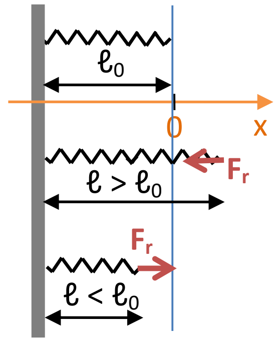
**Rugóerő**

Rugalmas test alakváltozása esetén a rugalmas test végéhez rögzített testre kifejtett erő.
Legegyszerűbb esetben ezt az erőt lineárisnak vesszük (Hooke-törvény).




$F_r = -k\cdot\Delta\ell$, ahol

k a rugóállandó [N/m] = [kg/s$^2$],

$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ a rugó megnyúlása,

$\ell$ a rugó aktuális hossza, $\ell_0$ a nyugalmi hossza;

iránya: mindig a rugó nyugalmi hosszát visszaállító irányba mutat.

Szokás a rugó **megnyúlás**át x-szel jelölni, ami a rezgőmozgás képletében a kitérést fogja jelenteni, ha a rezgőmozgás egyensúlyi helyzete a rugó nyugalmi hosszánál van. Vegyük fel az x tengelyt úgy, hogy x=0 az $\ell_0$ nyugalmi hossznál legyen, és x pozitív iránya mutasson a megnyújtott állapot irányába, vagyis x>0, ha megnyújtottuk, illetve x<0, ha összenyomtuk.
A rugóerő képlete az x megnyúlással felírva
vektorként:

$\mathbf{F_r} = -kx\mathbf{i}$ ,

skalárként

$F_r = -kx$.

A negatív előjel azt jelenti, hogy a rugó által kifejtett erő mindig ellentétes irányba mutat azzal, amerre a test elmozdul a rugó nyugalmi állapotának megfelelő ponthoz képest, mert a rugóerő mindig a rugó eredeti hosszát próbálja visszaállítani.

**Harmonikus rezgőmozgás kinematikája**

A kitérés

$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0)$, ahol

A: amplitúdó, a kitérés maximális értéke [m];

$\omega t+\varphi_0 = \varphi(t)$: fázis [rad], azaz dimenziómentes;

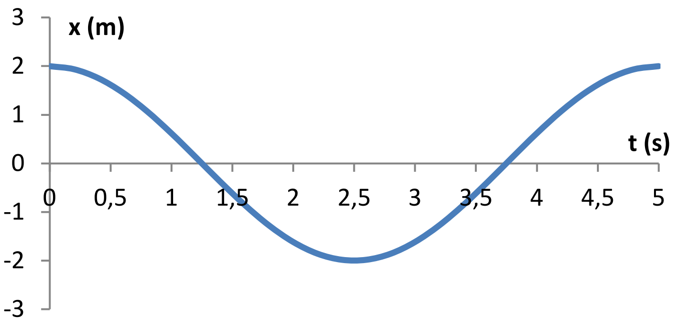
$\omega$: körfrekvencia [s$^{-1}$], $\omega = 2\pi\cdot f = \frac{2\pi}{T}$

T: periódusidő [s]

f: frekvencia [Hz], f = 1/T (jelölése sokszor f helyett $\nu$)

$\varphi_0$: kezdőfázis, fázisállandó [rad]; ez a fázis értéke a t=0 pillanatban.

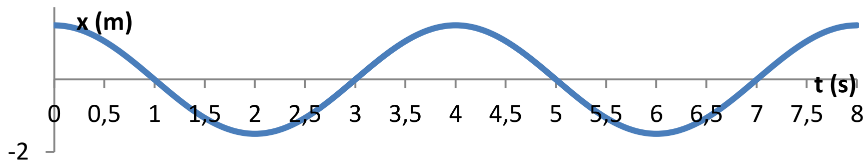
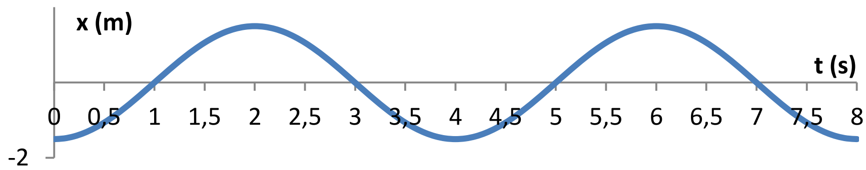
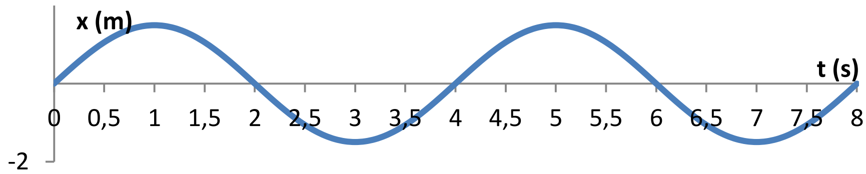
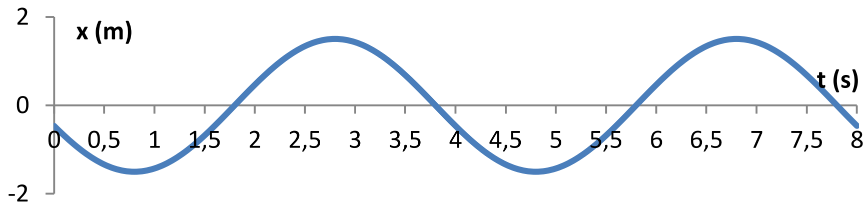
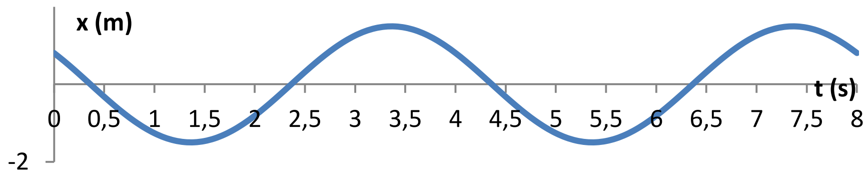
<u>Megjegyzés</u>: A kitérés felírható $x(t) = A\sin(\omega t+\varphi_0')$ alakban is, mivel a sin és cos függvények $\pi/2$ fázistolással egymásba alakíthatók. Az $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0)$ alakban való felírás előnyét későbbi feladatokban fogjuk látni.




Pl. itt A = 2 m; $\varphi_0 = 0$; T = 5 s $\rightarrow$ f = 1/5 = 0,2 Hz; $\omega = 2\pi/5 = 0{,}4\pi = 1{,}257\ s^{-1}$.

$x(t) = 2\cos(0{,}4\pi\, t)$ [m].

Rezgés különböző fázisállandókkal:

| $\varphi_0$ | |
|---|---|
| 0 |   |
| $\pi$ |   |
| $3\pi/2$ |   |
| $0{,}6\ \pi$ |   |
| 1 |   |

Azonos fázis: nemcsak x értéke egyezik meg, hanem v értéke is! (Adott kitérésnél közeledik-e az egyensúlyi helyzethez vagy távolodik tőle.)

A sebesség

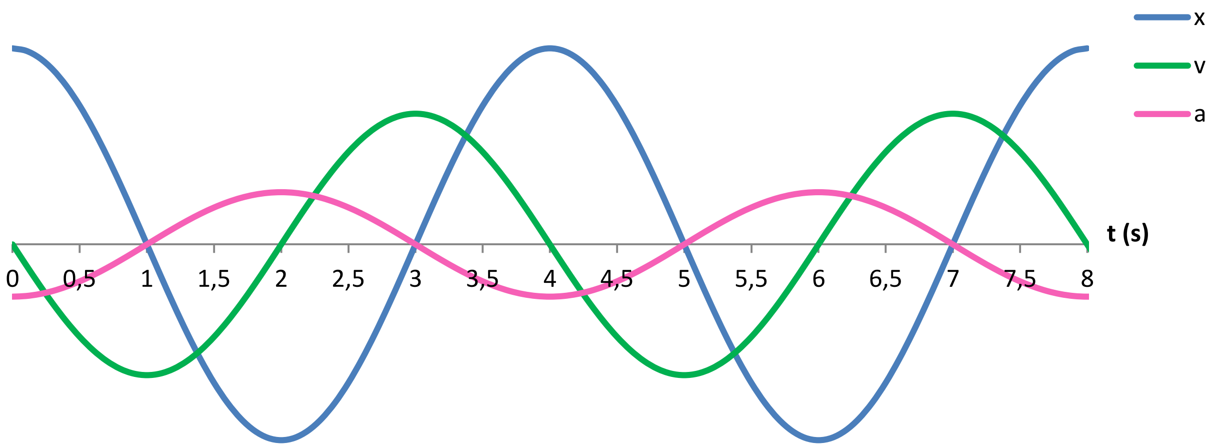
$v(t) = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t+\varphi_0)$;

a sebesség maximális értéke $v_{max} = A\omega$, amit a test $x = 0$ esetén vesz fel.

A gyorsulás

$a(t) = \dot{v} = -A\omega^2 \cos(\omega t+\varphi_0)$;

a gyorsulás maximális értéke $a_{max} = A\omega^2$.




Az ábrán $T = 4$ s; $\omega = \pi/2\ s^{-1}$; az x [m], v [m/s], ill. a [m/s$^2$] függőleges tengely nincs skálázva.

Láthatjuk, hogy

$a(t) = -\omega^2 x(t)$,

a kitérés és a gyorsulás ellentétes irányúak,

ez jellemzi a harmonikus rezgőmozgást.

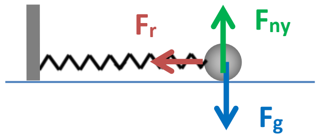
A maximális sebességet az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor éri el a test, ekkor $v_{max} = A\omega$.

**Csillapítatlan szabadrezgés**

Rugó végéhez rögzített test **vízszintes**, súrlódásmentes síkon:

A mozgásegyenlet:

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_r} + \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}}$




A függőleges erők eredője zérus:

$ma_z = F_{ny} - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg.$

Vízszintes síkban a rugóerő hat a testre:

$ma_x = F_r,$

így az x koordinátára, azaz a rugó megnyúlására felírható mozgásegyenlet:

$m\ddot{x} = -kx$ .

Ennek a másodrendű differenciálegyenletnek a megoldása az x(t) függvény, és az x(t) függvényből deriválással előállítható a v(t) függvény. A függvények felírásához persze szükséges a kezdeti értékek ismerete is ($x_0$ és $v_0$, ill. x és v értéke egy adott időpontban).

A differenciálegyenletet nem fogjuk megoldani, hanem megmutatjuk, hogy a megoldás harmonikus rezgőmozgást ír le.

Harmonikus rezgőmozgást végző test esetén a kitérés függvénye:

$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0)$ .

Kérdés, hogy a létrejövő rezgőmozgás A amplitúdója, $\omega$ körfrekvenciája és $\varphi_0$ fázisállandója mitől és hogyan függ.

Ezeket abból tudjuk meghatározni, hogy a gyorsulás felírható

– egyrészt az x(t) deriválásával:

$v(t) = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t+\varphi_0)$

$a(t) = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t+\varphi_0)$ , azaz: $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ;

– másrészt a mozgásegyenletből:

$m\ddot{x} = -kx \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -(k/m)\, x$ .

Ezek összevetésével látható, hogy $\omega^2 = k/m$ ;

$\rightarrow$ a körfrekvencia

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

és mivel $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ezért a periódusidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

A körfrekvencia és a periódusidő tehát a rugóállandótól és a rugó végéhez rögzített tömegtől függ.

Az A amplitúdó és $\varphi_0$ fázisállandó értékét pedig az $x_0$ kezdeti kitérés és a $v_0$ kezdeti sebesség határozza meg:

$x(0) = A\cos(\omega\cdot 0+\varphi_0) = A\cos\varphi_0 = x_0$

$v(0) = -A\omega \sin(\omega\cdot 0+\varphi_0) = -A\omega \sin\varphi_0 = v_0$

Az egyenletrendszerből kifejezhető

az amplitúdó: (négyzetre emelés után a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot használva)

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2},$$

a fázisállandó: (a két egyenletet elosztva)

$$\varphi_0 = \text{arc tg}\left(-\frac{v_0}{\omega\, x_0}\right).$$

Figyelem! A fázisállandó meghatározásakor mindkét egyenletet ($x_0 = A\cos\varphi_0$ és $v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$) figyelembe kell venni, és vigyázni kell az előjelekre!

Pl. $x_0 = 0$, azaz $\cos\varphi_0 = 0$ esetén $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ vagy $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ is lehet.

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ esetén a test sebessége ( $v(0) = -A\omega\cdot\sin\frac{\pi}{2}$ ) negatív, azaz a rugó éppen nyomódik össze,

$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ esetén a test sebessége ( $v(0) = -A\omega\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$ ) viszont pozitív, azaz a rugó éppen nyúlik,

tehát $v_0$ előjele fogja eldönteni, hogy melyik a jó megoldás.

Ha a mozgást úgy indítjuk el, hogy egy adott $x_0$ kezdeti kitérésnél kezdősebesség nélkül elengedjük (azaz $v_0 = 0$), akkor $A = x_0$ és $\varphi_0 = 0$, tehát $x = A\cos(\omega t)$. Ezért előnyös a cos(…) alakú felírás.

A maximális sebességet az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor éri el a test, ekkor $v_{max} = A\omega$.

Energia-megmaradás (ld. később):

$$E_{mech} = ½\, kA^2 = ½\, mv_{max}^2 = ½\, kx^2 + ½\, mv^2 = \text{konst.}$$

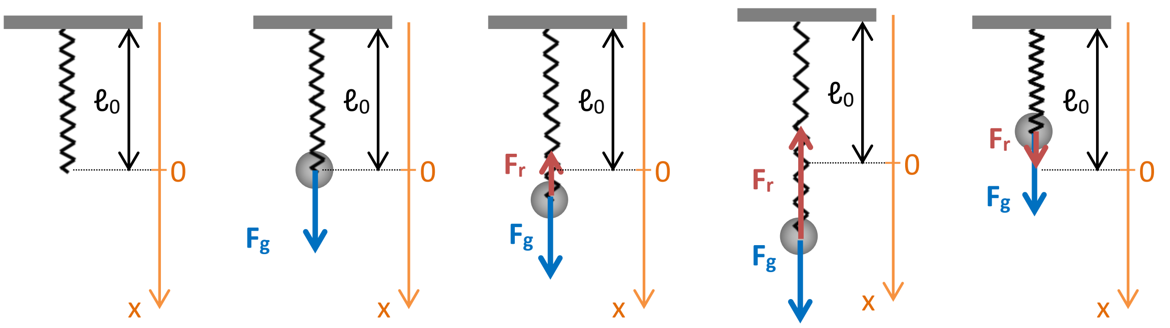
Rugó végéhez rögzített test **függőleges** helyzetben:

A mozgásegyenlet

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F_r} + \mathbf{F_g}$$

Most kivételesen nem a függőlegesen felfelé mutató z tengelyt vesszük fel, hanem a rugó megnyúlásának irányába, azaz lefelé irányított x tengelyt:

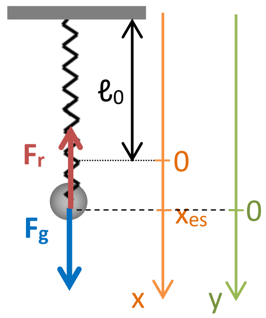
$m\ddot{x} = mg - kx$, ahol x a rugó megnyúlása a nyugalmi hosszhoz képest.




Olyan rezgés jön létre, aminek az egyensúlyi helyzete nem a rugó nyugalmi hosszánál van, hanem ott, ahol az eredő erő zérus:

$mg - k\cdot x_{es} = 0 \quad \rightarrow$

$x_{es} = mg/k$ megnyúlásnál lesz az egyensúlyi helyzet, amikor a rugó hossza $\ell_0 + x_{es}$.




Tehát az egyensúlyi helyzetben $\mathbf{F_e} = \mathbf{0}$; a többi helyzetben $\mathbf{F_g}$ és $\mathbf{F_r}$ eredője az egyensúlyi helyzet felé mutat.
A rugóerő a felső szélső helyzetben mutathat felfelé vagy lefelé is, attól függően, hogy a nyugalmi hossz alatt vagy felett van a test.

Vezessük be új változónak az egyensúlyi helyzettől való eltérést:

$y = x - x_{es} = x - mg/k$.

Ennek deriváltjai megegyeznek x deriváltjaival (mivel csak egy konstans köztük a különbség): $\ddot{y} = \ddot{x}$.
Az új változóval kifejezve az eredeti változót:

$x = y + mg/k$.

Írjuk be ezt a mozgásegyenletbe, és rendezzük:

$m\ddot{x} = m\ddot{y} = -kx + mg = -k(y + mg/k) + mg = -ky - mg + mg = -ky \quad \rightarrow$

$m\ddot{y} = -ky$ .

Tehát az egyensúlyi helyzettől (és nem a nyugalmi hossztól!) mért eltérésre ugyanolyan egyenletet kaptunk, mint vízszintes helyzetű rugó esetén. Ennek megoldása

$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ,

vagyis a rugó megnyúlása

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) + mg/k$ .

A rezgőmozgás körfrekvenciája és periódusideje ugyanannyi lesz, mint vízszintes elrendezés esetén, de az egyensúlyi helyzet nem a rugó nyugalmi hosszánál van, hanem az egyensúlyi megnyúlásnál. Az amplitúdót és a kezdőfázist a vízszintes helyzetben lévő rugóhoz hasonlóan kell meghatározni, csak $x_0$ helyett $y_0 = (x_0 - x_{es})$ -t kell beírni a képletekbe.

Energia-megmaradás (ld. később):
A helyzeti energiába egy $-mgx$ tagot is be kell venni (amit sokszor célszerű úgy választani, hogy a rugó $½kx^2$ energiájához hasonlóan ennek is a rugó nyugalmi hosszánál legyen zérus az értéke).

## Közegellenállás

A testre ható közegellenállási erő mindig ellentétes irányú a test sebességével, nagyságára pedig különböző esetekben különböző közelítéseket alkalmazunk. Mivel ilyenkor a testre ható erők nem állandó nagyságúak, a $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}t$ és $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}t + ½\,\mathbf{a}t^2$ képletek nem érvényesek, hanem az adott $\mathbf{a}(\mathbf{v})$ differenciálegyenlet megoldásával kaphatjuk meg a $\mathbf{v}(t)$ és $\mathbf{r}(t)$ függvényeket, ami nem mindig könnyű feladat. Könnyen kiszámolható viszont a test stacionárius (állandósult) sebessége (az a sebesség, aminél a test nem gyorsul, vagyis az eredő erő zérus).
A közegellenállási erőre alkalmazott közelítés

kis sebességeknél (lamináris áramlásnál) lineáris: $F_{közeg} = -b\,v$ ;

nagyobb sebességeknél (turbulens áramlásnál) négyzetes: $F_{közeg} = -c\,v^2$ .

**6/1.** Egy tömegpont harmonikus rezgőmozgást végez az x tengely mentén:

$x(t) = x^* \cdot \cos(\omega \cdot t + \pi)$ , ahol $x^* = -2$ m, $\omega = \frac{2\pi}{5}\,s^{-1}$.

**a)** Ábrázoljuk a test x koordinátáját a [0, T] időintervallumban! (Mennyi a T periódusidő? Mekkora az A amplitúdó? Honnan indul a test a t = 0 s-ban?)

**b)** Mennyi a sebesség átlagértéke egy teljes periódusra?

**c)** Mennyi a sebesség nagyságának átlagértéke egy teljes periódusra?

**Megoldás**

**a)** Harmonikus rezgőmozgás esetén a kitérés az idő függvényében

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Helyettesítsük be a megadott értékeket a függvénybe:

$x(t) = -2\cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t + \pi\right)$ [m]

Alakítsuk át:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\pi) = \cos\alpha\cos\pi - \sin\alpha\sin\pi = \cos\alpha\cdot(-1) - \sin\alpha\cdot 0 = -\cos\alpha$,

tehát

$x(t) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\cdot t\right)$ [m]; a t idő s-ban értendő.

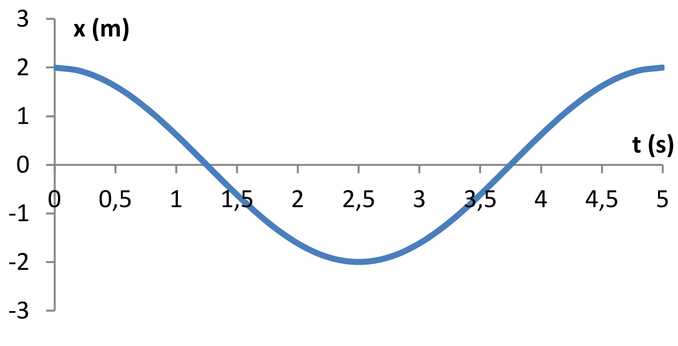
Látható, hogy az amplitúdó $A = |x^*| = 2$ m.

A periódusidőt a körfrekvenciából tudjuk kiszámolni:

$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5$ s.

Egy periódus, azaz T idő alatt a φ fázis 2π-vel nő: $\varphi(t+T) - \varphi(t) = \left(\frac{2\pi}{T}\cdot(t+T)+\varphi_0\right) - \left(\frac{2\pi}{T} t+\varphi_0\right) = 2\pi$.

A test a t = 0-ban az $x(0) = x^*\cos(\pi) = -x^* = 2$ m pontból indul.




**b)** Az átlagsebesség

$\bar{v} = v_{átl} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$,

egy periódusra nézve

$v_{átl} = \frac{x(T)-x(0)}{T} = 0$, mivel a függvény T szerint periodikus.

**c)** A sebesség abszolút értékének az átlaga

$$\overline{|v|} = |v|_{\text{átl}} = \frac{s}{\Delta t}\,.$$

A rezgőmozgást végző test egy periódus alatt kétszer teszi meg oda-vissza a távolságot az egyensúlyi helyzet és a maximális kitérés között, vagyis az összes megtett út az amplitúdó négyszerese:

$$\overline{|v|} = |v|_{\text{átl}} = \frac{4A}{T} = \frac{4\cdot 2}{5} = 1{,}6 \text{ m/s}.$$

**6/2.** Vízszintes, súrlódásmentes asztalon a rugó végéhez rögzített m = 100 g tömegű golyó 10 cm-rel való kihúzásához 1 N erőre van szükség.

**a)** A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?

**b)** Mekkora a golyó sebessége a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor?

**c)** Az elengedés után 2 s múlva hol lesz a golyó?

**d)** Mekkora ebben a pillanatban a kinetikus energia?

**Megoldás**

**a)** A rezgőmozgás periódusidejét a rugóállandó és a rugó végéhez erősített test tömege határozza meg (ld. a bevezetést):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

A rugóállandót abból tudjuk kiszámolni, hogy F = 1 N erő kell ahhoz, hogy $x = \ell - \ell_0$ = 10 cm = 0,1 m-rel kihúzzuk a rugót.

A rugóerő képlete $F_r = -k\cdot x$, ahol k a rugóállandó, és x a rugó megnyúlása az $\ell_0$ nyugalmi hosszhoz képest: $x = \ell - \ell_0$.

Az általunk kifejtett erő éppen ellentétes a rugó által kifejtett erővel, $F = -F_r$, tehát

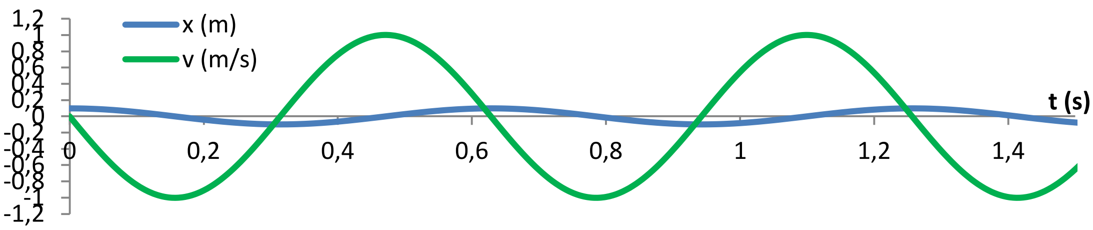
$k = F / x = 1 / 0{,}1 = 10 \text{ N/m} = 10 \text{ kg/s}^2$ (a rugóállandó nem negatív!)

Behelyettesítve az adatokat

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1 \text{ kg}}{10 \text{ kg/s}^2}} = 2\pi\sqrt{0{,}01 \text{ s}^2} = 0{,}2\pi \text{ s} = 0{,}6283 \text{ s}\,.$$

**b)** A rezgőmozgást végző test sebessége

$$v(t) = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t+\varphi_0)$$




A sebesség akkor a legnagyobb, amikor a test az egyensúlyi helyzeten halad át, nagysága ekkor

$$v_{max} = A\omega\,.$$

A körfrekvencia

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}1}} = 10 \text{ s}^{-1}\,.$$

A rezgés amplitúdóját onnan tudjuk, hogy a rezgést úgy indítottuk el, hogy 10 cm-rel kihúzva a rugót kezdősebesség nélkül elengedtük, vagyis $x_0 = x(0) = 0{,}1$ m és $v_0 = v(0) = 0$, tehát

$x(0) = A\cos(\omega \cdot 0+\varphi_0) = A\cos\varphi_0 = x_0 = 0{,}1$ (m);

$v(0) = -A\omega\sin(\omega \cdot 0+\varphi_0) = -A\omega\sin\varphi_0 = v_0 = 0$.

A második egyenletből $\sin\varphi_0 = 0 \;\; \rightarrow \;\; \varphi_0 = 0$ vagy $\varphi_0 = \pi$ lehet a fázisállandó értéke.

Az első egyenlet

$\varphi_0 = 0$ esetén $\quad x(0) = A\cos\varphi_0 = A\cos 0 = A$,

$\varphi_0 = \pi$ esetén $\quad x(0) = A\cos\varphi_0 = A\cos\pi = -A$.

Tudjuk, hogy a rezgést úgy indítottuk el, hogy a rugó meg volt húzva, vagyis $x(0) > 0$, tehát a fázisállandó $\varphi_0 = 0$:

$x(t) = A\cos(\omega t)$ .

Az amplitúdót pedig a t=0 -ra felírt egyenletből olvashatjuk ki:

$x(0) = A\cos(0) = A = x_0 = 0{,}1 \text{ m} \quad \rightarrow \quad A = 0{,}1 \text{ m}$.

Tehát a kitérés ω, $\varphi_0$ és A behelyettesítésével

$x(t) = 0{,}1\cos(10t)$ [m].

Természetesen ugyanezt adná a bevezetőben levezetett összefüggésekbe való behelyettesítés:

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{0}{10\cdot 0{,}1}\right) = \operatorname{arc\,tg}(0) = 0\ ,$$

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0{,}1^2 + \left(\frac{0}{10}\right)^2} = 0{,}1 \text{ m}\ ,$$

azonban ez a számolás feleslegesen bonyolult.

Olyan esetben, amikor a rezgést úgy indítjuk el, hogy a rugót meghúzzuk, majd kezdősebesség nélkül elengedjük, $A = x_0$, és ha az x(t) függvényt $\cos(\omega t+\varphi_0)$ alakban írjuk fel, akkor $\varphi_0 = 0$, ezért előnyösebb a cos(…) függvény választása a sin(…) függvény helyett.

A kérdés a test sebessége volt a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor, vagyis a maximális sebessége volt:

$v_{max} = A\omega = 0{,}1 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 1$ m/s.

**c)** A test kitérése

$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0) = 0{,}1\cos(10t)$ [m],

t = 2 s-ban

$x(2) = 0{,}1\cos(10\cdot 2) = 0{,}04081 \text{ m} = 4{,}081$ cm. RADIÁNBAN KELL SZÁMOLNI!

**d)** A kinetikus (mozgási) energia

$E_{kin} = ½\, mv^2$ .

A test sebessége az idő függvényében

$v(t) = -0{,}1\cdot 10\sin(10t) = -\sin(10t)$ [m/s].

t = 2 s-ban

$v(2) = -\sin(20) = -0{,}9129$ m/s .

A kinetikus energia az adott pillanatban

$E_{kin}(2) = ½ \cdot 0{,}1\cdot(-0{,}9129)^2 = 0{,}04167$ J.

Megjegyzés: Mivel a rugóerő konzervatív erő, a kinetikus energia kiszámolható energiamegmaradással is (ezt majd az adott gyakorlat után érdemes megnézni):

$$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} = ½\,kx^2 + ½\,mv^2 = \text{konst.}$$

A konstans értékét onnan tudjuk, hogy a szélső helyzetekben $|x| = A$ és $v = 0$:

$$E_{mech} = E_{pot,A} + E_{kin,A} = ½\,kA^2$$

Energiamegmaradással a test helyének ismeretében egy lépésben (az idő kiszámolása nélkül) ki tudjuk számolni a kérdéses kinetikus energiát:

$$½\,kx^2 + E_{kin} = ½\,kA^2 \quad \rightarrow$$

$$E_{kin} = ½\,kA^2 - ½\,kx^2 = ½\,k(A^2 - x^2) = 0{,}5 \cdot 10(0{,}1^2 - 0{,}04081^2) = 0{,}04167 \text{ J.}$$

Ugyanígy egy lépésben ki tudnánk számolni a test sebességének a nagyságát az adott helyen:

$$½\,kx^2 + ½\,mv^2 = ½\,kA^2$$

$$\rightarrow \quad v^2 = k(A^2 - x^2)/m = 10(0{,}1^2 - 0{,}04081^2)/0{,}1 = 0{,}8335 \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad v = 0{,}9129 \text{ m/s.}$$

$$E_{kin} = ½\,mv^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8335 = 0{,}04167 \text{ J.}$$

Energia-megmaradással egyébként a maximális sebesség is könnyen számolható, mivel a nyugalmi hosszon való áthaladáskor $x = 0$ és $v = v_{max} = A\omega$

$$E_{mech} = ½\,kA^2 = E_{pot,0} + E_{kin,0} = 0 + ½\,mv_{max}^2 \quad \rightarrow \quad v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = A\omega\,.$$

**6/3.** Van egy $\ell_0$ = 32 cm hosszú, k = 8,4 N/m rugóállandójú rugónk. Ezt a rugót függőlegesen fellógatjuk, és a végére akasztunk egy m tömegű testet, majd meghúzzuk lefelé, hogy a hossza

**A**: 50 cm; **B**: 52 cm; **C**: 54 cm legyen,

elengedjük, és megmérjük a rezgés periódusidejét: $T = 0{,}2\pi$ s $(T \approx 0{,}6283$ s).

**a)** Mekkora a rugó végére akasztott test tömege?

**b)** Mekkora a rezgés amplitúdója?

**c)** Számoljuk ki a testre ható erőket és az eredő erőt a rezgőmozgás alsó és felső pontjában!

**Megoldás**

**a)** A tömeg kiszámolható a rezgésidőből, mivel k értéke ismert:

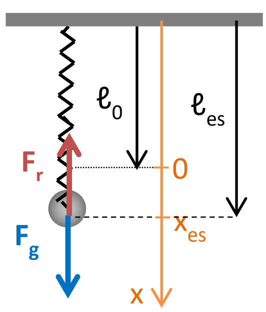
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \rightarrow \quad m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 8{,}4\left(\frac{0{,}2\pi}{2\pi}\right)^2 = 0{,}084 \text{ kg.}$$

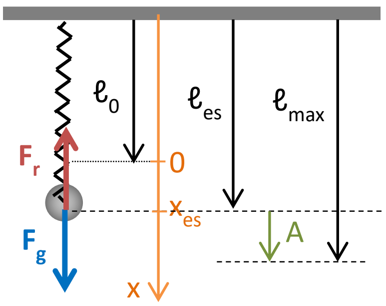
**b)** Függőleges helyzetben a rezgőmozgás egyensúlyi helyzete (amire szimmetrikus a rezgőmozgás) nem a rugó nyugalmi hossza lesz, hanem az a helyzet, ahol akkora a rugó megnyúlása, hogy az eredő erő zérus legyen:

$$k \cdot x_{es} = mg \quad \rightarrow \quad x_{es} = mg/k = 0{,}084 \cdot 10/8{,}4 \text{ m} = 0{,}1 \text{ m} = 10 \text{ cm.}$$

A rugó az egyensúlyi helyzetben

$$\ell_{es} = \ell_0 + x_{es} = 0{,}32 + 0{,}10 = 0{,}42 \text{ m} = 42 \text{ cm hosszú.}$$






A rezgőmozgást úgy indítottuk el, hogy a rugót kihúztuk, és abból a helyzetből kezdősebesség nélkül engedtük el, vagyis ekkor a leghosszabb a rugó, elengedéskor a rugó hossza $\ell_{max}$.
Az amplitúdó a legnagyobb megnyúlás, vagyis a legnagyobb hossz és az egyensúlyi helyzetnek megfelelő hossz (nem a nyugalmi hossz!) különbsége:

$$A = \ell_{max} - \ell_{es}\ .$$

Behelyettesítve az értékeket:

**A**: $A = 0{,}50 - 0{,}42 = 0{,}08$ m; **B**: $A = 0{,}52 - 0{,}42 = 0{,}10$ m; **C**: $A = 0{,}54 - 0{,}42 = 0{,}12$ m.

A rezgőmozgás egyensúlyi helyzete tehát $\ell_{es}$, erre szimmetrikusan végez a test rezgőmozgást, a szélső helyzetek $\ell_{max} = \ell_{es} + A$ és $\ell_{min} = \ell_{es} - A$.

**c)** A testre ható erők:

- a nehézségi erő: $F_g = mg = 0{,}084 \cdot 10 = 0{,}84$ N, lefelé mutat, ez most pozitív előjelű lesz, mivel a rugó miatt lefelé irányított x tengelyt vettünk fel;
- a rugóerő: $F_r = -k \cdot \Delta\ell$, a rugó nyugalmi hosszának megfelelő pont felé mutat; előjele negatív, ha a rugó meg van nyúlva, de lehet pozitív is, ha a rezgés felső helyzetében a rugó összenyomódik a nyugalmi hosszához képest.

A $\Delta\ell$ megnyúlás az aktuális pozíció és a rugó nyugalmi hosszának különbsége.

Az alsó helyzetben a rugó megnyúlása $\Delta\ell_{alsó} = \ell_{max} - \ell_0$ ( $= \ell_{es} + A - \ell_0$ ). Behelyettesítve:

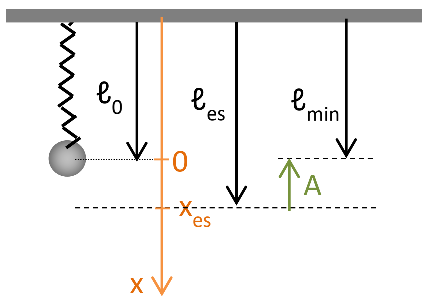
**A**: $\Delta\ell_{alsó} = 0{,}50 - 0{,}32 = 0{,}18$ m; **B**: $\Delta\ell_{alsó} = 0{,}52 - 0{,}32 = 0{,}20$ m; **C**: $\Delta\ell_{alsó} = 0{,}54 - 0{,}32 = 0{,}22$ m.

A rugóerő: $F_r = -k \cdot \Delta\ell$

**A**: $F_r = -8{,}4 \cdot 0{,}18 = -1{,}512$ N; **B**: $F_r = -8{,}4 \cdot 0{,}20 = -1{,}680$ N; **C**: $F_r = -8{,}4 \cdot 0{,}22 = -1{,}848$ N;

az eredő erő: $\mathbf{F_e} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_r}$

**A**: $F_e = 0{,}840 - 1{,}512 = -0{,}672$ N; **B**: $F_e = 0{,}840 - 1{,}680 = -0{,}840$ N; **C**: $F_e = 0{,}840 - 1{,}848 = -1{,}008$ N.




A rugó hossza a felső pontban $\ell_{min} = \ell_{es} - A$:

**A**: $\ell_{min} = 0{,}42 - 0{,}08 = 0{,}34$ m; **B**: $\ell_{min} = 0{,}42 - 0{,}10 = 0{,}32$ m;

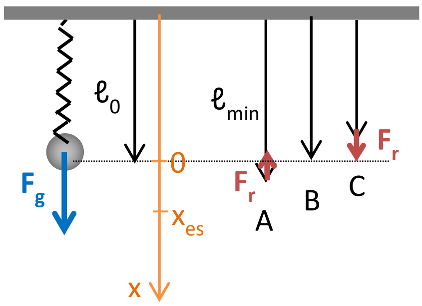
**C**: $\ell_{min} = 0{,}42 - 0{,}12 = 0{,}30$ m;

a megnyúlása $\Delta\ell_{felső} = \ell_{min} - \ell_0$ ( $= \ell_{es} - A - \ell_0$ )

**A**: $\Delta\ell_{felső} = 0{,}34 - 0{,}32 = 0{,}02$ m; **B**: $\Delta\ell_{felső} = 0{,}32 - 0{,}32 = 0$ m;

**C**: $\Delta\ell_{felső} = 0{,}30 - 0{,}32 = -0{,}02$ m.

Az **A** esetben a rugó meg van nyúlva a rezgés felső pontjában is; a **B** esetben a rezgés felső pontja éppen a rugó nyugalmi hosszánál van; a **C** esetben a rezgés felső pontjában a rugó össze van nyomódva; ezért a rugó által a testre kifejtett erő az **A** esetben felfelé mutat, a **B** esetben zérus, a **C** esetben lefelé mutat.




A rugóerő:

**A**: $F_r = -8{,}4 \cdot 0{,}02 = -0{,}168$ N; **B**: $F_r = -8{,}4 \cdot 0 = 0$ N;

**C**: $F_r = -8{,}4 \cdot (-0{,}02) = 0{,}168$ N;

az eredő erő:

**A**: $F_e$ = 0,840–0,168 = 0,672 N; **B**: $F_e$ = 0,840+0 = 0,840 N; **C**: $F_e$ = 0,840+0,168 = 1,008 N.
Látható, hogy az eredő erő nagysága megegyezik a rezgés alsó és felső pontjában. Az eredő erő és a gyorsulás szimmetrikus az egyensúlyi helyzetre.

Összefoglalva:

| | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| $\ell(0)$ | 0,50 m | 0,52 m | 0,54 m |
| $\ell_{es}$ | 0,42 m | 0,42 m | 0,42 m |
| $A = \ell(0) - \ell_{es}$ | 0,08 m | 0,10 m | 0,12 m |
| | | | |
| $\ell_{min} = \ell_{es} - A$ | 0,34 m | 0,32 m | 0,30 m |
| $\Delta\ell_{min} = \ell_{min} - \ell_0$ | 0,02 m | 0 | –0,02 m |
| | (meg van nyúlva) | (éppen $\ell_0$) | (össze van nyomódva) |
| $F_{rugó,\ fent} = -k\ \Delta\ell_{min}$ | –0,168 N | 0 | +0,168 N |
| | (azaz felfelé) | | (azaz lefelé) |
| mg | +0,84 N | +0,84 N | +0,84 N |
| $F_{eredő,\ fent} = F_{rugó,fent} + mg$ | +0,672 N | +0,84 N | +1,008 N |
| | | | |
| $\ell_{max} = \ell_{es} + A \quad = \ell(0)$ | 0,50 m | 0,52 m | 0,54 m |
| $\Delta\ell_{max} = \ell_{max} - \ell_0$ | 0,18 m | 0,20 m | 0,22 m |
| $F_{rugó,\ lent} = -k\ \Delta\ell_{max}$ | –1,512 N | –1,68 N | –1,848 N |
| mg | +0,84 N | +0,84 N | +0,84 N |
| $F_{eredő,\ lent} = F_{rugó,lent} + mg$ | –0,672 N | –0,84 N | –1,008 N |

**A KÖZEGELLENÁLLÁSOS FELADATOKNÁL CSAK A NEM SZÜRKE RÉSZEK KELLENEK A ZH-RA!**

**6/4. a)** Mekkora út megtétele után áll meg egy vízszintes úton haladó Polski Fiat a motor kikapcsolása után, ha rá a súrlódási erőn kívül a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő is hat? Írjuk fel a Polski Fiat mozgásegyenletét!
A gépkocsi tömege m = 650 kg, sebessége a motor kikapcsolásának pillanatában $v_0$ = 80 km/h, a súrlódási együttható $\mu$ = 0,015; a közegellenállási erő 40 km/h sebességnél 54 N.
**b)** Milyen húzóerőt képes a gépkocsi motorja kifejteni, ha a maximális sebesség 100 km/h?

**Megoldás**

**a)** Az autóra ható erők: $\mathbf{F_g}$ nehézségi erő, $\mathbf{F_{ny}}$ az út által kifejtett nyomóerő, $\mathbf{F_{motor}}$ a motor által kifejtett húzóerő (ami a kerekek és az út közötti tapadási súrlódási erő révén fejti ki hatását), $\mathbf{F_s}$ súrlódási erő (gördülési ellenállás), $\mathbf{F_{közeg}}$ közegellenállási erő, tehát a mozgásegyenlete vektori alakban

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_{motor}} + \mathbf{F_s} + \mathbf{F_{közeg}}\ .$$

A mozgásegyenlet függőleges komponense

$$ma_z = F_{ny} - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg;$$

a vízszintes komponense

$$ma = F_{motor} - F_s - F_{közeg}\ .$$

A súrlódási erő nagysága

$$F_s = \mu F_{ny} = \mu mg = 0{,}015 \cdot 650 \cdot 10 = 97{,}5\ \text{N}.$$

A közegellenállási erő nagysága a sebesség négyzetével arányos: $F_{közeg} = cv^2$ .
A közegellenállási erőben szereplő c együttható értékét abból tudjuk meghatározni, hogy ismerjük az erő értékét egy adott sebességnél, v = 40 km/h = 40/3,6 m/s -nál:

$$c = F_{közeg} / v^2 = 54\ \text{kg m/s}^2 / (40/3{,}6\ \text{m/s})^2 = 0{,}4374\ \text{kg/m}.$$

Az autó mozgásegyenlete tehát

$$ma = m\dot{v} = F_{motor} - \mu mg - cv^2 = F_{motor} - 97{,}5 - 0{,}4374v^2\ .$$

Ha a motor ki van kapcsolva:

$$ma = m\dot{v} = -\mu mg - cv^2 = -97{,}5 - 0{,}4374v^2\ .$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása a v(t) függvény, ami azt írja le, hogyan változik a sebesség az idő függvényében, és a v(t) függvény integrálásával megkaphatnánk az s(t) függvényt, a megtett utat az idő függvényében. A sebességből ki tudnánk számolni, hogy mennyi idő alatt áll meg az autó, majd azt az időt be tudnánk helyettesíteni az s(t) függvénybe. A kérdés viszont megválaszolható az idő kiszámolása nélkül, ha meghatározzuk a v(s) függvényt, azaz, hogy hogyan változik a sebesség a megtett út függvényében. Alakítsuk át a differenciálegyenletet:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}\ ,$$

azaz

$$mv\frac{dv}{ds} = -\mu mg - cv^2\ .$$

Szeparáljuk és integráljuk:

$$\int 1\,ds = \int -\frac{mv}{\mu mg + cv^2}\,dv = -\frac{m}{2c}\int \frac{2v}{\mu mg/c + v^2}\,dv$$

$$\rightarrow \quad s = -\frac{m}{2c}\ln\left(\frac{\mu mg}{c} + v^2\right) + K.$$

Mivel s = 0 -nál v = $v_0$, ezért $K = \frac{m}{2c}\ln\left(\frac{\mu mg}{c} + {v_0}^2\right)$ .

Tehát

$$s = \frac{m}{2c}\ln\frac{\frac{\mu mg}{c}+{v_0}^2}{\frac{\mu mg}{c}+v^2}.$$

A megtett út, amíg megáll, azaz v = 0:

$$s = \frac{m}{2c}\ln\frac{\frac{\mu mg}{c}+{v_0}^2}{\frac{\mu mg}{c}} = \frac{m}{2c}\ln\left(1+\frac{c{v_0}^2}{\mu mg}\right) = 868\ \text{m}.$$

**b)** A mozgásegyenlet, ahogy az **a)** pontban felírtuk:

$ma = m\dot{v} = F_{motor} - \mu mg - cv^2$ .

Ha $F_{motor} > \mu mg + cv^2$, akkor az eredő erő pozitív, $\dot{v} > 0 \rightarrow$ az autó gyorsul, v nő. Ennek következtében a sebességének négyzetével arányosan nő a közegellenállási erő, tehát a közegellenállási erő egyre jobban fékezi az autót, emiatt a gyorsulása csökken, vagyis a sebessége egyre lassabban nő, majd elér egy olyan egyenletes sebességet, amivel az eredő erő (és a gyorsulás) zérus. Az ilyen sebességet **stacionárius** (állandósult) sebességnek hívjuk. Ez a sebesség kifejezhető az

$F_{motor} - \mu mg - c{v_{stac}}^2 = 0$ egyenletből.

Ugyanez a sebesség állandósul akkor is, ha egy adott pillanatban az autó gyorsabban halad, mint a stacionárius sebesség, mert ilyenkor

$F_{motor} < \mu mg + cv^2 \rightarrow \dot{v} < 0 \rightarrow$ a sebesség csökken, amíg $\dot{v} = 0$ lesz.

Ha a motor a maximális erőt fejti ki, akkor ez az autó maximális sebessége. Ilyenkor

$F_{motor,max} = \mu mg + c{v_{max}}^2 = 97{,}5 + 0{,}4374\cdot(100/3{,}6)^2 = 435$ N.

**6/5.** α = 30°-os lejtőn halad felfelé egy m = 30 t tömegű szerelvény. A légellenállás **F** = –b**v**, ahol b = 15000 kg/s; a súrlódás elhanyagolható.

**a)** Mennyi a mozdony húzóereje, ha a vonat sebessége állandó: $v_0$ = 54 km/h?

**b)** A mozdony motorja elromlik. Mennyi idő alatt és mekkora úton csökken nullára a vonat sebessége a $v_0$ = 54 km/h sebességről?

**c)** Mi történik ezután? Feltéve, hogy a lejtő nagyon hosszú, mennyi lesz a vonat végsebessége?

**Megoldás**

**a)** A mozgásegyenlet

$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{húzó} + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F}_{közeg}$,

a lejtőre merőleges komponense

$ma_\perp = F_{ny} - mg\cos\alpha \rightarrow F_{ny} = mg\cos\alpha$;

felfelé haladva a lejtővel párhuzamos komponense

$ma = F_{húzó} - mg\sin\alpha - bv$.

Amikor állandó $v_0$ = 54 km/h = 15 m/s sebességgel megy a vonat, a gyorsulás zérus, tehát

$F_{húzó} = mg\sin\alpha + bv_0 = 30\cdot10^3\cdot 10\cdot \sin30° + 15000\cdot 15 = 375000$ N = 375 kN.

**b)** $F_{húzó} = 0$, a mozgásegyenlet

$ma = m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\alpha - bv$ .

Szeparáljuk és integráljuk:

$$\int -\frac{m}{mg\sin\alpha+bv}dv = -\frac{m}{b}\int\frac{1}{mg\sin\alpha/b+v}dv = \int dt,$$

$$t = -\frac{m}{b}\ln\left(\frac{mg\sin\alpha}{b}+v\right)+K,$$

és mivel t = 0 -nál v = $v_0$, ezért $K = \frac{m}{b}\ln\left(\frac{mgsin\alpha}{b} + v_0\right)$,

tehát $t = -\frac{m}{b}\ln\frac{\frac{mgsin\alpha}{b}+v}{\frac{mgsin\alpha}{b}+v_0}$, azaz

$v(t) = \left(\frac{mgsin\alpha}{b} + v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mgsin\alpha}{b}$ .

Mikor áll meg? v = 0, ha $t = \frac{m}{b}\ln\left(\frac{bv_0}{mgsin\alpha} + 1\right)$ = 1,833 s.

Mekkora utat tesz meg, amíg megáll?

Integráljuk a v(t) függvényt: $s = \frac{m}{b}\left(\frac{mgsin\alpha}{b} + v_0\right)\cdot\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) - \frac{mgsin\alpha}{b}t.$

Behelyettesítve s = 11,67 m.

**c)**

A vonat sebességét a v(t) függvény megadja a pillanatnyi megállás utánra is:

látható, hogy t $\to \infty$ esetén $e^{-\frac{b}{m}t} \to 0$, így $v \to -\frac{mgsin\alpha}{b} = v_{stac}$,

behelyettesítve $v_{stac}$ = –10 m/s. Negatív értéket kapunk, mert a vonat sebessége a lejtőn lefelé mutat, a pozitív irány viszont a lejtőn felfelé mutat.

Tehát a vonat $v_{stac}$ = 10 m/s = 36 km/h nagyságú állandósult sebességgel megy majd lefelé a lejtőn.

A stacionárius sebesség kifejezhető a mozgásegyenletből is.

A mozdony nem működik, azaz $F_{húzó}$ = 0, a mozgásegyenlet

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_{közeg}}$ .

A lejtő irányú komponens felírásakor el kell döntenünk, melyik irányt választjuk pozitívnak. Mivel ebben a feladatban lineáris a közegellenállás, ezért pozitív iránynak bármelyik irányt választhatjuk (akár a lejtőn felfelé, akár a lejtőn lefelé mutató irányt), mivel lineáris függvényben nem vész el a sebesség előjele.

Lefelé mutató irányt választva:

$ma = mgsin\alpha - bv$ ;

felfelé mutató irányt választva:

$ma = -mgsin\alpha - bv$ .

Stacionárius esetben a = 0:

lefelé mutató irányt választva:

$mgsin\alpha - bv_{stac} = 0 \quad \to \quad v_{stac} = mgsin\alpha / b = 30\cdot10^3\cdot10\cdot\sin30° / 15000 = 10$ m/s = 36 km/h;

felfelé mutató irányt választva:

$-mgsin\alpha - bv_{stac} = 0 \quad \to \quad v_{stac} = -mgsin\alpha / b = -10$ m/s = –36 km/h.

Négyzetes közegellenállás esetén viszont a pozitív irányt mindig a sebesség irányába kell felvenni.

**Gyakorló feladatok a zh-ra**

**6/6.** Vízszintes, súrlódásmentes síkon egy rugó végére m = 1 kg tömegű golyót rögzítettünk. A rugó másik vége rögzítve van. A 45 cm-es rugó 20 cm-rel való kihúzásához 5 N erőre van szükség.
**a)** A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?
**b)** Írjuk fel a golyó kitérését az idő függvényében!
**c)** Mekkora a golyó maximális sebessége?
**d)** Mekkora a golyó gyorsulása 10 s-mal a golyó elengedése után?

**Megoldás**
**a)**
$F_r = -kx$, $F_r$ ellenében F = 5 N erőt kell kifejtenünk x = 20 cm = 0,2 m -es megnyúláshoz
$\rightarrow$ k = F / x = 5 / 0,2 = 25 N/m.
$\omega = \sqrt{k/m} = 5\ s^{-1}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{5} = 1{,}257$ s .
**b)** $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0)$
A golyót egyszerűen elengedjük, $v_0 = 0$ $\rightarrow$ $\varphi_0 = 0$ és $A = x_0$,
tehát A = 0,2 m, $x(t) = 0{,}2\cos(5t)$ [m]
**c)** $v_{max} = A\omega = 0{,}2\cdot 5 = 1$ m/s
**d)** $v(t) = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$
$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2\cdot x(t) = -5^2\cdot 0{,}2\cdot\cos(5t) = -5\cos(5t)$ [m/s$^2$]
$a(10) = -5\cdot\cos(5\cdot 10) = -4{,}825$ m/s$^2$

**6/7.** Egy 42 cm hosszú, 8 N/m rugóállandójú rugó végéhez rögzítünk egy 12,5 dkg tömegű testet. Írjuk fel a test kitérését az idő függvényében (a körfrekvencia, amplitúdó, kezdőfázis kiszámolásával), ha
**a)** vízszintes, súrlódásmentes síkon rögzítjük a rugó végét, majd a rugót 10 cm-rel kihúzzuk, és úgy engedjük el, hogy a testnek 0,8 m/s kezdősebességet adunk az egyensúlyi helyzete felé;
**b)** a rugó végét a plafonhoz rögzítjük, és kezdősebesség nélkül elengedjük a testet úgy, hogy a rugó hossza éppen a nyugalmi hossz! (a rugó függőleges)
Írjuk fel a rugó hosszát is (a rugó rögzítési pontjától mérve) mindkét esetben!

**Megoldás**
**a)** A rezgés egyensúlyi helyzete a rugó nyújtatlan állapotánál van ($\ell_0$ = 42 cm-nél), x a rugó megnyúlása, ami egyben az egyensúlyi helyzettől való eltérés. A mozgásegyenlet
$ma = m\ddot{x} = -kx$ , és a megoldása $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0)$.
A körfrekvencia $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{8/0{,}125} = 8\ s^{-1}$.
A kitérés:
$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0) = A\cos(8t+\varphi_0)$ ,
a sebesség:
$v(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0) = -8A\sin(8t+\varphi_0)$.

A kezdeti feltételek:

$x_0 = 0{,}1$ m és

$v_0 = -0{,}8$ m/s (a kezdősebesség negatív, mivel a rugó a megnyújtott állapotából a nyugalmi állapota felé halad, tehát a hossza csökken).

Behelyettesítve

$x(0) = A\cos(8\cdot 0+\varphi_0) = 0{,}1$ és

$v(0) = -8A\sin(8\cdot 0+\varphi_0) = -0{,}8.$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk meg A és $\varphi_0$ értékét:

az első egyenletből $A\cos(\varphi_0) = 0{,}1$ a másodikból $A\sin(\varphi_0) = 0{,}1$

$\rightarrow$ a négyzeteik összegéből $A = 0{,}1\cdot\sqrt{2} = 0{,}1414$ m, és

$\rightarrow$ a hányadosukból $\varphi_0 = \mathrm{arc\,tg}(1) = \pi/4 = 0{,}7854$ rad vagy $5\pi/4 = 3{,}927$ rad.

A $v(0) = -8A\sin(8\cdot 0+\varphi_0) = -0{,}8$ egyenletből látjuk, hogy $\sin(\varphi_0)$-nak pozitívnak kell lenni.

$\sin(\pi/4) = 0{,}7071 > 0$, $\sin(5\pi/4) = -0{,}7071 < 0$, tehát $\varphi_0 = \pi/4 = 0{,}7854$ rad.

A test kitérése

$x(t) = 0{,}1\sqrt{2}\cos(8t + \pi/4) = 0{,}1414\cos(8t + 0{,}7854)$ [m].

A rugó hossza $\ell_0 = 42$ cm $= 0{,}42$ m-rel hosszabb, azaz $\ell(t) = \ell_0 + x(t)$:

$\ell(t) = 0{,}42 + 0{,}1\sqrt{2}\cos(8t + \pi/4) = 0{,}42 + 0{,}1414\cos(8t + 0{,}7854)$ [m].

**b)** A rezgés egyensúlyi helyzete most nem a nyújtatlan állapot, hanem az egyensúlyi megnyúlás. A mozgásegyenlet a rugó megnyúlásával felírva

$m\ddot{x} = mg - kx$ (x a rugó megnyúlása a nyugalmi hosszhoz képest)

Ahogy a bevezetőben meg a kidolgozott feladatban láttuk, függőleges helyzetű rugónál bevezetjük y-t, az egyensúlyi helyzettől való eltérést:

$y(t) = x(t) - x_{es}$ .

$x_{es}$ az egyensúlyi megnyúlás (a nyugalmi hosszhoz képest):

$mg - k\cdot x_{es} = 0 \quad\rightarrow\quad x_{es} = mg/k = 0{,}125\cdot 10/8 = 0{,}15625$ m $= 15{,}625$ cm.

Az egyensúlyi helyzettől mért eltérés:

$y(t) = x(t) - x_{es} = x(t) - 0{,}15625$ [m] .

A körfrekvencia ugyanannyi lesz a függőleges rezgésnél is, mint a vízszintesnél, $\omega = 8\ s^{-1}$.

A kezdeti értékek az y(t) függvényhez:

$y_0 = -0{,}15625$ m, mivel a nyugalmi hossznál engedjük el a testet, $x_0 = 0$-nál;

$v_0 = 0$.

Behelyettesítve

$y(0) = A\cos(8\cdot 0+\varphi_0) = -0{,}15625,$

$v(0) = -8A\sin(8\cdot 0+\varphi_0) = 0.$

A sebességből $\sin\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0$ vagy $\pi$ ;

a kitérésből $y(0) = A\cos\varphi_0 = -0{,}15625 \quad\rightarrow\quad A = 0{,}15625$ m,

és $\cos\varphi_0 < 0$, tehát $\varphi_0 = \pi$ ($\varphi_0 = 0$ választással $y(0) = 0{,}15625$ m lenne, ami azt jelentené, hogy a rugó a nyugalmi hosszhoz képest $x(0) = y(0) + x_{es} = 2\cdot 0{,}15625$ m megnyúlással indulna.)

Az egyensúlyi helyzettől mért eltérés tehát

$y(t) = 0{,}15625\cos(8t+\pi)$ vagy: $y(t) = -0{,}15625\cos(8t)$ ;

a rugó hossza $\ell(t) = \ell_0 + x(t) = \ell_0 + y(t) + x_{es}$:

$\ell(t) = 0{,}57625 + 0{,}15625\cos(8t+\pi)$ vagy: $\ell(t) = 0{,}57625 - 0{,}15625\cos(8t)$.

**6/8.** Vízszintes, súrlódásmentes síkon egy rugó végére m = 1 kg tömegű golyót rögzítettünk. A rugó másik vége rögzítve van. A rugó 20 cm-re való kihúzásához 5 N erőre van szükség.

**a)** A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?

**b)** Mekkora a golyó sebessége a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor?

**Megoldás**

**a)** k = 25 N/m; T = 1,257 s; **b)** $v_{max}$ = ~~6,283~~ 1 m/s.

**6/9.** m tömegű golyót erősítünk k rugóállandójú rugóra. Az egyik végén rögzített rugó az x tengelyen van, egyensúlyi helyzete legyen az origó. A golyót t=0 időben $v_0$ kezdősebességgel meglökjük a –x tengely irányába, ezután az harmonikus rezgőmozgást végez.

**a)** Írjuk fel az x(t) függvényt a fenti mennyiségekkel kifejezve!

**b)** Határozzuk meg a gyorsulás átlagértékét az első fél periódusban!

**c)** Milyen összefüggés van a gyorsulás és x között? Ebből határozzuk meg az x kitérés átlagértékét az első fél periódusban!

**Megoldás**

**a)** $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0)$: ahol $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, és

a kezdeti feltételekből meghatározható A és $\varphi_0$:

t = 0-ban $x(0) = x_0 = 0$;

a kezdősebesség nagysága $v_0$, és a negatív irányba lökjük meg, vagyis $v(0) = -v_0 < 0$ , tehát

$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0$ és $-v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 < 0$

$\rightarrow$ az elsőből $\varphi_0 = \pi/2$ vagy $3\pi/2$

$\rightarrow$ a másodikból $\sin\varphi_0 > 0$ $\rightarrow$ $\varphi_0 = \pi/2$

$\rightarrow$ a másodikba visszahelyettesítve $\sin\varphi_0 = \sin(\pi/2) = -1$ -et: $A = \frac{v_0}{\omega}$

és behelyettesítve $\omega$ értékét: $A = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$

tehát $x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = -\,v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$

**b)** $v(t) = \dot{x} = -v_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$

$v_0$ a kezdősebesség nagysága (nem előjeles mennyiség), ami egyben a maximális sebesség is ( $v_0 = v_{max}$ ), mivel a test az egyensúlyi helyzetből indult.

t = 0-ban és a periódus felénél, t =T/2 -ben is az egyensúlyi helyzeten halad át, t = 0-ban negatív irányba, t =T/2 –ben pozitív irányba, tehát $v(0) = -v_0$ , $v(T/2) = +v_0$ .

(Ezt behelyettesítéssel is kiszámolhatnánk: $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, azaz $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ behelyettesítésével

$v\left(\frac{T}{2}\right) = -v_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right) = -v_0\cos(\pi) = v_0$ . )

Az átlagos gyorsulás egy fél periódusra:

$$\bar{a} = a_{átl} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(T/2)-v(0)}{T/2} = \frac{v_0-(-v_0)}{T/2} = \frac{2v_0}{T/2} = \frac{4v_0}{T}$$

**c)** $a(t) = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$ , azaz: $a(t) = -\,\omega^2 x(t)$ .

Kiszámoltuk, hogy az első fél periódusra $\bar{a} = \frac{4v_0}{T}$, ezért a kitérés átlagos értéke

$$\bar{x} = -\frac{\bar{a}}{\omega^2} = -\frac{4v_0}{T}\cdot\frac{1}{\omega^2} = -\frac{4v_0}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} = -\frac{4v_0}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\cdot\frac{m}{k} = -\frac{2}{\pi}\cdot v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

**6/10.** Egy $m = 80$ kg tömegű síelő $\alpha = 30°$-os, $\mu = 0,1$ súrlódási együtthatójú sípályán csúszik le. A síelőre ható közegellenállási erő a sebességének négyzetével arányos, az arányossági tényező $c = 1,2$ kg/m.

**a)** Írjuk fel a síelő mozgásegyenletét a lejtővel párhuzamos és arra merőleges komponensekre bontva!

**b)** Mekkora maximális sebességet érhet el a síelő?

**Megoldás**

**a)** A mozgásegyenlet $m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_s} + \mathbf{F_{közeg}}$

a lejtőre merőleges komponens:

$$m\, a_\perp = F_{ny} - mg \cos\alpha = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_{ny} = mg \cos\alpha$$

a lejtővel párhuzamos komponens:

$$m\, a_\parallel = mg \sin\alpha - F_s - F_{közeg} = mg \sin\alpha - \mu\, F_{ny} - F_{közeg} = mg \sin\alpha - \mu\, mg \cos\alpha - cv^2$$

$a_\parallel = \dot{v}$ , ebből meghatározható v(t), ill. $a_\parallel = m\, \ddot{s}$ (s a lejtőn megtett út) $\rightarrow$ s(t) .

**b)** Amíg $F_{eredő} = mg \sin\alpha - \mu\, mg \cos\alpha - cv^2 > 0$, addig $\dot{v} > 0$ $\rightarrow$ v nő $\rightarrow$ $F_{közeg}$ nő

$\rightarrow$ $F_{eredő} = mg \sin\alpha - \mu\, mg \cos\alpha - cv^2$ csökken.

v addig nő, amíg $F_{eredő} = 0$ lesz, ez a maximális sebesség, ekkor tehát $a_\parallel = 0$:

$\rightarrow$ $v = \sqrt{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)mg/c} = \ldots = 16,6$ m/s $= 59,8$ km/h.

**6/11.** 1400 m magasan álló helikopterből kiesik egy 80 kg-os kezdő ejtőernyős. Az ejtőernyős akkor rántja meg az ernyő nyitózsinórját, amikor eléri a 30 m/s-os sebességet, de az ernyő nem nyílik ki rögtön, csak 1 s múlva (addig egyáltalán nem kezd fékezni). $g = 10$ m/s$^2$

**a)** Mekkorára nő a sebessége és mennyit zuhan ez alatt az 1 s alatt?

**b)** Írjuk fel az ejtőernyős mozgásegyenletét az ejtőernyő kinyílása előtt ill. után!

Az ernyő fékezőereje az ejtőernyős sebességének négyzetével arányos, az arányossági tényező $c = 200$ kg/m. Csukott ernyővel a közegellenállás elhanyagolható.

**c)** A fékezőhatás következtében az ejtőernyős sebessége közelít egy határértékhez. Mekkora ez a határsebesség? (azaz a stacionárius sebesség?)

**Megoldás**

**a)** $v = gt$: $v(t_1) = 30$ m/s $\rightarrow$ $t_1 = 3$ s (a 30 m/s-ot 3 s-nál éri el),

1 s múlva a sebessége $v(4) = 40$ m/s nagyságú lesz,

és közben $d = z(4) - z(3) = 10/2\cdot 4^2 - 10/2\cdot 3^2 = 35$ m -t zuhan.

**b)** Az ernyő kinyílása előtt: $m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} = -mg\,\mathbf{k}$ $\rightarrow$ $a_z = -10$ m/s$^2$

Az ernyő kinyílása után: $m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{közeg}}$

A közegellenállási erő felfelé mutat, mivel a test lefelé zuhan, tehát

$$m\mathbf{a} = -mg\,\mathbf{k} + cv^2\,\mathbf{k}$$

Skalár egyenletként felfelé mutató pozitív iránnyal: $ma_{fel} = -mg + cv^2$

ill. lefelé mutató pozitív iránnyal: $ma_{le} = mg - cv^2$

Behelyettesítve $a_{fel} = -g + (c/m)v^2 = -10 + 2,5\, v^2$ [m/s$^2$], ill. lefelé $a_{le} = 10 - 2,5\, v^2$ [m/s$^2$].

**c)** $a = 0$: $cv_{stac}^2 = mg$ $\rightarrow$ $v_{stac}^2 = mg/c = 80\cdot 10/200 = 4$ $\rightarrow$ $v_{stac} = 2$ m/s.

**6/12.** Függőlegesen felhajítunk egy követ, és az 2 s múlva esik vissza. A kőre a közegellenállás miatt **F** = –b**v** fékező erő hat. A kő tömege m = 0,2 kg, b = 0,1 kg/s.

**a)** Írjuk fel a kő mozgásegyenletét!

**b)** Mennyi volt a kezdősebesség?

**c)** Mennyi az emelkedési és esési idő?

**d)** Milyen magasra emelkedett a kő?

**e)** Mekkora sebességgel érkezett vissza a földre?

**Megoldás**

**a)** $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{közeg} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}$

Mivel függőleges a hajítás, **v**-nek csak függőleges komponense van: **v** = v **k**

Felfelé mutató z tengelyt felvéve

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -mg - bv$$

Ezzel a felírással a kő emelkedő és zuhanó szakaszát is leírja a mozgásegyenlet, mivel a közegellenállás lineáris, és a sebesség előjele mutatja, hogy a kő még emelkedik, vagy már esik lefelé. Ha emelkedik, akkor v > 0 $\rightarrow$ a közegellenállási erő $F_{közeg} = -bv < 0$, negatív, tehát lefelé mutat (fékezi a felfelé haladó mozgást). Ha lefelé esik, akkor v < 0 $\rightarrow$ a közegellenállási erő $F_{közeg} = -bv > 0$, pozitív, tehát felfelé mutat (fékezi a lefelé haladó mozgást).

Behelyettesítve m és b értékét:

$0{,}2\,a = -0{,}2\cdot 10 - 0{,}1\,v = -2 - 0{,}1\,v \quad\rightarrow\quad a = \ddot{z} = -10 - 0{,}5\,v$ ( v m/s-ban értendő)

**b)** A kezdősebességet úgy tudjuk meghatározni, hogy két integrálással meghatározzuk a z(t) függvényt, amiben a $v_0$ kezdősebesség paraméterként szerepel, majd a z(2) = z(0) feltételből kiszámoljuk $v_0$-t. Tehát: szeparáljuk és integráljuk a mozgásegyenletet:

$$-\frac{1}{mg+bv}dv = -\frac{1}{b}\frac{1}{\frac{mg}{b}+v}dv = \frac{1}{m}dt$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{\frac{mg}{b}+v'}dv' = -\frac{b}{m}\int_0^t dt' \qquad \rightarrow \qquad \left[\ln\left(\frac{mg}{b}+v'\right)\right]_{v_0}^{v} = -\frac{b}{m}[t']_0^t$$

$$\ln\frac{\frac{mg}{b}+v}{\frac{mg}{b}+v_0} = -\frac{b}{m}t \qquad \rightarrow \qquad v = \left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b} = \frac{dz}{dt}$$

majd integráljuk a v(t) függvényt:

$$\int_0^z dz' = z = \int_0^t\left\{\left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t'} - \frac{mg}{b}\right\}dt' = \left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\left[-\frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t'}\right]_0^t - \frac{mg}{b}[t']_0^t$$

$$z = \frac{m}{b}\left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right) - \frac{mg}{b}t$$

m és b értékét behelyettesítve $z = 2(20+v_0)\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right) - 20t$

A z(2) = z(0) = 0 feltétel: $2(20+v_0)\left(1-e^{-2/2}\right) - 20\cdot 2 = 0$, amiből $v_0 \approx 11{,}64$ m/s.

**c)** Az emelkedés addig tart, amíg v értéke zérusra csökken, azaz $v(t_{fel}) = 0$:

$$\left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t_{fel}} - \frac{mg}{b} = 0 \rightarrow \qquad t_{fel} = -\frac{m}{b}\ln\frac{\frac{mg}{b}}{\frac{mg}{b}+v_0} = \frac{m}{b}\ln\left(1+\frac{v_0 b}{mg}\right) \approx 0{,}92 \text{ s}$$

, így az esés ideje $t_{le} = t_{össz} - t_{fel} \approx 1{,}08$ s.

**d)** A maximális magasságot a $t_{fel}$ időben éri el:

$$z(t_{fel}) = 2(20+11{,}64)\left(1-e^{-\frac{0{,}92}{2}}\right) - 20\cdot 0{,}92 \approx 4{,}9 \text{ m}$$

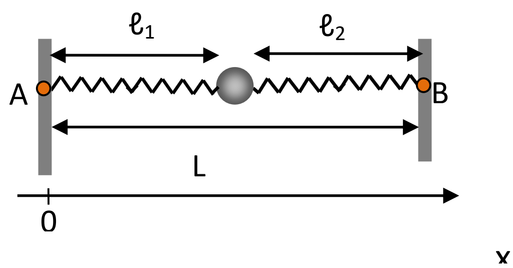
**e)** Földet éréskor

$$v(2) = \left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b} = (20+11{,}64)\cdot e^{-2/2} \approx -8{,}36 \text{ m/s}$$

(negatív, mert lefelé esik)

**Nem zh-feladat:**

**6/13.** Írjuk fel a mozgásegyenletét a két rugóval kifeszített m = 3 g tömegű testnek, ha csak az AB egyenes mentén történő mozgásokra szorítkozunk! A két rugó rugóállandója $k_1$ = 0,1 N/m ill. 0,2 N/m, nyugalmi hosszaik $l_{01}$ = 10 cm ill. $l_{02}$ = 12 cm, az AB távolság 25 cm. Adjuk meg a mozgásegyenlet általános megoldását! Milyen mozgásnak felel ez meg?




**Megoldás** $ma = m\ddot{x} = F_1 + F_2$ ,
ahol $F_1$ és $F_2$ a két rugó által kifejtett erő:
$F_1 = -k_1\,\Delta\ell_1$ , $F_2 = +k_2\,\Delta\ell_2$ ;
$\Delta\ell_1 = \ell_1 - \ell_{01} = x - \ell_{01}$ , $\Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_{02} = (L-x) - \ell_{02}$ ;
tehát a mozgásegyenlet
$m\ddot{x} = -k_1(x - \ell_{01}) + k_2(L-x-\ell_{02})$ (1)
azaz $m\ddot{x} = -(k_1+k_2)\,x + [k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})]$ .
Az $x_e$ egyensúlyi helyzetben az eredő erő zérus:

$F_{1e} + F_{2e} = -k_1(x_e - \ell_{01}) + k_2(L-x_e-\ell_{02}) = m\ddot{x}_e = 0$ (2)

Vonjuk ki (2)-t az (1)-ből, azaz írjuk most úgy fel a mozgásegyenletet, hogy a testre ható erők aktuális értékének az egyensúlyi helyzetben ható erőktől való eltérését tekintjük:
$m\ddot{x} - m\ddot{x}_e = (F_1-F_{1e}) + (F_2-F_{2e}) =$

$= [-k_1(x-\ell_{01}) + k_2(L-x-\ell_{02})] - [-k_1(x_e-\ell_{01}) + k_2(L-x_e-\ell_{02})] = -k_1(x-x_e) - k_2(x-x_e)$.

Vezessük be új változónak az $x_e$-től való eltérést: $y = x - x_e$ ,
ezzel a mozgásegyenlet $m\ddot{y} = -(k_1+k_2)\,y$ .
A test tehát az $x_e$ egyensúlyi helyzet körül harmonikus rezgőmozgást végez.
(2)-ből $x_e = (k_1\ell_{01}+k_2L-k_2\ell_{02})/(k_1+k_2) = 12$ cm .
A rezgőmozgás periódusideje $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1+k_2)} = 0{,}2\pi = 0{,}6283$ s,
(az amplitúdója és fázisállandója pedig a kezdeti feltételektől függ).

**6/14.** Egy repülőgép $v_0$ = 72 km/h kezdősebességgel ér földet és gurulni kezd. A fékezőerő nagysága

$F(v) = c(v+u)^2$ [N] ,
ahol $u$ = 10 m/s és $v$ a pillanatnyi sebesség nagysága m/s-ban,
$c$ = 1 kg/m.

A gép tömege m = 500 kg.
**a)** Mennyi idő alatt áll meg a gép?
**b)** Mekkora utat tesz meg addig?

**Megoldás** A mozgásegyenlet

$$m\frac{dv}{dt} = -c(v+u)^2.$$

Szeparáljuk és integráljuk:

$$\int_{v_0}^{v} -(v'+u)^{-2}\,dv' = \frac{c}{m}\int_0^t dt'$$

$$\left[\frac{1}{v'+u}\right]_{v_0}^{v} = \frac{c}{m}[t']_0^t \quad \rightarrow \quad \frac{1}{v+u} - \frac{1}{v_0+u} = \frac{c}{m}t, \text{ azaz } v = \frac{m}{c}\frac{1}{t+\frac{m}{c(v_0+u)}} - u = 500\frac{1}{t+\frac{50}{3}} - 10$$

**a)** $v = 0$ ha $t = \frac{m}{c}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v_0+u}\right) \approx 33{,}3\ s$

**b)** A megtett utat megkapjuk a v(t) függvény integrálásával:

$$\int_0^x dx' = \int_0^t \left(\frac{m}{c}\frac{1}{t' + \frac{m}{c(v_0+u)}} - u\right) dt'$$

$$x = \frac{m}{c} ln\left[1 + \frac{c}{m}(v_0 + u)t\right] - ut = 500\; ln\left(1 + \frac{30}{500}t\right) - 10\,t$$

a megállásig megtett távolság x(33,3) ≈ 216 m.

VAGY:

a $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ átalakítással $m\,v\frac{dv}{ds} = -c(v+u)^2$,

ezt szeparálva $\int ds = -\frac{m}{c}\int \frac{v}{(v+u)^2} dv$

és integrálva $s = -\frac{m}{c}\left[\ln(v+u) + \frac{u}{v+u}\right]_{v_0}^{v} = -\frac{m}{c}\left(ln\frac{v+u}{v_0+u} + \frac{u}{v+u} - \frac{u}{v_0+u}\right) = 500\left(ln\frac{30}{v+10} + \frac{10}{30} - \frac{10}{v+10}\right)$

A megállásig (v=0) megtett út s(0) = 500(ln3–2/3) ≈ 216 m.

**6/15.** h = 6 m mély vízmedence tetején r = 1,5 mm sugarú golyót kezdősebesség nélkül elengedünk. A golyóra a nehézségi és a felhajtóerőn kívül még egy $F_{közeg} = 6\pi\eta r v$ nagyságú fékező erő is hat, ahol v a golyó sebessége, η = 1 g/ms. A golyó sűrűsége $\varrho_{test}$ = 2 g/cm$^3$.

**a)** Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét, és adjuk meg annak általános megoldását!

**b)** Mennyi idő alatt és milyen sebességgel ér le a golyó a medence fenekére?

**c)** Mennyi a golyó átlagsebessége, és hol éri el ezt a sebességet?

**d)** Oldjuk meg az előző részfeladatokat arra az esetre is, ha $v_0$ = 10 m/s függőlegesen lefelé irányuló sebességgel indítjuk meg a golyót!

**Megoldás**

**a)** Felfelé mutató z tengelyt felvéve a mozgásegyenlet

$$\mathrm{m}\ddot{\mathrm{z}} = -\mathrm{mg} + \mathrm{F_{felhajtó}} - \mathrm{F_{közeg}} = -\mathrm{mg} + \rho_{\mathrm{víz}}\frac{\mathrm{m}}{\varrho_{\mathrm{test}}}\mathrm{g} - (6\pi\eta\mathrm{r})\mathrm{v}$$

Az adatokat behelyettesítve $\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = -(v+5)$.

Integrálással $\ln\frac{v+5}{v_0+5} = -t \quad\rightarrow\quad v = (v_0+5)e^{-t} - 5$

és $z = (v_0+5)(1-e^{-t}) - 5t$

A feladat első részében $v_0$ = 0, azaz $v = 5e^{-t} - 5$ és $z = 5(1-e^{-t}) - 5t$.

**b)** Mikor ér le a medence fenekére:

a z(t) = –6 egyenlet numerikusan oldható meg: t = 2,08 s,

ekkor a sebessége v(2,08) = –4,4 m/s .

**c)** Az átlagsebesség $v_{átl}$ = –6/2,08 = –2,88 m/s;

a v(t) = –2,88 egyenlet megoldása t = 0,86 s; ekkor z(0,86) = –1,4 m.

**d)** Ha a kezdősebesség lefelé mutat, akkor $v_0$ = –10 m/s (mivel a z tengely felfelé mutat),

és a v(t) ill. z(t) függvények $v = -5e^{-t} - 5$ és $z = -5(1-e^{-t}) - 5t$ ;

Így a z(t) = –6 egyenlet megoldása t = 0,70 s (ekkor ér le) v(0,70) = –7,5 m/s sebességgel;

$v_{átl}$ = –8,6 m/s, ezt 0,33 s-nál éri el 3,0 m mélységben.