Tömegközéppont (súlypont)

Pontrendszer esetén az m_i tömegű, $\mathbf{r}_i$ helyvektorú tömegpontok tömegközéppontja a tömegekkel súlyozott átlagos helyvektor:

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum(\mathbf{r}_i m_i)}{\sum m_i}. \qquad \text{Mivel} \quad \sum m_i = M \quad \text{az össztömeg, ezzel} \quad \mathbf{r}_s = \frac{\sum(\mathbf{r}_i m_i)}{M}.$$

Kiterjedt test esetén térfogati integrállal számolható a tömegközéppont.

A testet képzeletbeli elemi dm tömegekből rakjuk össze: $M = \int dm$, $\quad \mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{\int dm}$.

A sűrűséget beírva $dm = \rho\, dV$, ezzel tehát a képletet átalakítottuk térfogati integrállá:

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r}\, \rho\, dV}{\int \rho\, dV}.$$

A ρ sűrűség lehet helyfüggő is.

Felhasználva, hogy $\int \rho\, dV = M$ az össztömeg: $\quad \mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r}\, \rho\, dV}{M}$.

Kiterjedt test tömegközéppontja számolható az egyes részeinek tömegközéppontjából is a pontrendszerre vonatkozó képletet alkalmazva.

Tömegközéppont tétel

$$m\ddot{\mathbf{r}}_s = \sum \mathbf{F}_{külső}$$

Pontrendszer, kiterjedt test tömegközéppontja úgy mozog, mintha a teljes tömeg a tömegközéppontban lenne egyesítve és az összes külső erő erre a pontra hatna.

Impulzus

m tömegű, **v** sebességű test impulzusa:

$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ [kg·m/s] (vektormennyiség)

Impulzustétel tömegpontra

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_{eredő}$$

Az impulzus additív; pontrendszer impulzusa

$$\mathbf{p}_{össz} = \sum \mathbf{p}_i = \sum (m_i \mathbf{v}_i).$$

Impulzustétel pontrendszerre

$\dot{\mathbf{p}}_{össz} = \sum \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_{eredő} = \mathbf{F}_{eredő,külső} = \sum \mathbf{F}_{külső}$, mivel a belső erők eredője zérus .

Impulzus-megmaradás tétele: zárt rendszerben, azaz ahol $\mathbf{F}_{eredő,külső} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{p}_{össz} = \sum \mathbf{p}_i = \text{konst.}$$

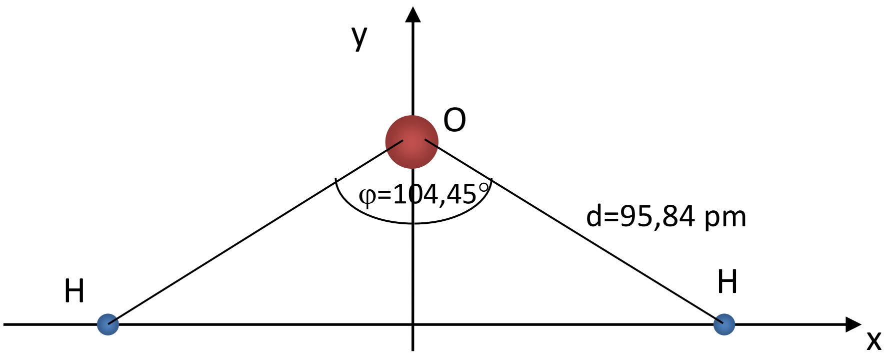
Ütközések

- Tökéletesen rugalmatlan ütközés: Az ütközés után a különálló testekből egy test lesz, aminek a sebessége az impulzus-megmaradást felírva számolható. A mechanikai energia nem marad meg, mivel a két test egybegyűrődésekor az energia egy része deformációs munka végzésére fordítódik.
- Tökéletesen rugalmas ütközés: A testek az ütközés után is különálló testként mozognak, az alakjuk nem változik meg, a mechanikai energia megmarad. A sebességük meghatározásához az impulzus-megmaradást és a (mozgási) energia megmaradást használjuk fel.

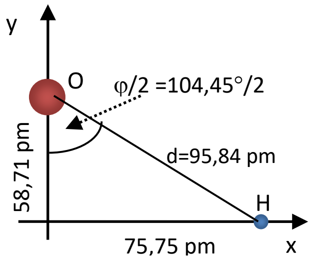
Az impulzus-megmaradást az egyes irányokra külön-külön írjuk fel (a pozitív irányt megválasztva az azzal egyező irányú sebességek pozitívak, az ellentétesek negatívak). Több komponens (pl. szöget bezáró ütközés) esetén az energia-megmaradást nem kell komponensenként írni.

8/1. Határozzuk meg a vízmolekula tömegközéppontját! A kötéshossz 95,84 pm, a kötésszög 104,45°.

MO.
Vegyünk fel egy koordinátarendszert, hogy megadhassuk az egyes atomok koordinátáit. A koordinátarendszert tetszőlegesen választhatjuk meg, de ha így helyezzük el benne a vízmolekulát, akkor kevesebbet kell majd számolnunk:



A koordináták és a tömegek:
$x_{H1} = d\cdot\sin(\varphi/2) = 95{,}84\cdot\sin(104{,}45°/2) = 75{,}75$ pm $y_{H1} = 0$ $m_{H1} = 1$
$x_{H2} = -d\cdot\sin(\varphi/2) = -95{,}84\cdot\sin(104{,}45°/2) = -75{,}75$ pm $y_{H2} = 0$ $m_{H2} = 1$
$x_O = 0$ $y_O = d\cdot\cos(\varphi/2) = 95{,}84\cdot\cos(104{,}45°/2) = 58{,}71$ pm $m_O = 16$
Az össztömeg $M = m_{H1} + m_{H2} + m_O = 18$.



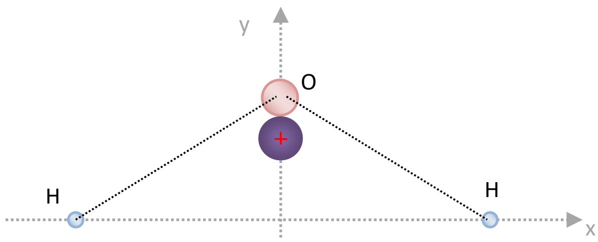
Alkalmazzuk a tömegpontokra vonatkozó képletet:

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum(\mathbf{r}_i\, m_i)}{\sum m_i} = \frac{\sum(\mathbf{r}_i\, m_i)}{M}.$$

Komponensenként felírva:

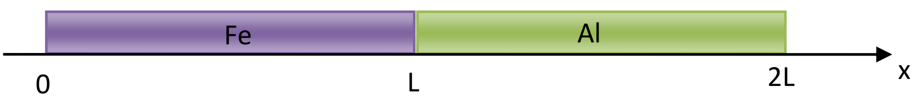
$$x_s = \frac{(75{,}75\cdot 1) + (-75{,}75\cdot 1) + (0\cdot 16)}{18} = 0, \quad \text{és}$$

$$y_s = \frac{(0\cdot 1) + (0\cdot 1) + (58{,}71\cdot 16)}{18} = 52{,}15 \text{ pm}.$$



8/2A. Azonos keresztmetszetű és hosszúságú, homogén vas és alumínium rudat a végüknél összeragasztunk, majd az egészet a tömegközéppontjánál kettévágjuk. Mennyi lesz a két rész tömegének aránya?
A sűrűségek: $\rho_{Fe} = 7{,}8$ kg/dm^3, $\rho_{Al} = 2{,}7$ kg/dm^3.

MO.



Helyezzük el az x tengely mentén úgy a rudakat, hogy a vas 0-tól L-ig, az alumínium L-től 2L-ig tart.
Mivel az x tengely mentén fekszik a rúd, azért $y_s = z_s = 0$, és keressük x_s -t.
A rudak keresztmetszete 'A'.
A tömegközéppontot kiszámolhatjuk
<u>1.) úgy, hogy a rudakat helyettesítjük a tömegközéppontjukba helyezett tömegükkel:</u>
A szimmetriát kihasználva tudjuk, hogy az egyes rudak tömegközéppontja a felezőpontjukban van, vagyis a vasé L/2 -nél, az alumíniumé 3L/2 -nél.
A tömegek $m_{Fe} = \rho_{Fe}\cdot A\cdot L = 7{,}8\ A\cdot L$ ill. $m_{Al} = \rho_{Al}\cdot A\cdot L = 2{,}7\ A\cdot L$.

$$x_S = \frac{(L/2)\cdot(\rho_{Fe}\cdot A\cdot L) + (3L/2)\cdot(\rho_{Al}\cdot A\cdot L)}{(\rho_{Fe}\cdot A\cdot L) + (\rho_{Al}\cdot A\cdot L)} = \frac{L/2\cdot\rho_{Fe} + 3L/2\cdot\rho_{Al}}{\rho_{Fe} + \rho_{Al}} = \frac{7{,}8/2 + 3\cdot 2{,}7/2}{7{,}8 + 2{,}7}\, L = 0{,}7571\, L.$$

2.) térfogati integrállal   (zh-ra nem kell tudni):

A rudat az x tengelyre merőlegesen dx vastagságú szeletekre vágjuk, egy szelet térfogata $dV = A\,dx$.
Az egyes részek tömege $dm = \rho\,dV = \rho\,A\,dx$. Felírjuk az

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r}\,\rho\,dV}{\int \rho\,dV}$$ térfogati integrált.

Az integrálási határok:

0 és L között a sűrűség $\rho=\rho_{Fe}$ (vasrúd),

L és 2L között a sűrűség $\rho=\rho_{Al}$ (alumínium rúd).

$$x_S = \frac{\int_0^L x\cdot dm+\int_L^{2L} x\cdot dm}{\int_0^L dm+\int_L^{2L} dm} = \frac{\int_0^L x\cdot\rho_{Fe}\,A\,dx+\int_L^{2L} x\cdot\rho_{Al}\,A\,dx}{\int_0^L \rho_{Fe}\,A\,dx+\int_L^{2L} \rho_{Al}\,A\,dx} = \frac{\rho_{Fe}A\int_0^L x\,dx+\rho_{Al}A\int_L^{2L} x\,dx}{\rho_{Fe}\,A\int_0^L dx+\rho_{Al}\,A\int_L^{2L} dx} = \frac{\rho_{Fe}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L+\rho_{Al}\left[\frac{x^2}{2}\right]_L^{2L}}{\rho_{Fe}[x]_0^L+\rho_{Al}[x]_L^{2L}} = \frac{7{,}8\frac{L^2}{2}+2{,}7\frac{3L^2}{2}}{7{,}8\,L+2{,}7\,L} = 0{,}7571\ L.$$

A két darabból összeragasztott rúd tömegközéppontja tehát a vasrúdban van, a bal oldali végétől 0,7571 L-re.
Ha itt kettévágjuk, akkor

a bal oldali darab (m_1) a vasrúd 0,7571-ed része, a tömege

$$m_1 = \rho_{Fe}\cdot 0{,}7571\cdot L\cdot A;$$

a jobb oldali darab (m_2) a vasrúd 1–0,7571=0,2429-ed része, plusz az egész alumíniumrúd, a tömege

$$m_2 = \rho_{Fe}\cdot 0{,}2429\cdot L\cdot A + \rho_{Al}\cdot L\cdot A\ .$$

A két tömeg aránya $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_{Fe}\cdot 0{,}7571\cdot L\cdot A}{\rho_{Fe}\cdot 0{,}2429\cdot L\cdot A + \rho_{Al}\cdot L\cdot A} = \frac{7{,}8\cdot 0{,}7571}{7{,}8\cdot 0{,}2429 + 2{,}7} = 1{,}285$,

tehát a rövidebb rúd nehezebb.
A következő gyakorlaton foglalkozunk majd forgatónyomatékkal, de ez az eredmény is mutatja, hogy a tömegközéppont az a pont, amire nézve a gravitációs erő eredő forgatónyomatéka zérus.

8/2B. L hosszúságú rúd sűrűsége egyik végén ρ_0, másik végén $2\rho_0$, közben egyenletesen változik. A rúd keresztmetszete mindenütt azonos. Hol van a súlypontja?

MO.   (zh-ra nem kell tudni)

Helyezzük el a rudat x tengely mentén 0-tól L-ig. A tömegközéppontot az

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r}\,\rho\,dV}{\int \rho\,dV}$$ térfogati integrállal fogjuk számolni.

A dV térfogatelem a **8/2A.2.)** feladathoz hasonlóan $dV = A\,dx$.
Jelen esetben a sűrűség a hely függvénye: a rúd sűrűsége $x = 0$-ban ρ_0, $x = L$-ben $2\rho_0$,
közben lineárisan változik, tehát

$$\rho(x) = \rho_0\,(\,1 + x/L\,)\ .$$

A rúd súlypontjának x_s koordinátája

$$x_s = \frac{\int_0^L x\cdot\rho(x)\cdot A\,dx}{\int_0^L \rho(x)\cdot A\,dx}$$, ahol

a számláló

$$\int_0^L x\cdot\rho(x)\cdot A\,dx = \int_0^L x\cdot\rho_0\left(1+\frac{x}{L}\right)\cdot A\,dx = A\,\rho_0\int_0^L\left(x+\frac{x^2}{L}\right)dx = A\,\rho_0\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}\right]_0^L = A\,\rho_0\left(\frac{L^2}{2}+\frac{L^2}{3}\right) = A\,\rho_0\,\frac{5L^2}{6}\ ,$$

a nevező (vagyis a rúd tömege)

$$M = \int_0^L \rho(x)\,A\,dx = A\,\rho_0\int_0^L\left(1+\frac{x}{L}\right)dx = A\,\rho_0\left[x+\frac{x^2}{2L}\right]_0^L = A\,\rho_0\left(L+\frac{L}{2}\right) = A\,\rho_0\,\frac{3L}{2}\ ,$$

tehát $x_s = \frac{A\rho_0\frac{5L^2}{6}}{A\rho_0\frac{3L}{2}} = \frac{5}{9}\,L$, a közepétől egy kicsivel el van tolódva a $2\rho_0$ sűrűségű vége felé.

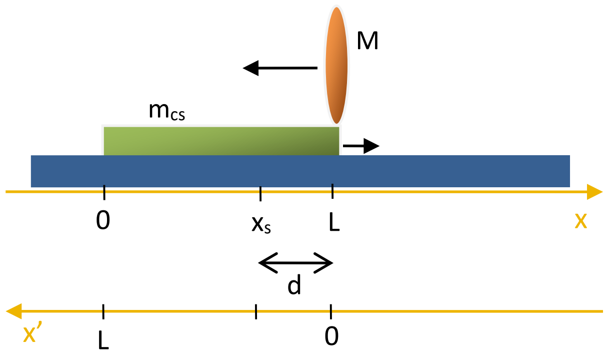
8/3. $L = 4$ m hosszú, $m_{cs} = 120$ kg tömegű csónak egyik végéből megy át a másikba egy $M = 80$ kg tömegű ember. Mennyit mozdul el a csónak a vízparthoz viszonyítva, ha mozgása a vízben jó közelítéssel közegellenállás-mentesnek tekinthető?

A feladatot megoldhatjuk

MO./1. Tömegközéppont tétellel: $m\ddot{\mathbf{r}}_s = \Sigma\mathbf{F}_{\text{külső}}$

Mivel a közegellenállás elhanyagolható, külső erő nem hat a csónak + ember rendszerre, $\Sigma\mathbf{F}_{\text{külső}} = 0$, ezért a tömegközéppont gyorsulása zérus: $\ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{a}_s = 0 \rightarrow \mathbf{v}_s = \text{konst.} \rightarrow \mathbf{r}_s = \mathbf{v}_s \cdot t + \mathbf{r}_{s,0}$.

Mivel induláskor nem mozgott a csónak, $\mathbf{v}_s = 0$, így a tömegközéppont nem mozdulhat el a parthoz képest.



Számoljuk ki a tömegközéppont helyét:

$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot \frac{m_{cs}}{L}\,dx + L \cdot M}{m_{cs}+M} = \frac{m_{cs} \cdot \frac{L}{2} + L \cdot M}{m_{cs}+M} = 2{,}8 \text{ m},$$

vagyis $d = L - x_s = 1{,}2$ m

attól a végétől, ahonnan indul az ember.

Számolhattuk volna rögtön a d távolságot, ha a koordinátatengelyt így vesszük fel:

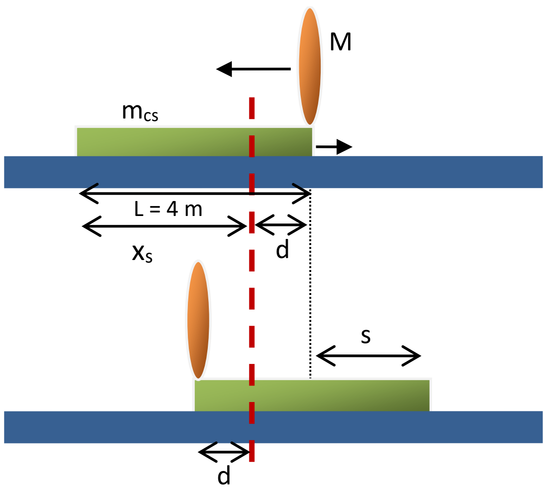
$$d = \frac{\int_0^L x \cdot \frac{m_{cs}}{L}\,dx + 0 \cdot M}{m_{cs}+M} = \frac{m_{cs} \cdot \frac{L}{2}}{m_{cs}+M} = 1{,}2 \text{ m}.$$

A végállapotban az ember a csónak túlsó végén van, ahogy a következő ábra mutatja.

A szimmetriát felhasználva az ábráról látható, hogy

$s = L - 2d = 1{,}6$ m,

ennyit mozdult el a csónak a parthoz képest.



MO./2. Impulzus-megmaradással:

Az impulzus-tétel: $\dot{\mathbf{p}}_{\text{össz}} = \Sigma\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_{\text{eredő}} = \mathbf{F}_{\text{eredő,külső}} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{külső}}$.

Mivel a közegellenállás elhanyagolható, külső erő nem hat a csónak + ember rendszerre, $\Sigma\mathbf{F}_{\text{külső}} = 0$,

ezért $\mathbf{p}_{\text{össz}} = \Sigma\mathbf{p}_i = \text{konst.}$, tehát a csónak + ember rendszer impulzusának összege állandó.

A két állapot, amit összehasonlítunk:

– kiinduláskor nyugalomban voltak, sebességük zérus, tehát az impulzusuk összege zérus;

– amíg az ember végigsétált a csónakon, mind az ember, mind a csónak mozgásban volt a parthoz képest.
Az egyszerűség kedvéért egyenletes mozgást tételezünk fel. Fejezzük ki ezeket a sebességeket:
a csónak s távolságot mozdul el a parthoz viszonyítva Δt idő alatt, azaz sebessége $v = s/\Delta t$;
közben az ember $(L–s)$ távolságot mozdul el a parthoz képest az ellenkező irányba, azaz sebessége $V = -(L-s)/\Delta t = (s-L)/\Delta t$.

Felírva az impulzus-megmaradást:

$$0 = m_{cs}v + MV = m_{cs} \cdot s/\Delta t + M \cdot (s-L)/\Delta t \qquad \rightarrow \qquad s = L \cdot M/(M+m_{cs}) = 1{,}6 \text{ m}.$$

8/4. 30 kg tömegű súrlódásmentes kiskocsin 40 kg tömegű gyerek ül, és van még a kocsin 2 db 5 kg tömegű tégla. A kocsi sebessége 2 m/s. A gyerek eldobja először az egyik téglát menetirányba, majd a másikat ellenkező irányba. A téglákat a kocsihoz képest 5 m/s sebességgel dobja el.
a) Mekkora lesz a kocsi sebessége a második tégla eldobása után?
b) És mekkora lesz a kocsi sebessége akkor, ha az első téglát dobja hátrafelé és a másodikat előrefelé?

MO.
A kocsi+gyerek tömege $M = 30+40 = 70$ kg, a tégláké $m_1 = m_2 = m = 5$ kg,
a kiindulási sebesség $v_0 = 2$ m/s, a tégla relatív sebessége $v_r = 5$ m/s.
A feladatot impulzus-megmaradással oldjuk meg, a tégla kidobása előtti ill. utáni állapotokat összehasonlítva.
a) Az első tégla kidobása:
előtte az $M+2m$ tömeg v_0 sebességgel halad;
utána az $M+m$ tömeg v_{1a} sebességgel halad,
és az eldobott tégla (m tömeg) sebessége a földhöz képest v_0+v_r, mivel a gyerek a téglát előrefelé dobta el v_r sebességgel a v_0 sebességgel haladó kocsihoz képest,
tehát

$$(M+2m)\,v_0 = m\,(v_0+v_r) + (M+m)\,v_{1a}$$

$$\rightarrow \quad v_{1a} = v_0 - \frac{m}{M+m}\cdot v_r$$ lesz a kocsi sebessége az első tégla kidobása után.

A második tégla kidobása:
előtte az $M+m$ tömeg v_{1a} sebességgel halad,
utána az M tömeg v_{2a} sebességgel halad,
és az eldobott tégla (m tömeg) sebessége a földhöz képest $v_{1a}–v_r$, mivel a gyerek a téglát hátrafelé dobta el v_r sebességgel a v_{1a} sebességgel haladó kocsihoz képest,
tehát

$$(M+m)\,v_{1a} = m\,(v_{1a}-v_r) + M\,v_{2a}$$

$$\rightarrow \quad v_{2a} = v_{1a} + \frac{m}{M}\cdot v_r = v_0 + \frac{m^2}{M(M+m)}\cdot v_r$$ lesz a kocsi sebessége a második tégla kidobása után;

behelyettesítve $v_{1a} = 5/3 = 1{,}667$ m/s, $v_{2a} = 2{,}024$ m/s.

b) Ha az első téglát dobja hátrafelé:

$$(M+2m)\,v_0 = m\,(v_0-v_r) + (M+m)\,v_{1b}$$

$$\rightarrow \quad v_{1b} = v_0 + \frac{m}{M+m}\cdot v_r$$ lesz a kocsi sebessége az első tégla kidobása után;

és a másodikat előrefelé:

$$(M+m)\,v_{1b} = m\,(v_{1b}+v_t) + M\,v_{2b}$$

$$\rightarrow \quad v_{2b} = v_{1b} - \frac{m}{M}\cdot v_r = v_0 - \frac{m^2}{M(M+m)}\cdot v_r$$ lesz a kocsi sebessége a második tégla kidobása után;

behelyettesítve $v_{1b} = 7/3 = 2{,}333$ m/s, $v_{2b} = 1{,}976$ m/s.
Vegyük észre, hogy mivel a **b)** esetben mindkétszer ellentétes irányba dobta a téglákat, mint az **a)** esetben, nem kell újra felírni az egyenleteket, hanem használhatjuk az **a)** rész képleteit úgy, hogy v_r értékére +5 m/s helyett –5 m/s -ot helyettesítünk be.

Általánosabb a megoldás, ha a megfelelő előjelet mindig a v_r -nél használjuk és nem a képletbe írjuk be, azaz első tégla:

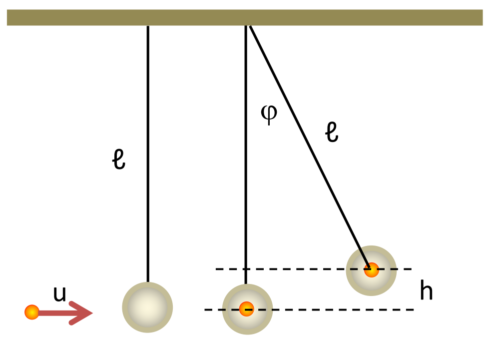
$$(M+2m)\,v_0 = m\,(v_0+v_r) + (M+m)\,v_1 \quad\rightarrow\quad v_1 = v_0 - \frac{m}{M+m}\cdot v_r\,,$$

ha előre dobta, $v_{ra} = +5$ m/s $\rightarrow$ $v_{1a} = 2 - 1/3 = 5/3$ m/s;
ha hátra dobta, $v_{rb} = -5$ m/s $\rightarrow$ $v_{1b} = 2 + 1/3 = 7/3$ m/s;
második tégla:

$$(M+m)\,v_1 = m\,(v_1+v_r) + M\,v_2 \quad\rightarrow\quad v_2 = v_1 - \frac{m}{M}\cdot v_r\,,$$

ha hátra dobta, $v_{ra} = -5$ m/s $\rightarrow$ $v_{2a} = 5/3 + 5/14 = 2{,}024$ m/s;
ha előre dobta, $v_{rb} = +5$ m/s $\rightarrow$ $v_{2b} = 7/3 - 5/14 = 1{,}976$ m/s.

8/5. Ballisztikus inga: ℓ hosszú fonálon lógó M tömegű zsákba vízszintes u sebességgel belelövünk egy m tömegű golyót, ami benne ragad a zsákban (rugalmatlan ütközés), és azzal együtt φ szöggel kilendül. Mekkora maximális szöggel lendül ki?



MO. Az ütközés tökéletesen rugalmatlan, tehát a golyó és a zsák össz-impulzusa állandó:
ütközés előtt: az m tömegű golyó u sebességgel halad,
az M tömegű zsák áll;
ütközés után: az M+m tömeg v sebességgel megindul.

$$mu = (M+m)\,v \quad \rightarrow \quad v = \frac{m}{M+m}\,u\,.$$

Innen energia-megmaradással számítható az emelkedés magassága:
az alsó pontról indulva $E_{mech,a} = ½\,(M+m)\,v^2 + 0$, ha a potenciális energia nulla szintjét ide vesszük fel;
a legfelső ponton $v = 0$, $E_{mech.f} = (M+m)\,gh$ (h jelöli a maximális magasságot),
tehát

$$½\,(M+m)\,v^2 = (M+m)\,gh \quad \rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 u^2\,,$$

és az ehhez tartozó szög

$$h = \ell(1-\cos\varphi) \quad \rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{l-h}{l} = 1-\frac{h}{l} = 1-\frac{1}{2gl}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 u^2\,.$$

8/6. Rugalmas ütközés egy egyenes mentén: m tömegű testet u sebességgel nekilökünk egy álló M tömegű testnek. Határozzuk meg a két test ütközés utáni sebességét, és vizsgáljuk meg azokat a speciális eseteket, amikor
a) $m = M$; **b)** $m \ll M$; **c)** $m \gg M$.

MO. Az ütközés tökéletesen rugalmas, ezért a két testből álló rendszer össz-impulzusa állandó és az összes mechanikai energiája is állandó. Mivel az ütközés adott helyen történik, a potenciális energia az ütközés pillanatában nem változik, így a mechanikai energiában csak a mozgási energiát írjuk fel.
Ütközés előtt az m tömegű test sebessége u, az M tömegű test áll;
ütközés után az m tömegű test sebessége v, az M tömegű test sebessége V.
Pozitív iránynak az u sebesség irányát vesszük fel. (Ha v-re negatívat kapunk, akkor az azt jelenti, hogy az m tömegű test ezzel az iránnyal ellentétes irányba mozog.)

$$mu + M\cdot 0 = mv + MV$$
$$½mu^2 + ½M\cdot 0^2 = ½\,mv^2 + ½\,MV^2.$$

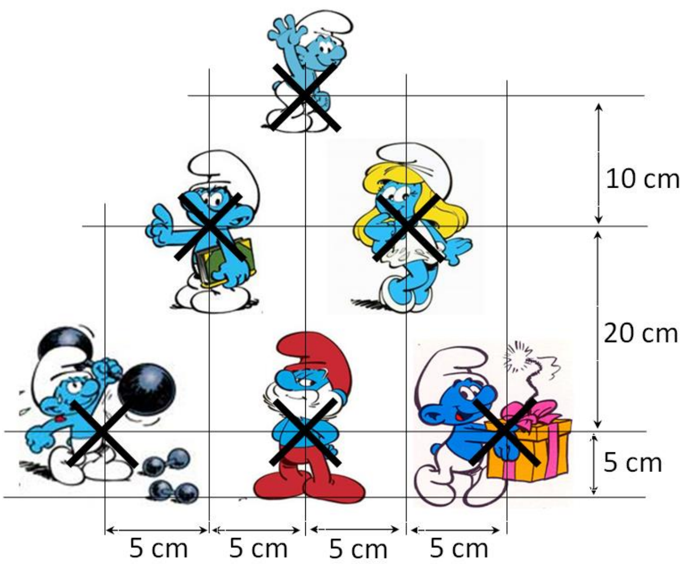
A második egyenletet átrendezve $m(u^2-v^2) = m(u-v)\,(u+v) = MV^2$,
az első egyenletet átrendezve $m(u-v) = MV$;
elosztva őket megkapjuk V-t: $V = u + v$,
ezt beírva az első egyenletbe $mu = mv + Mu + Mv$,

$$\rightarrow \quad v = \frac{m-M}{m+M}\,u \quad \text{és} \quad V = \frac{2m}{m+M}\,u\,.$$

Nézzünk meg a speciális eseteket:

a)	m = M (a két golyó egyforma tömegű)	$v = 0$; $V = u$	sebességet cserélnek
b)	m « M (nagy tömegű álló golyónak ütközik elhanyagolható tömegű golyó)	$v \approx -u$; $V \approx 0$	a kis tömegű golyó visszapattan, a nagy tömegű meg se mozdul
c)	m » M (elhanyagolható tömegű álló golyónak ütközik nagy tömegű golyó)	$v \approx u$; $V \approx 2u$	a nagy tömegű golyó változatlan sebességgel megy tovább, a kis tömegű golyó kétszer akkora sebességgel indul

Gyakorló feladatok zh-ra



8/7. A törpök fel szeretnének lépni a cirkuszban. A mutatvány az lesz, hogy gúlát alkotnak magukból – ahogy a képen láthatjuk. A keresztek az egyes törpök tömegközéppontját jelölik.
A törpök az alsó sorban balról jobbra:
Törperős 1,5 kg; Törpapa 1,2 kg; Tréfi 1,2 kg;
a középső sorban:
Okoska 0,9 kg; Törpilla 1,1 kg;
legfelül Törpicur 0,5 kg.
Hol van a hat törp tömegközéppontja? Milyen messze van Törpapa tömegközéppontjától?

MO.
Válasszuk Törpapa tömegközéppontját origónak, akkor az egyes törpök helyvektorai (cm-ben):
Törperős (–10;0), Törpapa (0;0), Tréfi (10;0), Okoska (–5;20), Törpilla (5;20), Törpicur (0;30).
A hat törp tömegközéppontja: $\mathbf{r}_s = (m_1\mathbf{r}_1+\ldots+m_6\mathbf{r}_6) / (m_1+\ldots+m_6)$.
A vízszintes koordinátája
$x_s = (-10\cdot1{,}5+0\cdot1{,}2+10\cdot1{,}2-5\cdot0{,}9+5\cdot1{,}1+0\cdot0{,}5)/(1{,}5+1{,}2+1{,}2+0{,}9+1{,}1+1{,}5) = -2 / 6{,}4 = -0{,}3125$ cm;
a függőleges koordinátája
$y_s = (0\cdot1{,}5+0\cdot1{,}2+0\cdot1{,}2+20\cdot0{,}9+20\cdot1{,}1+30\cdot0{,}5)/(1{,}5+1{,}2+1{,}2+0{,}9+1{,}1+1{,}5) = 55 / 6{,}4 = 8{,}59375$ cm.
A tömegközéppont távolsága Törpapától $d = \sqrt{0{,}3125^2 + 8{,}59375^2} \approx 8{,}60$ cm.

8/8. Az 1995-ös olimpia alkalmával történt, hogy az egyik rúdugró aranyat akart csempészni az ugrórúdjában. A rúdja 4 cm átmérőjű és 5 m hosszú volt, és szénszál erősítésű kevlarból készült, aminek sűrűsége $\rho_k = 1{,}5$ kg/dm^3. A versenybizottság azonban megvizsgált minden rudat, és feltűnt nekik, hogy a rúd 6,7 dkg-mal nehezebb, mint az a fenti adatok alapján várható lenne, és ráadásul a súlypontja se a felénél van, hanem 1 cm-rel odébb.
Hol, mennyi arany volt a rúdban, ha az a rúd teljes keresztmetszetében, egy darabban volt belerakva? Az arany sűrűsége $\rho_{Au} = 19{,}3$ kg/dm^3.

MO. Ha az egész rúd kevlarból lenne, a tömege
$m_{tk} = \rho_k\cdot V_{rúd} = \rho_k\cdot L\cdot r^2\pi = 1500\cdot5\cdot0{,}02^2\pi = 9{,}425$ kg lenne,
de az arannyal együtt a tömege $m_{rúd} = 9{,}425 + 0{,}067 = 9{,}492$ kg.
Legegyszerűbb úgy gondolkodnunk, hogy két testünk van:
– egy tiszta kevlar rúd (teljes hosszában kevlar, azaz ott is, ahol az arany van),
ennek tömege $m_{tk} = 9{,}425$ kg és a tömegközéppontja a rúd felénél van; és
– a $\Delta m = 0{,}067$ kg plusz tömeg (ott, ahol az arany van), aminek ismeretlen a tömegközéppontja.
Az aranydarabkának a tömegközéppontját vissza tudjuk számolni abból, hogy mennyivel tolódott el a rúd tömegközéppontja a rúd közepéhez képest.
A rúd végpontjától nézve a tömegközéppont 2,5 m helyett 2,51 m-re van:
$x_s = 2{,}51 = \frac{2{,}50\cdot9{,}425+x\cdot0{,}067}{9{,}492}$, amiből az arany tömegközéppontja $x = 3{,}917$ m-re van a rúd végétől.
A rúd közepéből nézve a tömegközéppont 10 cm = 0,1 m-re van (mivel a tiszta kevlar rúd tömegközéppontja a rúd közepében van, ezért az m_{tk} tömeg tömegközéppontja ekkor 0):
$x'_s = 0{,}01 = \frac{x'\cdot0{,}067}{9{,}492}$, amiből az arany tömegközéppontja $x' = 1{,}417$ m-re van a rúd közepétől.

8/9. Jancsi és Juliska állnak a jégen egymástól 12 m-re, fogják egy kötél két végét.
a) Hol van a tömegközéppontjuk az őket összekötő egyenes mentén, ha Jancsi 35 kg, Juliska 25 kg tömegű?
Jancsi hirtelen elkezdi húzni a kötelet. Egy pillanat alatt felgyorsulva mindketten súrlódásmentesen csúszni kezdenek egymás felé állandó sebességgel. Jancsi sebessége 1,5 m/s.
b) Mennyi Juliska sebessége?
c) Milyen távol lesznek egymástól, amikor Jancsi 3 m-t csúszott?
Ütközésük tökéletesen rugalmatlan ütközésnek tekinthető (összekapaszkodnak, nem eresztik el egymást). Az ütközésük 0,05 s-ig tartott.
d) Mennyi lesz a közös sebességük?
e) Mennyi Juliska ill. Jancsi impulzusának változása?
f) Mekkora erő hatott Juliskára ill. Jancsira, ha feltesszük, hogy ütközéskor a köztük ható erő állandó volt?
g) Hány ’g’ gyorsulást jelentett ez Juliskának ill. Jancsinak?

MO.
a) Juliskától $x_s = (0 \cdot 25 + 12 \cdot 35) / (25+35) = 7$ m-re, Jancsitól 5 m-re.
b) Impulzus-megmaradást írhatunk fel, mert a külső erők eredője zérus. Az össz-impulzusuk zérus, mivel kezdetben álltak. Ha Jancsi sebességét vesszük pozitívnak:

$$m_{Jancsi}\, v_{Jancsi} + m_{Juliska}\, v_{Juliska} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{Juliska} = -\,35 \cdot 1{,}5/25 = -\,2{,}1 \text{ m/s.}$$

c) $s_{Juliska} / s_{Jancsi} = v_{Juliska} / v_{Jancsi}$, mert azonos ideig mozognak. Amíg Jancsi $s_{Jancsi} = 3$ m-t tesz meg, addig Juliska $s_{Juliska} = 4{,}2$ m -t, tehát a távolság köztük $d = 12 - (3+4{,}2) = 4{,}8$ m.
d/ Impulzus-megmaradással:

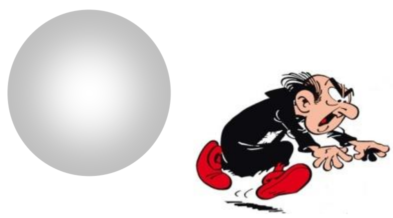
$$m_{Jancsi}\, v_{Jancsi} + m_{Juliska}\, v_{Juliska} = 0 = (m_{Jancsi}+m_{Juliska}) \cdot v_{közös} \quad \rightarrow \quad v_{közös} = 0.$$

e) $\Delta p_{Juliska} = m_{Juliska}\, \Delta v_{Juliska} = 25 \cdot (\,0 - (-2{,}1)\,) = 52{,}5$ kgm/s ; $\Delta p_{Jancsi} = 35 \cdot (\,0 - 1{,}5\,) = -52{,}5$ kgm/s .
f) $F_{Juliska} = \Delta p_{Juliska} / \Delta t = 52{,}5 / 0{,}05 = 1050$ N ; $F_{Jancsi} = \Delta p_{Jancsi} / \Delta t = -52{,}5 / 0{,}05 = -1050$ N.
g) $a_{Juliska} = F_{Juliska} / m_{Juliska} = 1050/25 = 42 \text{ m/s}^2 = 4{,}2\text{ g}$; $a_{Jancsi} = F_{Jancsi} / m_{Jancsi} = -1050/35 = -30 \text{ m/s}^2 = -3{,}0\text{ g}$.

8/10. Jancsi ül egy kis kocsiban két téglával, és úgy akarja elindítani a kocsit, hogy a téglákat kidobja a kocsiból. Jancsi tömege 48 kg, a kocsié 12 kg, egy tégláé 4 kg. Jancsi a *kocsihoz képest* 3 m/s-os sebességgel tudja eldobni a téglákat. A kocsi súrlódásmentesen mozoghat.
Mekkora lesz a sebessége a két tégla kidobása után, ha azokat
a) egyszerre,
b) egymás után dobja ki?

MO. Impulzus-megmaradást felírva, a tégla sebességét véve pozitív iránynak
a) $(48+12+2 \cdot 4) \cdot 0 = 2 \cdot 4 \cdot 3 + (48+12) \cdot v \quad \rightarrow \quad v = -24/60 = -0{,}4$ m/s.
b) $(48+12+2 \cdot 4) \cdot 0 = 4 \cdot 3 + (48+12+4) \cdot v_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = -12/64 = -0{,}1875$ m/s;
$(48+12+4) \cdot v_1 = 4 \cdot (v_1+3) + (48+12) \cdot v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = (-12-11{,}25)/60 = -0{,}3875$ m/s.

8/11. Hókuszpók maga nem síel, de kiment leskelődni a síelő törpök után. A hegy aljában sétálgat a vízszintes mezőn, amikor egy lavina megindul a hegyről. Meglátja, hogy egy óriási, 110 kg tömegű hógömb tart feléje 12 m/s sebességgel. Megpróbál elfutni előle. 8 m/s sebességgel fut, merthogy annál gyorsabban nem tud, így aztán a lavina utoléri őt. A lavina elragadja Hókuszpókot; ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy Hókuszpók a hógömbbel tökéletesen rugalmatlanul ütközik. Hókuszpók tömege 50 kg.



a) Mennyi lesz a hógömb sebessége, miután bekebelezte Hókuszpókot?
Az alábbi kérdésekre a válaszokat előjellel együtt adjuk meg:
b) Mennyi Hókuszpók impulzusának változása a lavinával való találkozásakor? Mennyi a hógömb impulzusának változása? Mennyi a Hókuszpók+lavina rendszer impulzusának változása?
c) Mennyi Hókuszpók mozgási energiájának változása a lavinával való találkozásakor? Mennyi a hógömb mozgási energiájának változása? Mennyi a Hókuszpók+lavina rendszer mozgási energiájának változása?

MO.

a) Rugalmatlan ütközésnek tekinthetjük: $m_{hg}v_{hg} + M_{HP}V_{HP} = (m_{hg}+M_{HP})U$

$\rightarrow$ $U = (m_{hg}v_{hg}+M_{HP}V_{HP})/(m_{hg}+M_{HP}) = (110\cdot 12+50\cdot 8)/(110+50) = 10{,}75$ m/s.

b) $\Delta p_{HP} = M_{HP}(U–V_{HP}) = 50\cdot(10{,}75–8) = +137{,}5$ kgm/s

$\Delta p_{hg} = m_{hg}(U–v_{hg}) = 110\cdot(10{,}75–12) = –137{,}5$ kgm/s

$\Delta p_{össz} = 0$

c) $\Delta E_{kin,HP} = ½\ M_{HP}(U^2–V_{HP}^2) = ½\cdot 50\cdot(10{,}75^2–8^2) = +1289{,}0625$ J

$\Delta E_{kin,hg} = ½\ m_{hg}(U^2–v_{hg}^2) = ½\cdot 110\cdot(10{,}75^2–12^2) = –1564{,}0625$ J

$\Delta E_{kin,össz} = \Delta E_{kin,HP} + \Delta E_{kin,hg} = 1289{,}0625 – 15674{,}0625 = –275$ J

8/12. A rablók nem bírták kinyitni a páncélszekrényt, ezért magukkal viszik az egészet. Menekülés közben felmásztak vele a 2,3 m magas kerítés tetejére és onnan bedobják a kerítésen kívül várakozó kocsijukba. A páncélszekrényt 12 m/s kezdősebességgel vízszintesen dobják el. Amikor a páncélszekrény beleesik a kocsiba, sebességének függőleges komponensét elnyeli a kocsijukon levő gumimatrac, és a kocsi rajta a páncélszekrénnyel elkezd csúszni az aszfalton. A páncélszekrény tömege m = 200 kg, a kocsié M = 800 kg, a súrlódási együttható $\mu = 0{,}432$.

a) Milyen messze csúszik a kocsi a páncélszekrénnyel?

b) Mennyi a páncélszekrény + kocsi rendszer mechanikai energiája

- a páncélszekrény eldobásakor,
- a páncélszekrény kocsihoz érkezésekor,
- a páncélszekrény + kocsi elindulásakor,
- amikor a páncélszekrény + kocsi 0,5 m-t tett meg?

A kocsi vízszintes sík terepen van, az legyen a helyzeti energia zérus szintje.

MO.

a) Elhajításkor a páncélszekrény sebességének vízszintes komponense $v_x = 12$ m/s, ami nem változik a hajítás során, tehát ekkora vízszintes sebességgel érkezik a páncélszekrény a kocsihoz, amivel rugalmatlanul ütközik. A kocsi+páncélszekrény vízszintes sebességgel fog mozogni, az ütközéskor a sebesség függőleges komponense elnyelődik, a vízszintes sebességkomponensre felírhatjuk az impulzus-megmaradást:

$m_{páncél}\cdot v_x = (m_{páncél}+m_{kocsi})\cdot u$ $\rightarrow$ tehát a kocsi a páncélszekrénnyel u = 2,4 m/s kezdősebességgel indul meg.

Ezt a sebességét elveszíti a súrlódás miatt. Munkatétellel

$0 – ½(m_{páncél}+m_{kocsi})u^2 = –\mu(m_{páncél}+m_{kocsi})g\ s$ $\rightarrow$ $s = u^2/(2\mu g) = 2/3$ m .

b) A páncélszekrény + kocsi rendszer mechanikai energiája, ha a z = 0 a kocsi magasságán van:

- A páncélszekrény eldobásakor: a kocsié zérus, a páncélszekrényé
  $E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} = m_{páncél}\ g\ h + ½m_{páncél}\ v_0^2 = 200\cdot 10\cdot 2{,}3 + ½\cdot 200\cdot 12^2 = 19000$ J.
- A páncélszekrény kocsihoz érkezésekor: ugyanennyi.
- A páncélszekrény+kocsi elindulásakor: itt már nem marad meg az energia, mert a rugalmatlan ütközéskor egy része elnyelődik (deformációs munka), tehát a kocsi+páncélszekrény ütközés utáni sebességével kell kiszámolni a mozgási energiát:
  $E_{mech} = ½(m_{páncél}+m_{kocsi})u^2 = 2880$ J.
- Amikor a páncélszekrény+kocsi 0,5 m-t tett meg:
  a súrlódási munka csökkentette az előzőleg kiszámolt energiát, tehát
  $E_{mech} = 2880 – \mu(m_{páncél}+m_{kocsi})g\ s = 2880 – 0{,}432\cdot 1000\cdot 10\cdot 0{,}5 = 720$ J.

8/13. Vízszintes súrlódásmentes asztalon egyik végén rögzített, k = 10 N/m rugóállandójú, $\ell = 24$ cm hosszú rugó fekszik, és a végéhez van rögzítve egy $m_1 = 40$ dkg tömegű test. Az asztalon a rugó tengelyében nekilökünk egy $m_2 = 20$ dkg tömegű testet v = 1,2 m/s sebességgel. (A testek nem gurulnak, hanem súrlódásmentesen csúsznak az asztalon.) A két test tökéletesen rugalmasan ütközik.

a) Mekkora lesz az m_1 tömegű test sebessége az ütközés után?

b) Mekkora lesz a rugó maximális összenyomódása?

MO.

a) Az ütközés tökéletesen rugalmas, tehát megmarad az impulzus és az energia is:
impulzus-megmaradás: $m_2v = m_1v_1 + m_2v_2$;
energia-megmaradás: $½m_2v^2 = ½m_1v_1^2 + ½m_2v_2^2$;
ezt az egyenletrendszert megoldva v_1-re és v_2-re:

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v = -0{,}4 \text{ m/s} \quad \text{és} \quad v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v = 0{,}8 \text{ m/s}.$$

b) Energia-megmaradással: az m_1 test nyomja össze a rugót, közben elveszti a sebességét.

$$E_{mech} = ½\, m\, v^2 + ½\, k\, x^2 = \text{konst.}$$

Közvetlenül az ütközés után
m_1-nek még nincs potenciális energiája, csak mozgási: $E_A = ½\, m_1 v_1^2$;
a maximális összenyomódásnál
a sebesség éppen zérus, ekkor csak potenciális energiája van m_1-nek: $E_B = ½\, k\, \Delta x^2$.
Ezeket egyenlővé téve és rendezve Δx-re:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1}{k}}\, v_1 = \sqrt{\frac{m_1}{k}} \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v, \quad \text{behelyettesítve} \quad \Delta x = 0{,}16 \text{ m}.$$

Alternatív megoldás: a teljes eseménysor kezdetét és végét tekintve: m_2 ütközés előtti mozgási energiája egyenlő az m_2 ütközés utáni mozgási energiájával és a rugó potenciális energiájával (amikor az m_1 éppen megáll), azaz:

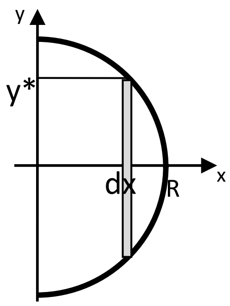
$$½m_2v^2 = ½m_2v_2^2 + ½k\, \Delta x^2, \quad \text{ahonnan:} \quad \Delta x = \sqrt{\frac{m_2}{k}(v^2 - v_2^2)} = 0{,}16 \text{ m}.$$

Nem zh-feladatok

8/14. Határozzuk meg egy homogén lemezből kivágott félkör súlypontjának helyzetét!

MO.

a) A lemez vastagsága legyen D, így a sűrűség $\rho = \frac{M}{1/2 \cdot R^2 \pi \cdot D}$.
Szimmetria miatt $y_s = 0$; keressük x_s -et.
<u>Descartes-koordinátarendszerben:</u>
A félkört szeleteljük fel az ábrán látható módon:

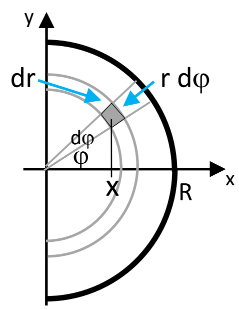


$$dV = D \cdot 2y^*\, dx = D \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx\, .$$

$$x_s = \frac{\int x\rho\, dV}{\int \rho\, dV} = \frac{\int_0^R x \cdot \rho \cdot D \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx}{M} = \frac{4}{R^2\pi}\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{4}{R^2\pi}\left[-\frac{1}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}\right]_0^R = \frac{4}{R^2\pi} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi} R\, .$$

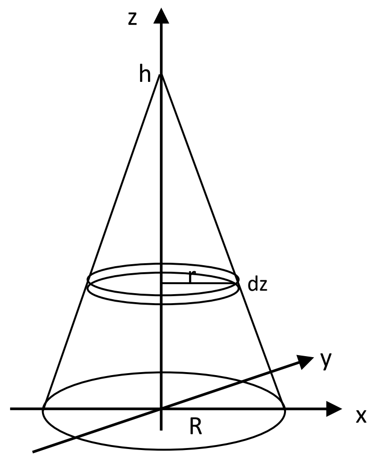
<u>Polárkooordináta-rendszerben:</u>
$dV = D \cdot r \cdot d\varphi\, dr$, az integrálási határok φ-re: $-\pi/2 \to +\pi/2$;
$x = r \cos\varphi$.



$$x_s = \frac{\int x\rho\, dV}{\int \rho\, dV} = \frac{\int_0^R \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (r\cos\varphi)\rho\, D \cdot r\, d\varphi\, dr}{M} = \frac{2}{R^2\pi}\int_0^R r^2 \left(\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi\right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2\pi}\int_0^R r^2 [\sin\varphi]_{-\pi/2}^{+\pi/2}\, dr = \frac{2}{R^2\pi}\int_0^R r^2 \cdot 2\, dr = \frac{4}{R^2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{R^2\pi} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi} R\, .$$

8/15. Hol helyezkedik el egy homogén tömegeloszlású kúp súlypontja?



MO.
Szeleteljük fel a kúpot a szimmetriatengelyére – a z tengelyre – merőlegesen korongokra. Egy korong magassága dz, sugara z=0-nál R, z=h-nál 0, azaz $r = R\,(1 - z/h)$.
A korongok, azaz az elemi tömegek térfogata
$dV = r^2\pi\, dz = R^2(1-z/h)^2\pi\, dz$.
A kúp sűrűsége $\rho = m / V_{kúp} = m / (R^2\pi h/3)$.
A kúp tömegközéppontjának z koordinátája

$$z_S = \frac{\int_0^h z\cdot\rho\cdot A(z)\,dz}{m} = \frac{1}{m}\int_0^h z\cdot\frac{3m}{R^2\pi h}\cdot R^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2\pi\,dz =$$
$$= \frac{3}{h^3}\int_0^h z\cdot(h-z)^2\,dz = \frac{3}{h^3}\int_0^h (h^2z - 2hz^2 + z^3)\,dz =$$
$$= \frac{3}{h^3}\left[\frac{h^2z^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right]_0^h = \dots = \frac{h}{4}.$$

8/16. Miért nehezebb egy kisebb tömegű csónakból kiugrani a partra, mint egy nagyobb tömegű hajóból?

MO. A kérdés az, hogy mekkora munkával tudjuk magunkat felgyorsítani az álló helyzetből az ugrás sebességére, és a csónakot is mi gyorsítjuk fel. m az ember tömege, v lesz az ember sebessége, M a csónak tömege, V lesz a csónak sebessége, ezekkel a munkatételt használva

$$W = \Delta E_{kin} = E_{kin\ ugráskor} - 0 = ½\, MV^2 + ½\, mv^2.$$

Másrészt, mivel csak belső erő fog hatni (amikor elrugaszkodunk a csónakról), ezért az ember + csónak rendszer impulzusa állandó marad, méghozzá zérus, mert kezdetben nyugalomban voltak:

$$MV + mv = 0.$$

Innen $V = -mv/M$ és $W = ½\, M\,(-mv/M)^2 + ½\, mv^2 = \dots = ½\, m\,(1 + m/M)\, v^2$,
vagyis minél nagyobb az m/M hányados, annál nagyobb munkát kell befektetni ahhoz, hogy egy bizonyos v sebességre felgyorsítsuk magunkat.

8/17. Egy 7 kg-os lövedék pályájának legfelső pontján, a kilövés után 3 s-mal két darabra robban szét. A robbanás egy, a kilövési ponttól 1200 m távolságban tartózkodó őrmester feje fölött történt, majd a robbanás után 1 s-mal egy 2 kg- os repeszdarab az őrmester lába elé esett. A kilövés helyétől milyen távolságban keressék a másik repeszdarabot?

MO.
Mivel a kilövéstől a robbanásig 3 s telt el és ezalatt 1200 m-t tett meg vízszintesen a lövedék, vízszintes sebessége $v_x = v_0 \cos\alpha = d / t_h = 1200 / 3 = 400$ m/s. Ez lesz a sebessége a robbanáskor, a robbanás ugyanis a pálya csúcspontján történik, amikor a repesz függőleges sebessége zérus:
$v_z = v_0 \sin\alpha - g t_h = 0$. Utóbbiból kiszámítható a robbanás helyének magassága: a lövedék kezdősebességének függőleges komponense $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = g t_h = 10\cdot 3 = 30$ m/s volt, amivel
$h = (v_0 \sin\alpha)\, t_h - ½\, g\, t_h^2 = 30\cdot 3 - 5\cdot 3^2 = 45$ m. A robbanás után az $m_1 = 2$ kg tömegű repeszdarab ebből a magasságból érkezett le $t_1 = 1$ s alatt, vagyis $h + v_{10}\, t_1 - ½\, g\, t_1^2 = 0 \;\rightarrow\; v_{10} = -40$ m/s függőleges kezdősebessége volt a robbanás után.
Az impulzus-megmaradást felírva a robbanásra:
$M\,(v_0 \cos\alpha)\, \mathbf{i} = m_1 v_{10}\, \mathbf{k} + m_2 \mathbf{v_2}$

$\rightarrow\; \mathbf{v_2} = (M\, v_0 \cos\alpha) / m_2\, \mathbf{i} - (m_1 v_{10}) / m_2\, \mathbf{k} = (7\cdot 400/5)\, \mathbf{i} - (2\cdot(-40)/5)\, \mathbf{k} = 560\, \mathbf{i} + 16\, \mathbf{k}$ (m/s)

lesz az 5 kg tömegű darab kezdősebessége. A helyvektora
$\mathbf{r}(t) = (1200 + 560\, t)\, \mathbf{i} + (45 + 16\, t - 5\, t^2)\, \mathbf{k}$ [m].
Ebből ki tudjuk számolni, hogy mikor és hol ér földet:
$45 + 16\, t_t - 5\, t_2^2 = 0 \;\rightarrow\; t_2 \approx 5$ s alatt ér földet $d_2 = 1200 + 560\, t_2 = 4000$ m távolságban a kilövés helyétől.