}{2} mR^2) \frac{\frac{4}{3} g\ s\ \sin\alpha}{R^2} = \frac{1}{3} mg\ s\ \sin\alpha$.

Gyakorló feladatok a zh-ra

9/6. Elhanyagolható tömegű 1 m hosszú rúd két végén 5–5 kg tömegű golyók vannak felerősítve.

a) Számítsuk ki a rúd felezési pontján átmenő, a rúdra merőleges tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot!

b) Mennyivel változik a tehetetlenségi nyomaték, ha a tengelyt a rúd mentén önmagával párhuzamosan 10 cm-rel eltoljuk? Fejezzük ki az új tehetetlenségi nyomatékot az eredeti nyomaték, a tömeg és az eltolás segítségével!

Megoldás

a) A rúd tömege elhanyagolható, tehát csak a két golyó tehetetlenségi nyomatékát kell számolni:

$\Theta_s = \Sigma(m_i l_i^2) = 2\cdot(5\cdot0{,}5^2) = 2{,}5\ kgm^2$.

b) Az új tengelyre $\Theta_p = 5\cdot0{,}4^2 + 5\cdot0{,}6^2 = 2{,}6\ kgm^2$, azaz a tehetetlenségi nyomaték $0{,}1\ kgm^2$-tel nő.

A Steiner-tétel szerint az S súlyponton átmenő tengelyt párhuzamosan a P pontba tolva az új tehetetlenségi nyomaték $\Theta_P = \Theta_s + (\Sigma m_i)d^2$, ahol Θ_s az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, d pedig a két tengely távolsága.

Az **a)** részben kiszámolt tehetetlenségi nyomaték a rúd felezési pontján, azaz a súlyponton megy át, így a Steiner-tételt alkalmazva: $\Theta_P = \Theta_s + (\Sigma m_i)d^2 = 2{,}5 + 10\cdot0{,}1^2 = 2{,}6\ kgm^2$, azaz $(\Sigma m_i)d^2 = 0{,}1\ kgm^2$-tel nőtt.

9/7. Egyik végén (súrlódásmentes) csuklóval felfogott homogén rudat vízszintes helyzetből (kezdősebesség nélkül) elengedünk.
Adjuk meg
a) a rúd szöggyorsulását,
b) a rúd tömegközéppontjának gyorsulását;
c) a rúd rögzítetlen végpontjának gyorsulását a kiindulási pillanatra!
d) Adjuk meg a rúd ω szögsebességét a vízszintessel bezárt φ szög függvényében!

Megoldás
a) Írjuk fel az impulzusmomentum-tételt: $M = \dot{L}$, ahol
a forgatónyomaték $M = F k$;
$F = mg$;
a rúd tömegközéppontjában ható mg erő erőkarja $k = \ell/2 \cos\varphi$, ha a φ szöget a vízszintestől mérjük;
az impulzusmomentum $L = \Theta\omega$, a deriváltja $\dot{L} = \Theta\beta$,
a rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontján átmenő tengelyre $\Theta = \frac{1}{3} m\ell^2$;
$\rightarrow$ $F k = \Theta\beta$: $mg\,(\ell/2 \cos\varphi) = (1/3\, m\ell^2)\,\beta$,
ebből a rúd szöggyorsulása
$\beta = 3/2\, g \cos\varphi / \ell$. (*)

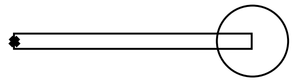
b) A rúd tömegközéppontja a forgástengelytől $\ell/2$ távolságra van, tehát a gyorsulása
$a_S = \ell/2\, \beta = 3/4\, g \cos\varphi$.

c) A rúd rögzítetlen végpontja a forgástengelytől ℓ távolságra van, tehát a gyorsulása
$a = \ell\, \beta = 3/2\, g \cos\varphi$
Ez induláskor $a = 3/2\, g > g$!

d)
A (*) differenciálegyenlet megadja a β szöggyorsulást az időfüggő φ szög függvényében:
$\beta = \ddot{\varphi} = 3/2\, g \cos\varphi / \ell$, ennek megoldása a $\varphi(t)$ függvény lenne, de
$\beta = \dot{\omega} = d\omega/dt = d\omega/d\varphi \cdot d\varphi/dt = \omega \cdot d\omega/d\varphi$ átalakítással integrálás után közvetlenül az $\omega(\varphi)$ függvényt kapjuk meg:
$\omega \cdot d\omega/d\varphi = 3/2\, g \cos\varphi / \ell$ $\rightarrow$ szeparálva $\omega\, d\omega = 3/2\, g \cos\varphi / \ell\; d\varphi$.
Ezt integrálva, és felhasználva, hogy $\varphi = 0$-nál $\omega = 0$: $\omega = \sqrt{3\, g \sin\varphi / \ell}$.
VAGY:
A rúd szögsebességét a vízszintessel bezárt φ szöge függvényében megkaphatjuk energia-megmaradásból is (mivel a súrlódást, közegellenállást elhanyagolhatjuk). A rúd helyzeti energiáját a tömegközéppontjának helyzetével adjuk meg. Legyen a helyzeti energia zérus a kezdő állapotban:
$0 = -mg\,(\ell/2 \sin\varphi) + ½\, \Theta\, \omega^2 = -mg\,(\ell/2 \sin\varphi) + ½\, (1/3 m\ell^2)\, \omega^2$
$\rightarrow$ $\omega = \sqrt{3\, g \sin\varphi / \ell}$.

A megoldásban felhasznált tehetetlenségi nyomaték kiszámítása:
$\Theta = \int \ell^2\, dm = \int \ell^2\, \rho\, dV$
Az x tengely mentén O és ℓ között elhelyezkedő vékony, A keresztmetszetű rúdra az x tengelyre merőlegesen bontjuk $dV = A\, dx$ térfogatelemekre,
a sűrűsége $\rho = m/(A\ell)$,
és mivel a forgástengely O-n megy át, ezért $\ell = x$, így
$\Theta = \int_0^\ell x^2\, \rho\, A\, dx = \int_0^\ell x^2\, \frac{m}{A\ell}\, A\, dx = \frac{m}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\ell = \frac{1}{3} m\ell^2$.

9/8. A 0,8 m hosszú, 0,6 kg tömegű rúd végéhez egy 10 cm sugarú, 0,2 kg tömegű korongot erősítettünk az ábrán látható módon. A rúd+korong a másik végén átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat.



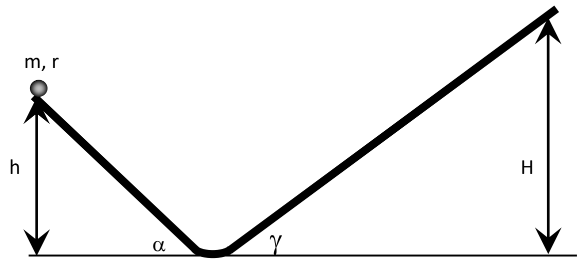
a) Hol van a rúd+korong tömegközéppontja?
b) Mekkora a rúd+korong tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva?
A tehetetlenségi nyomatékok: rúd felezőpontjára $\Theta_{rúd} = 1/12\ m\ell^2$, a korong középpontjára $\Theta_{korong} = ½\ Mr^2$.
c) Mekkora szöggyorsulással indul a rúd+korong, ha vízszintes helyzetből elengedjük?
d) Mekkora lesz a rúd+korong szögsebessége a függőleges helyzeten való áthaladáskor?

Megoldás
a) A forgástengelytől mérve $x_s = (½·0,8·0,6 + 0,8·0,2) / (0,6+0,2) = 0,5$ m.
b) $= (1/12·0,6·0,8^2 + 0,6·0,4^2) + (1/2·0,2·0,1^2 + 0,2·0,8^2) = 0,257$ kgm^2.
c) $M = \Sigma(mgk) = 0,6·10·0,4 + 0,2·10·0,8 = 4\ \text{Nm} = \Theta\beta \quad\to\quad \beta = M / \Theta = 15,56\ s^{-2}$.
d) Energia-megmaradással
$(m+M)g\ x_s + 0 = 0 + ½\Theta\omega^2 \quad\to\quad \omega = 5,58\ s^{-1}$.

9/9. M = 5 kg tömegű, ℓ = 2,4 m hosszúságú vízszintes helyzetű vékony homogén rúd a végétől $\ell/6$ távolságra átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A rúd tengelytől távolabbi végpontjához alulról hozzádobunk egy m = 1 kg tömegű golyót függőleges v = 15 m/s sebességgel. A golyó hozzáragad a rúdhoz; az ütközés tökéletesen rugalmatlannak tekinthető.
a) Adjuk meg az összeragadt golyó + rúd tömegközéppontjának távolságát a forgástengelytől!
b) Számoljuk ki az összeragadt golyó + rúd tehetetlenségi nyomatékát a megadott forgástengelyre vonatkoztatva! A rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő, rúdra merőleges tengelyre vonatkoztatva $\Theta = 1/12\ M\ell^2$.
c) Mekkora a golyó + rúd impulzusmomentuma az ütközés után?
d) Átfordul-e a rúd a hozzáragadt golyóval a függőleges helyzeten?

Megoldás
a) A homogén rúd tömegközéppontja a felezőpontjában van, ami a forgástengelytől $\ell/2 - \ell/6 = \ell/3$ távolságra van, a golyó pedig $5\ell/6$ távolságban van a forgástengelytől, így a tömegközéppont
$d_{tk} = [M(\ell/3)+m(5\ell/6)] / (M+m) = (5·0,8+1·2) / (5+1) = 1$ m távolságra van a forgástengelytől.
b) A forgástengely $\ell/3$-mal van eltolva a tömegközépponttól, ezért a rúd tehetetlenségi nyomatéka erre a tengelyre (a Steiner-tétellel számolva) $\Theta_{rúd} = \Theta_s + M(\ell/3)^2 = (7/36)\ M\ell^2 = 5,6$ kgm^2,
a rúd végpontjához ragadt golyóé pedig $\Theta_{golyó} = m(5\ell/6)^2 = 4$ kgm^2,
tehát $\Theta = \Theta_{rúd} + \Theta_{golyó} = 9,6$ kgm^2.
c) Az ütközés pillanatában a külső erők forgatónyomatéka zérus, felírhatjuk az impulzusmomentum-megmaradást. Ütközés előtt a rúd nem mozog, a rúdhoz közeledő golyó impulzusának a momentuma az adott tengelyre vonatkoztatva pedig
$L = (5\ell/6)\ mv = 30$ kgm^2/s , ennyi lesz tehát az impulzusmomentum az ütközés után is.
d) Az impulzusmomentumból kiszámolhatjuk a rúd+golyó kezdeti szögsebességét:
$L = \Theta\omega \quad\to\quad \omega = L / \Theta = 30 / 9,6 = 3,125\ s^{-1}$.
Számoljuk ki azt, mekkora minimális kezdeti szögsebesség kell ahhoz, hogy a rúd függőleges helyzetbe forduljon. Mivel a rúd súrlódásmentesen foroghat a tengely körül, felírhatjuk az energia-megmaradást:
$½\ \Theta\omega_0^2 = E_{pot}$, ahol E_{pot} a rúd+golyó helyzeti energiája a függőleges helyzetben, ami a tömegközéppont emelkedéséből számolható, tehát
$½\ \Theta\omega_0^2 = (M+m)g\ d_{tk}$. Ebből $\omega_0 = \sqrt{12,5} \approx 3,53\ s^{-1}$, vagyis a rúd nem jut el a függőleges helyzetbe.

9/10. Az ábrán látható gördeszka gyakorlópálya egy α = 44° hajlásszögű, h = 7 m magas és egy H = 10 m magas, γ hajlásszögű ellenlejtőből áll, amelyek alul ívesen csatlakoznak. A pálya tetejétől elindítunk (ahol a gömb tömegközéppontja h = 7 m-rel van magasabban, mint a gödör legalsó pontja) kezdősebesség nélkül egy m = 1 kg tömegű, r = 10 cm sugarú gömböt, amely csúszásmentesen gördül a lejtőn.



A gömb tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára vonatkoztatva 2/5 mr^2.

a) Mekkora a gömb tömegközéppontjának gyorsulása az induláskor?
b) Mekkora a gömb tömegközéppontjának sebessége a pálya alsó pontján való áthaladásakor?
c) Milyen magasra jut a szemközti oldalon?
d) Adjuk meg γ függvényében a gömb szögsebességét az ellenlejtőn ½h = 3,5 m magasan!

Megoldás

a) A gömb haladó mozgására: $ma = mg \sin\alpha - F_t$,

ill. a forgására, forgástengelynek a tömegközéppontot tekintve: $\Theta\beta = F_t r$,

és mivel a gömb tisztán gördül, $a = r\beta$.

Ezekből $a = g \sin\alpha / (1+\Theta/mr^2) = 5/7\, g \sin\alpha = 4{,}96\ \text{m/s}^2$.

b) Energia-megmaradást alkalmazva

$mgh = ½\, mv^2 + ½\, \Theta\omega^2$.

Mivel a gömb tisztán gördül, $v = r\omega$ $\rightarrow$

$mgh = ½\, mv^2 + ½\, \Theta(v/r)^2 = ½\, mv^2 + ½\, 2/5mr^2\, (v/r)^2 = 7/10\, mv^2$

$\rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 10$ m/s.

c) Energia-megmaradást alkalmazva $mgh = mgH$, azaz ugyanolyan magasra.

d) A szögsebesség független lesz a β hajlásszögtől. Energia-megmaradást alkalmazva

$mgh = mgh' + ½\, mv^2 + ½\, \Theta\omega^2$

$mgh = mgh' + ½\, m(\omega r)^2 + ½\, 2/5mr^2\, \omega^2 = mgh' + 7/10\, m\, (\omega r)^2$

$\rightarrow \quad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{7}g\,(h-h')} = 50\sqrt{2} = 70{,}7\ \text{s}^{-1}$.

9/11. Egy M tömegű, ℓ hosszúságú pálca egyik végét az asztalra helyezzük, majd függőleges helyzetből elengedjük. Az asztalon lévő vége nem csúszik meg.

a) Adjuk meg a rúd szögsebességét a függőlegessel bezárt szög függvényében!
b) Mekkora sebességgel ér az asztalra a pálca vége?

Megoldás

Energia-megmaradással számolhatunk.

a) A pálca tömegközéppontja kezdetben $h_0 = \ell/2$ magasságban van, majd forgás közben $h = \ell/2 \cos\varphi$ magasságban (φ a függőlegessel bezárt szög). Ahogy csökken a pálca helyzeti energiája, úgy nő a forgási kinetikus energiája:

$mg\, \ell/2 \cos\varphi + 0 = mg\, \ell/2 \cos\varphi + ½\, \Theta\omega^2 = mg\, \ell/2 \cos\varphi + ½\cdot⅓m\ell^2\, \omega^2$

$\rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(1-\cos\varphi)}$.

b) $\varphi = 90°$, $v = \ell\omega$ (mivel a pálca nem csúszik meg az asztalon):

$v = \sqrt{3g\ell}$.

Nem zh-feladatok

9/12. Számítsuk ki egy R sugarú, homogén tömegeloszlású korongnak a középpontján a korongra merőlegesen álló tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Megoldás

$\Theta = \int \ell^2 \, dm = \int \ell^2 \rho \, dV$

Ha M a korong tömege, akkor a sűrűsége $\rho = M/V = M/(R^2\pi D)$, ahol D a korong vastagsága.

Hengerkoordináta-rendszert használva a térfogatelem $dV = D \; r \, d\varphi \; dr$;

a térfogatelem távolsága a forgástengelytől $\ell = r$,

tehát $\Theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \frac{M}{R^2\pi D} D \, r \, d\varphi \, dr = \frac{M}{R^2\pi} \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = \frac{M}{R^2\pi} 2\pi \int_0^R r^3 \, dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2 \cdot$

Vegyük észre, hogy a tehetetlenségi nyomaték a korong vastagságától független!

9/13. Határozzuk meg egy homogén egyenes körhenger tehetetlenségi nyomatékát

a) a szimmetriatengelyre vonatkoztatva;

b) egy alkotóra vonatkoztatva!

Megoldás

a) Az előző feladat eredményét felhasználhatjuk, hiszen a körhenger metszete is korong, és a korong tehetetlenségi nyomatéka nem függött a korong vastagságától, azaz a henger magasságától, vagyis $\Theta_s = ½ \, MR^2$.

b) A Steiner-tételt használhatjuk. A két tengely távolsága R, tehát $\Theta_P = \Theta_s + MR^2 = ½ \, MR^2 + MR^2 = 3/2 \, MR^2$.

9/14. Számítsuk ki egy R sugarú félgömb szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Megoldás

M tömegű félgömb sűrűsége $\rho = M/V = M/(2R^3\pi/3) = 3M/(2R^3\pi)$.

A félgömböt összerakhatjuk a forgástengelyre merőleges korongokból, melyek

sugara $r = \sqrt{R^2 - x^2}$,

térfogata $dV = r^2\pi \, dx = (R^2-x^2)\pi \, dx$,

tömege $dm = \rho \, dV = 3M/(2R^3\pi) \cdot (R^2-x^2)\pi \, dx = 3M/(2R^3) \cdot (R^2-x^2) \, dx$,

tehetetlenségi nyomatéka

$$d\Theta = ½ \, dm \, r^2 = ½ \, [3M/(2R^3) \cdot (R^2-x^2) \, dx] \cdot (R^2-x^2) = 3M/(4R^3) \cdot (R^2-x^2)^2 \, dx$$

A félgömbre tehát $\Theta = \int d\Theta = \int_0^R \frac{3M}{4R^3} \left(R^2 - x^2\right)^2 dx = \ldots = \frac{2}{5} MR^2$

9/15. Egy M tömegű, R sugarú korongot leteszünk vízszintes síkra úgy, hogy egy helyben ω_0 szögsebességgel pörög. Mit fog csinálni, ha a síkkal való érintkezési pontjánál F_s súrlódási erő lép fel?

Megoldás

Az F_s súrlódási erő a korong forgását fékezi (1), de ezzel a haladó mozgását gyorsítja (2), tehát

(1) $\Theta\beta = - F_s R$, ahol $\Theta = ½ \, MR^2$

(2) $Ma = F_s$, $F_s = \mu Mg \rightarrow a = \mu g$

Mivel a korong most nem gördül, ezért most nem igaz, hogy $a = \beta R$!

A fentiekből $½ \, MR^2 \beta = - \mu Mg R \quad \rightarrow \quad \beta = - 2\mu g/R \quad \rightarrow$

– a szögsebesség az idő függvényében $\omega(t) = \omega_0 + \beta t = \omega_0 - 2\mu g/R \; t$

– a korong sebessége az idő függvényében $v(t) = at = \mu gt$

Attól a t* pillanattól kezdve, amikor $v(t^*) = R \, \omega(t^*)$ teljesül, a korong tisztán gördülni fog:

$R \cdot (\omega_0 - 2\mu g/R \; t^*) = \mu g t^* \quad \rightarrow \quad t^* = R\omega_0 / 3\mu g$.

9/16. Egy M tömegű, R sugarú korongot meglökünk v_0 kezdősebességgel vízszintes síkon úgy, hogy forgás nélkül tisztán csúszik. Mikortól fog tisztán gördülni?

Megoldás

A korongnak a síkkal való érintkezési pontjánál fellépő F_s súrlódási erő a haladó mozgást fékezi (1) , de a korong forgását gyorsítja (2).

(1) $Ma = -F_s$, $F_s = \mu Mg$ $\rightarrow$ $a = -\mu g$

(2) $\Theta\beta = F_s R$, ahol $\Theta = ½ MR^2$ (most nem igaz, hogy $a = \beta R$!)

$\rightarrow$ a korong sebessége az idő függvényében $v(t) = v_0 - at = v_0 - \mu gt$

$\rightarrow$ a szögsebesség az idő függvényében $\omega(t) = \beta t = 2\mu g/R\ t$

Attól a t* pillanattól kezdve, amikor $v(t^*) = R\ \omega(t^*)$ teljesül, a korong tisztán gördülni fog:

$2\mu g\ t^* = v_0 - \mu g t^*$ $\rightarrow$ $t^* = v_0 / 3\mu g$.

9/17. Mennyezethez rögzített M_1 tömegű állócsigán átvetett kötél egyik oldalán a végéhez rögzítve m tömegű test lóg, a másik oldalon pedig egy M_2 tömegű csiga, amin átvezetjük a kötelet és a kötélnek az a vége az M_1 tömegű csiga középpontjához van rögzítve.

Mekkora az m tömegű test gyorsulása és mekkorák a kötélerők?