

Síkbeli polárkoordináta-rendszerben a test helyvektora, sebessége és gyorsulása általános esetben:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dots = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi$$

Ha a test körpályán mozog, akkor $r = \text{konst.}$, ezért a körmozgás egyetlen változóval, a φ szögváltozóval leírható.

$\varphi(t)$ megadja a test helyét a körvonalon; φ radiánban értendő (dimenziómentes);

a szögsebesség $\omega = \dot{\varphi} \text{ [s}^{-1}\text{]}$;

a szöggyorsulás $\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \text{ [s}^{-2}\text{]}$.

Mivel $r = \text{konst.}$ esetén $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, ezért a fenti egyenletek egyszerűsödnek: a test sebessége $\mathbf{v} = r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$: érintő irányú,

$$\text{nagysága } v = r\dot{\varphi} = r\omega ;$$

gyorsulása $\mathbf{a} = -r\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r + r\ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$, aminek

sugár (radiális) irányú komponense, a centripetális gyorsulás a sebességvektor irányának változását okozza, ez a körpálya közepe felé mutat és nagysága

$$a_{cp} = r\omega^2 = v^2/r = v\omega;$$

érintő (tangenciális) irányú komponense a sebességvektor nagyságának változását okozza, nagysága

$$a_t = \dot{v} = r\beta = r\dot{\omega} = r\ddot{\varphi} .$$

Ha a_t és v ugyanolyan irányúak, akkor a test (szög)sebessége nő, ha ellentétesek, akkor csökken.

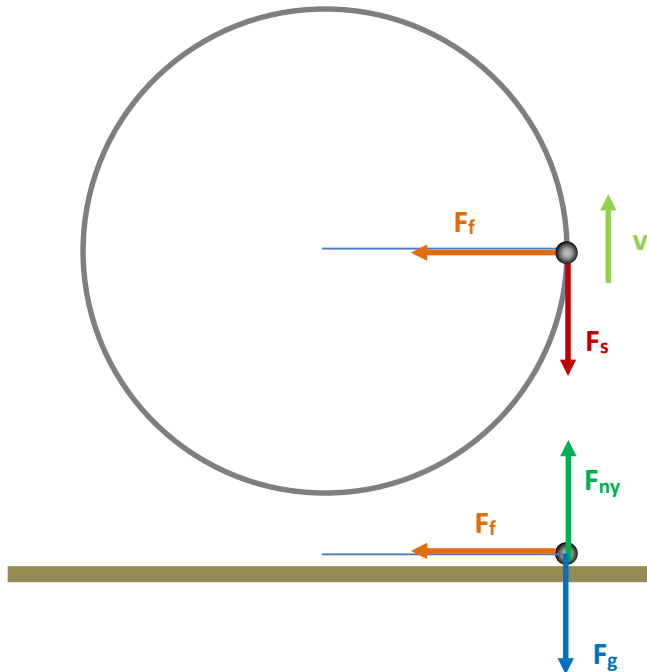
Körmozgás esetén a testre ható erőket sugár irányú, érintő irányú és a körpálya síkjára merőleges komponensekre bontjuk (hengerkoordináta-rendszer).

- A körpálya síkjára merőleges komponensek eredője zérus kell legyen, mivel a test nem mozdul ki abból a síkból.
- Az érintő irányú komponensek eredője határozza meg, hogy hogyan változik a sebesség nagysága. Lehetséges, hogy $a_t = 0$, ekkor a test egyenletes körmozgást végez.
- A sugár irányú komponensek eredője soha nem lehet zérus ($a_{cp} \neq 0$!!!), hanem ez adja a test centripetális gyorsulását (ami miatt a test sebességének iránya változik). A centripetális gyorsulás nagysága a pillanatnyi (szög)sebességtől függ.

Körmozgás létrejöhet különböző kényszererők (nyomóerő, kötélérő, rúderő), ill. a nehézségi erő hatására. Vízszintes síkban fekvő körpálya esetén a nehézségi erő merőleges a körpálya síkjára, és a kényszererő (ill. ferde felület, kötéll vagy rúd esetén a függőleges komponense) ellensúlyozza, így a nehézségi erő közvetlenül nem befolyásolja a körmozgást. Függőleges síkban fekvő körpálya esetén viszont a nehézségi erőnek van tangenciális komponense (kivéve az alsó és a felső pontot), ami miatt a sebesség nagysága változik.

5/1. Asztalon $m = 0,5$ kg-os golyót $\ell = 0,5$ m-es fonálon $v_0 = 5$ m/s kezdősebességgel meglökünk úgy, hogy a kezdősebesség merőleges a fonálra. A golyó és az asztal közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,2$.
Mekkora lesz 2 s múlva a golyó sebessége és a fonálerő?

Megoldás



A testre ható erők:

F_g gravitációs erő

F_{ny} az asztal által a golyóra kifejtett nyomóerő

F_f fonálerő

F_s csúszási súrlódási erő

A test mozgásegyenlete vektori alakban $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_s$.

A mozgásegyenlet komponensei

1.) függőleges irányban, a körpálya síkjára merőlegesen:

$$ma_{\perp} = F_{ny} - F_g = F_{ny} - mg;$$

2.) érintő irányban: a súrlódási erő a sebességgel ellentétes irányba mutat:

$$ma_t = -F_s;$$

3.) sugár irányban: a fonálerő a kör középpontja felé mutat:

$$ma_{cp} = F_f.$$

1.) A függőleges komponens esetén az a_{\perp} gyorsulás zérus kell legyen, mivel a golyó vízszintes síkban mozog:

$$a_{\perp} = 0 \rightarrow F_{ny} - mg = 0 \rightarrow F_{ny} = mg.$$

A nyomóerő nagyságára a súrlódási erőnél lesz szükségünk.

2.) Az érintő irányú komponensből tudjuk meg, hogy hogyan változik időben a golyó sebességének a nagysága, mivel $a_t = \dot{v}$.

A súrlódási erő nagysága $F_s = \mu F_{ny} = \mu mg$, tehát $ma_t = -\mu mg \rightarrow$ a tangenciális gyorsulás

$$a_t = -\mu g = \text{konst.}$$

Mivel a gyorsulás állandó, ezért a sebesség

$$v(t) = v_0 - \mu g \cdot t,$$

v_0 és μ értékét behelyettesítve

$$v(t) = 5 - 0,2 \cdot 10 t = 5 - 2 t .$$

A megadott 2 s múlva a sebesség $v(2) = 5 - 2 \cdot 2 = 1 \text{ m/s}$.

3.) A sugár irányú komponensből látjuk, hogy a fonálerő nagysága a centripetális gyorsulással arányos, ami a test sebességének négyzetével arányos:

$$F_f = m a_{cp} = m \frac{v^2}{r} .$$

Jelen esetben $r = \ell$, a körpálya sugara éppen a fonál hossza.

Behelyettesítve a fonálerő az adott pillanatban

$$F_f = 0,5 \cdot \frac{1^2}{0,5} = 1 \text{ N.}$$

Megjegyzés

Mennyi lenne a test sebessége 3 s múlva? A fenti függvénybe behelyettesítve

$v(3) = 5 - 2 \cdot 3 = -1 \text{ m/s}$ jönne ki, ami azt jelentené, hogy a golyó az eredeti iránnyal ellentétes irányba mozog, ami lehetetlen.

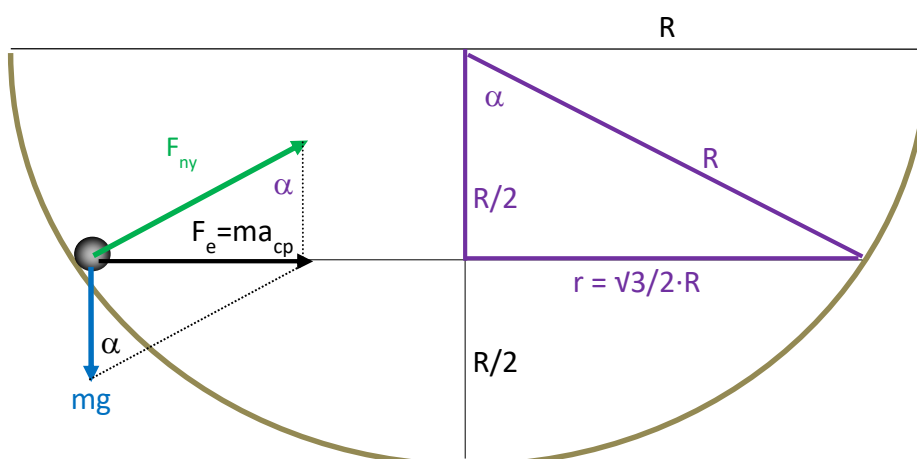
A $v(t) = v_0 - \mu g \cdot t$ összefüggés csak addig érvényes, amíg a test mozgásban van, hiszen a gyorsulását a csúszási súrlódási erő adta, ami csak mozgásban levő testre hat.

A sebesség az idő függvényében zérusra csökken $t = v_0 / (\mu g) = 5 / 2 = 2,5 \text{ s}$ alatt,

utána a testre nem hat már a csúszási súrlódási erő (és a kötél erő se, mivel $v = 0$); a testre ható erők (a nehézségi erő és a nyomóerő) eredője zérus.

5/2. Egy $R = 10 \text{ cm}$ sugarú gömb belsejében a sugár fele magasságában elhelyezkedő vízszintes síkban egy golyó kering. Számítsuk ki a keringési időt!

Megoldás



A testre ható erők:

F_g gravitációs erő

F_{ny} a gömb által a golyóra kifejtett nyomóerő

A test mozgásegyenlete vektori alakban $m \mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ny}$.

A nyomóerő merőleges a gömb adott pontbeli érintősíkjára, tehát a gömb középpontja felé mutat. Legyen α a nyomóerőnek a függőlegessel bezárt szöge, ezzel a nyomóerő

függőleges komponense $F_{ny,z} = F_{ny} \cos\alpha$, és

vízszintes komponense $F_{ny,r} = F_{ny} \sin\alpha$.

A nyomóerő nagyságát nem tudjuk, de azt tudjuk, hogy mivel a golyó vízszintes síkban mozog, ezért a függőleges komponensek eredője zérus kell legyen; illetve hogy a nyomóerő és a gravitációs erő eredője vízszintes kell legyen, és ez adja a test centripetális gyorsulását.

A mozgásegyenlet komponensei

1.) függőleges irányban, a körpálya síkjára merőlegesen: $ma_{\perp} = F_{ny,z} - mg = F_{ny} \cos\alpha - mg = 0$;

2.) sugár irányban: $ma_{cp} = F_{ny,r} = F_{ny} \sin\alpha$;

3.) érintő irányban: a testre érintő irányú erő nem hat, $ma_t = 0$.

A 3.) egyenletből $a_t = \dot{v} \rightarrow v = \text{konst.}$, a test állandó sebességgel kering.

Az 1.) egyenletből ki tudjuk fejezni a nyomóerő nagyságát:

$F_{ny} = mg/\cos\alpha$,

ezt a 2.) egyenletbe beírva kapjuk, hogy

$$ma_{cp} = mg \sin\alpha/\cos\alpha = mg \operatorname{tg}\alpha \quad (*)$$

amit közvetlenül is leolvashatunk az ábráról. Az erők alkotta háromszög és a jobb oldalon bejelölt háromszög hasonló háromszögek.

A feladat a golyó keringési idejét kérdezi, ezért a centripetális gyorsulást most

$a_{cp} = r\omega^2$ alakban írjuk fel.

r annak a körpályának sugara, amin a golyó kering (vízszintes síkban), ezt a gömb R sugarával kell kifejeznünk:

$$r = R \sin\alpha.$$

ω felírható T a periódusidővel kifejezve:

$$\omega = 2\pi/T.$$

Ezeket behelyettesítve

$$a_{cp} = r\omega^2 = R \sin\alpha \cdot (2\pi/T)^2 .$$

Írjuk ezt be a (*) egyenletbe, majd rendezzük T -re:

$$m R \sin\alpha \cdot (2\pi/T)^2 = mg \operatorname{tg}\alpha$$

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R \cos\alpha}{g}} .$$

$\cos\alpha$ kifejezhető a jobb oldali háromszögből:

$$\cos\alpha = (R/2) / R = 1/2 \quad (\text{vagyis } \alpha = 60^\circ)$$

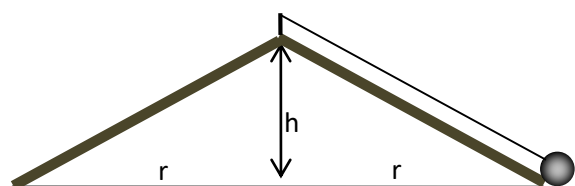
$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,5}{10}} = 0,4443 \text{ s} .$$

Egyéb keresztmetszetű vályúkra (parabola, stb.) ld. a gyakorló és zh feladatokat!

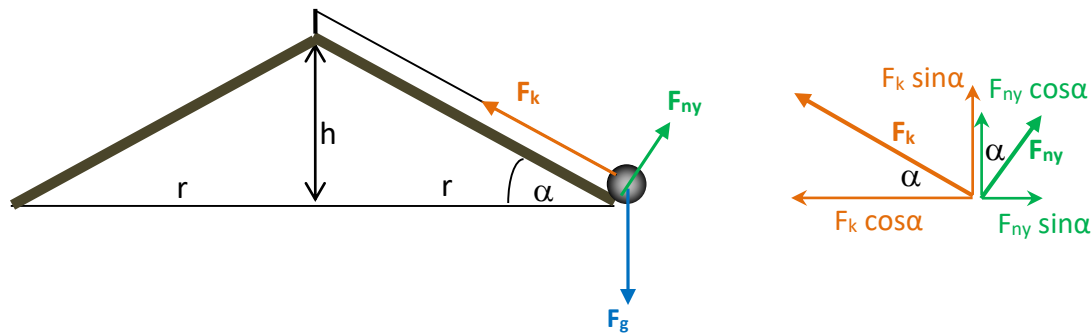
5/3. Egy körhinta kúp alakú, az alapkörének sugara $r = 3$ m, a közepén a magassága $h = 2,2$ m.

a) Milyen fordulatszámnál kezdenek el a körhinta ülései emelkedni?

b) Mekkora ekkor a kötélterő, ha a benne ülő gyerek tömege az üléssel együtt 36 kg?



Megoldás



A testre (gyerek + ülés) ható erők:

F_g gravitációs erő,

F_{ny} a körhinta által a testre kifejtett nyomóerő,

F_k kötél erő.

A test mozgásegyenlete vektori alakban: $\mathbf{ma} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_{ny}$

A kötél erő és a nyomóerőt vízszintes és függőleges komponensekre kell bontani. (Azért nem az oldalnézetben lejtőnek kinéző felülettel párhuzamos és arra merőleges komponensekre, mert a test nem annak a síkjában mozog, ez csak annak a kúpos felületnek a metszete, ami a vízszintes körmozgást végző testet megtámasztja.)

A kötél erő

függőleges komponense $F_{k,z} = F_k \sin \alpha$,

vízszintes komponense $F_{k,x} = F_k \cos \alpha$;

a nyomóerő

függőleges komponense $F_{ny,x} = F_{ny} \cos \alpha$,

vízszintes komponense $F_{ny,z} = F_{ny} \sin \alpha$.

A mozgásegyenlet komponensei

1.) függőleges irányban, a körpálya síkjára merőlegesen:

$$ma_{\perp} = F_{k,z} + F_{ny,z} - F_g = F_k \sin \alpha + F_{ny} \cos \alpha - mg = 0;$$

2.) sugár irányban :

$$ma_{cp} = F_{k,r} - F_{ny,r} = F_{k,x} - F_{ny,x} = F_k \cos \alpha - F_{ny} \sin \alpha$$

(a kötél erő vízszintes komponense az origó felé mutat, ezért pozitív előjelű,

a nyomóerő vízszintes komponense kifelé mutat, ezért negatív előjelű);

3.) érintő irányban: a testre érintő irányú erő nem hat,

$$ma_t = 0.$$

Az érintő irányú gyorsulást azért hagyhatjuk figyelmen kívül, mert nem azt vizsgáljuk, hogy a fordulatszám fokozatosan nő, hanem különböző állandó (szög)sebességű állapotokat hasonlítunk össze. Így a 3.) egyenletből $a_t = \dot{v} \rightarrow v = \text{konst.}$, a test állandó sebességgel kering.

Mivel a test vízszintes síkban kering körpályán (azokat a fordulatszámokat vizsgálva, amikor még nem emelkedik el az ülés a kúpos részről), a gyorsulása a vízszintes síkú körpálya közepe felé mutató centripetális gyorsulás.

a) Először vizsgáljuk meg általánosan azokat a fordulatszámokat, aminek még nem emelkedik el a test. Fejezzük ki a nyomóerőt a fordulatszám függvényében!

A függőleges irányra felírt $F_k \sin \alpha + F_{ny} \cos \alpha - mg = 0$ egyenletből

$$F_k = (mg - F_{ny} \cos \alpha) / \sin \alpha,$$

ezt behelyettesítve a sugár irányba felírt $ma_{cp} = F_k \cos \alpha - F_{ny} \sin \alpha$ egyenletbe

$$\begin{aligned} m a_{cp} &= (mg - F_{ny} \cos \alpha) \cos \alpha / \sin \alpha - F_{ny} \sin \alpha = \\ &= mg \cos \alpha / \sin \alpha - F_{ny} \cos \alpha \cdot \cos \alpha / \sin \alpha - F_{ny} \sin \alpha \cdot \sin \alpha / \sin \alpha = \\ &= mg / \operatorname{tg} \alpha - F_{ny} / \sin \alpha (\cos \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \alpha) = mg / \operatorname{tg} \alpha - F_{ny} / \sin \alpha . \end{aligned}$$

A centripetális gyorsulást most a fordulatszámmal kifejezve kell felírni:

$$m a_{cp} = m r \omega^2 = m r (2\pi f)^2 ;$$

ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe megkapjuk, hogyan függ a nyomóerő a fordulatszámtól:

$$\begin{aligned} m r (2\pi f)^2 &= mg / \operatorname{tg} \alpha - F_{ny} / \sin \alpha \\ \rightarrow F_{ny} &= mg \cos \alpha - m r (2\pi f)^2 \sin \alpha . \end{aligned}$$

Látható, hogy a nyomóerő a nyugalmi $mg \cos \alpha$ értékről az 'f' fordulatszám növelésével csökken.

Az ülések akkor kezdenek el emelkedni, amikor $F_{ny} = 0$:

$$\begin{aligned} mg \cos \alpha - m r (2\pi f_{krit})^2 \sin \alpha &= 0 \\ \rightarrow f_{krit}^2 &= \frac{g \cos \alpha}{4\pi^2 r \sin \alpha} = \frac{g}{4\pi^2 r \operatorname{tg} \alpha} . \end{aligned}$$

Használjuk fel, hogy a kúpfelület alapkörének r sugara és a h magassága van megadva, tehát

$$\operatorname{tg} \alpha = h/r .$$

Ezt beírva

$$\begin{aligned} f_{krit}^2 &= \frac{g}{4\pi^2 r \operatorname{tg} \alpha} = \frac{g}{4\pi^2 r \left(\frac{h}{r}\right)} = \frac{g}{4\pi^2 h} \quad \rightarrow \\ f_{krit} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} . \end{aligned}$$

A kritikus fordulatszám tehát csak a kúp alakú rész magasságától függ.

Behelyettesítve

$$f_{krit} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10}{2,2}} = 0,3393 \text{ s}^{-1} .$$

Mivel ebben a feladatban az a kritikus fordulatszám volt a kérdés, amikor elkezdi emelkedni az ülés a gyerekekkel, azaz amikor $F_{ny} = 0$, felírhattuk volna a mozgásegyenletet úgy, hogy nem is tartalmazza a nyomóerőt:

$$\begin{aligned} m a_{\perp} &= F_k \sin \alpha - mg = 0 \\ m a_{cp} &= F_k \cos \alpha \end{aligned}$$

A másodikból

$$F_k = mg / \sin \alpha ,$$

ezt beírva az elsőbe

$$m r (2\pi f_{krit})^2 = (mg / \sin \alpha) \cos \alpha ,$$

amiből kifejezhető f_{krit} (ld. feljebb).

b) A kötélerő kiszámolható a függőleges irányra felírt

$$F_k \sin \alpha + F_{ny} \cos \alpha - mg = 0 \text{ egyenletből } F_{ny} = 0 \text{ esetén}$$

$$m = 36 \text{ kg}, \alpha = \operatorname{arctg}(h/r) = \operatorname{arctg}(2,2/3) = 36,25^\circ \text{ behelyettesítéssel:}$$

$$F_k = mg / \sin \alpha = 608,8 \text{ N.}$$

(Bonyolultabb megoldás, ha kifejezzük a kötélerőt a fordulatszám függvényében, vagyis a

$$F_k = (mg - F_{ny} \cos \alpha) / \sin \alpha$$

kifejezésbe behelyettesítve az f-fel kifejezett nyomóerőt:

$$F_{ny} = mg \cos \alpha - m r (2\pi f)^2 \sin \alpha$$

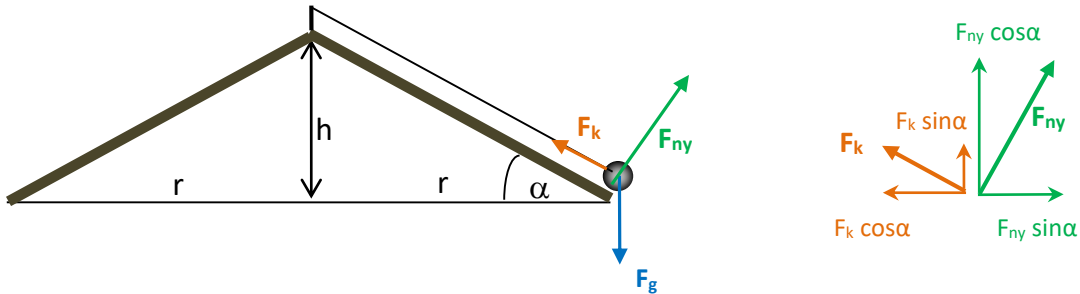
$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow F_k = mg \sin \alpha + m r \cos \alpha (2\pi f)^2 ,$$

majd behelyettesítjük f_{krit} értékét.)

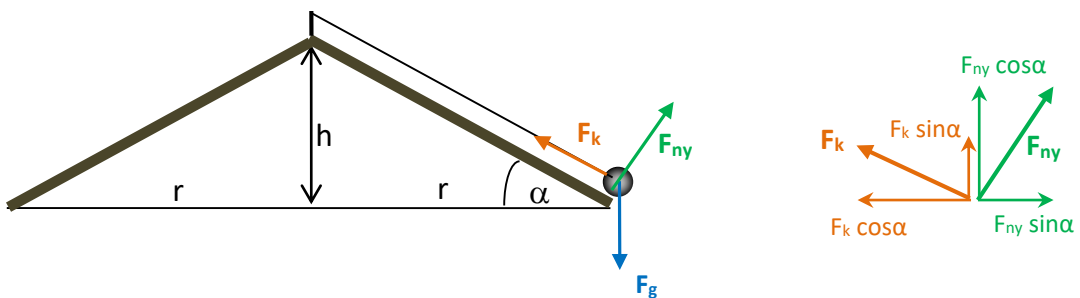
Az alábbi ábrásorozaton követhetjük, hogyan változnak az f fordulatszám növelésével az erők:

$f = 0$: Ebben a helyzetben a nyomóerő nagysága $F_{ny} = mg \cos\alpha$; a nehézségi erő és a nyomóerő eredője a kúpfelület alja felé mutató $mg \sin\alpha$ nagyságú erő (mint egy sík lejtő esetében), a kötelerő pontosan ezzel egyenlő nagyságú, tehát a 3 erő eredője zérus.

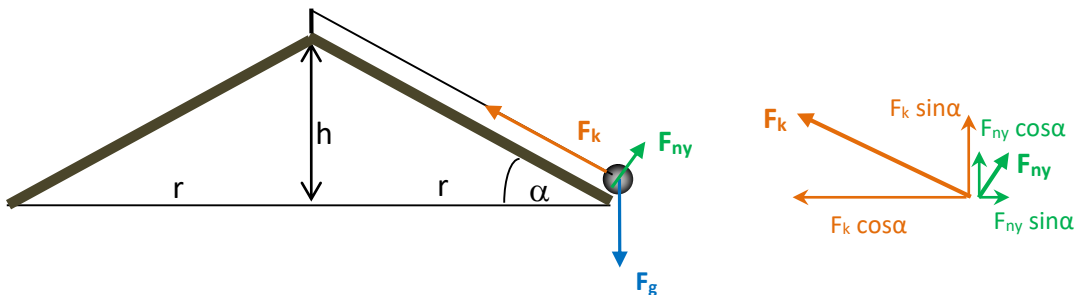
A nyomóerő és a kötelerő vízszintes komponense egyenlő nagyságú.



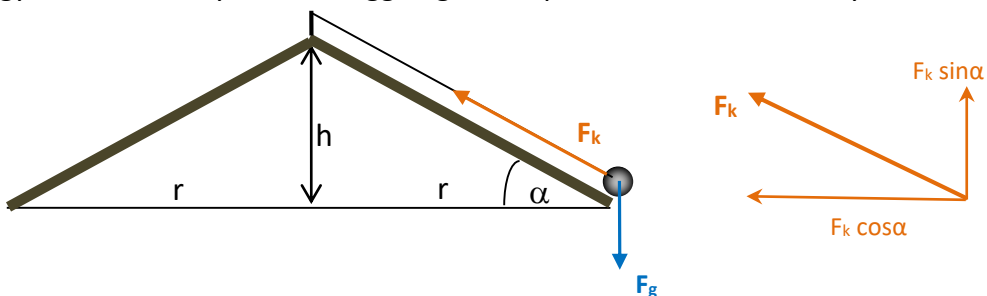
$0 < f < f_{krit}$: A rendszer forgásban van, ezért a testre ható erők eredője a körpálya közepe felé kell mutasson. Ez azt jelenti, hogy a kötelerőnek a befelé mutató $F_k \cos\alpha$ komponense nagyobb kell legyen, mint a nyomóerőnek a kifelé mutató $F_{ny} \sin\alpha$ komponense. Mivel a kényszererők iránya adott, így maga a kötelerő nagyobb lesz, és ez igaz lesz a függőleges komponensére is. A kötelerő és a nyomóerő függőleges komponenseinek összege viszont konstans (mg -vel egyenlő), a nyomóerő kisebb lesz.



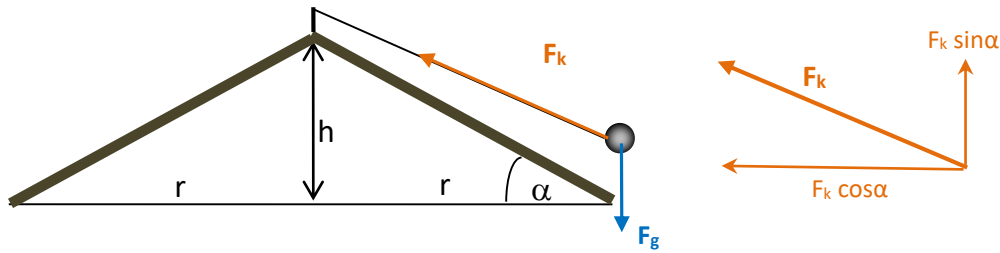
A vízszintes komponensek eredője $(F_k \cos\alpha - F_{ny} \sin\alpha)$ ma_{cp} -vel egyenlő, tehát függ a test sebességétől ($a_{cp} = v^2/r$). Minél nagyobb a fordulatszám, vagyis minél nagyobb a test sebessége, annál nagyobb kell legyen az $F_k \cos\alpha - F_{ny} \sin\alpha$ különbség, tehát a kötelerő egyre nagyobb, a nyomóerő egyre kisebb.



$f = f_{krit}$: A kötelerő eléri azt a nagyságot, amikor a függőleges komponense ($F_k \sin\alpha$) éppen mg -vel egyenlő, ezért a nyomóerő függőleges komponense zérus, azaz a nyomóerő nagysága zérus.



$f > f_{\text{krit}}$: A fordulatszám további növelésével a kötélerő vízszintes komponensének egyre nagyobbak kell lenni, mivel $F_k \cos \alpha = m a_{\text{cp}}$, és a_{cp} a fordulatszám négyzetével arányosan nő. A kötélerő függőleges komponense viszont továbbra is mg nagyságú marad. Ezért a kötélt iránya változik, a test elemelkedik a felületről és csak a kötélt tartja. („Kúpinga, ld. az 5/9. feladatot.”)



5/4. Függőleges síkban körpályán haladó repülőgép sebessége 1080 km/h.

a) Mekkora legyen a körpálya sugara, hogy a legfelső pontban a pilóta „súlytalan” legyen?

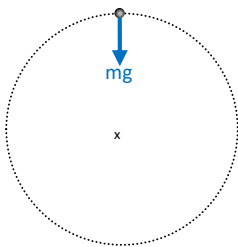
b) És mekkora legyen a körpálya sugara, ha azt szeretnék elérni, hogy a pilóta 'g' gyorsulást érezzen a talpa felé?

Ebben az esetben a pilóta azt látná, hogy amit elenged, a lába felé esik; ha vizet önt, akkor az a lába felé folyik, és meg is tudja inni a pohárból, ahogy ezt az alábbi videón is lehet látni:

<https://www.youtube.com/watch?v=g99ho> ExApU

Megoldás $v = 1080 \text{ km/h} = 300 \text{ m/s}$

Súly: az az erő, amivel a test az alátámasztást nyomja, vagy a felfüggesztést húzza.



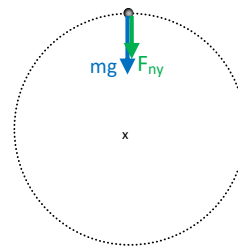
a) Mivel a pilóta súlytalan, azaz a repülőgép nem hat rá nyomóerővel, ezért a legfelső pontban a pilótára csak egyetlen erő hat, a nehézségi erő:

$$ma = mg$$

A pilóta körpályán mozog, gyorsulása a körpálya középpontja felé mutató centripetális gyorsulás, tehát

$$mg = m a_{\text{cp}} = m v^2 / R$$

$$\rightarrow R = v^2 / g = 9000 \text{ m.}$$



b) A legfelső pontban a pilóta fejjel lefelé ül a gépben, és abban a helyzetben azt érzi, hogy az ülés ugyanúgy nyomja, mint amikor nyugalomban van a földön (vagyis a feje irányába), tehát a repülőgép függőlegesen lefelé nyomja őt.

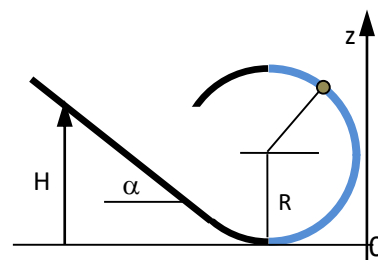
$$ma = mg + F_{\text{ny}}$$

Mivel a nyomóerő éppen mg nagyságú:

$$mg + F_{\text{ny}} = 2mg = m a_{\text{cp}} = m v^2 / R$$

$$\rightarrow R = v^2 / 2g = 4500 \text{ m.}$$

5/5. Az α hajlásszögű egyenes lejtő érintő irányban csatlakozik az R sugarú körív keresztmetszetű vályúhoz. A súrlódás elhanyagolható. Egy testet kezdősebesség nélkül elengedünk a lejtő H magasságú pontjából. Adjuk meg a testre ható nyomóerőt tetszőleges kiindulási H magasság esetén a z koordináta függvényében a vályú jobb oldali (kékre színezett) részére!



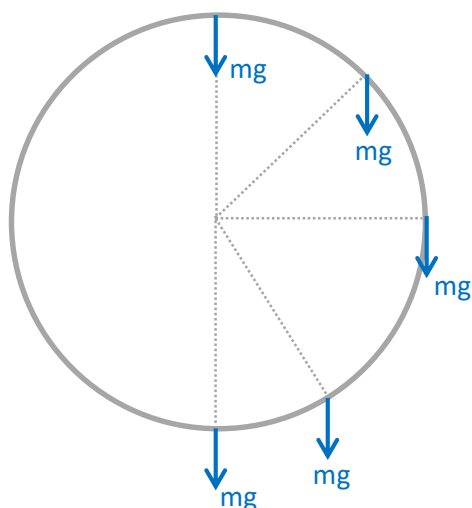
Megoldás

A testre a nehézségi erő és a vályú által kifejtett nyomóerő hat:

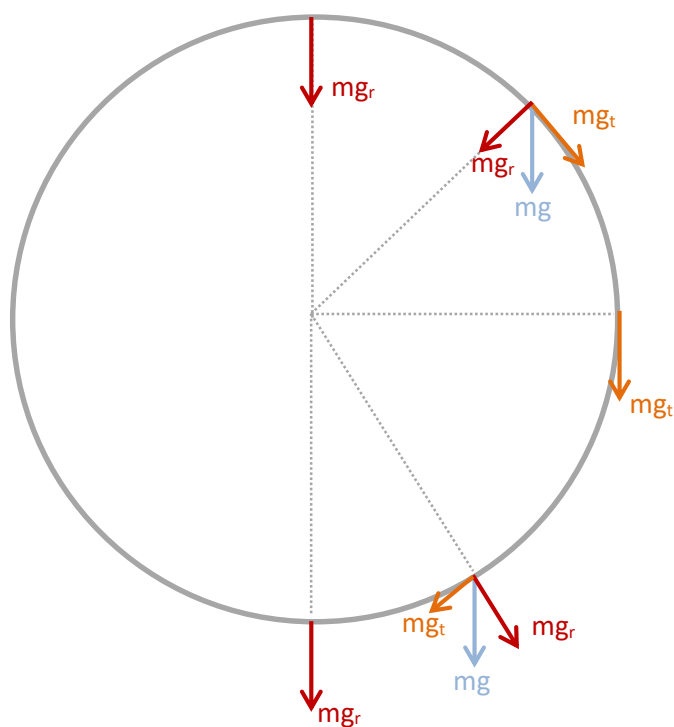
$$ma = mg + F_{ny}$$

Mielőtt számolni kezdenénk, gondoljuk végig, mit mondhatunk az erőkről.

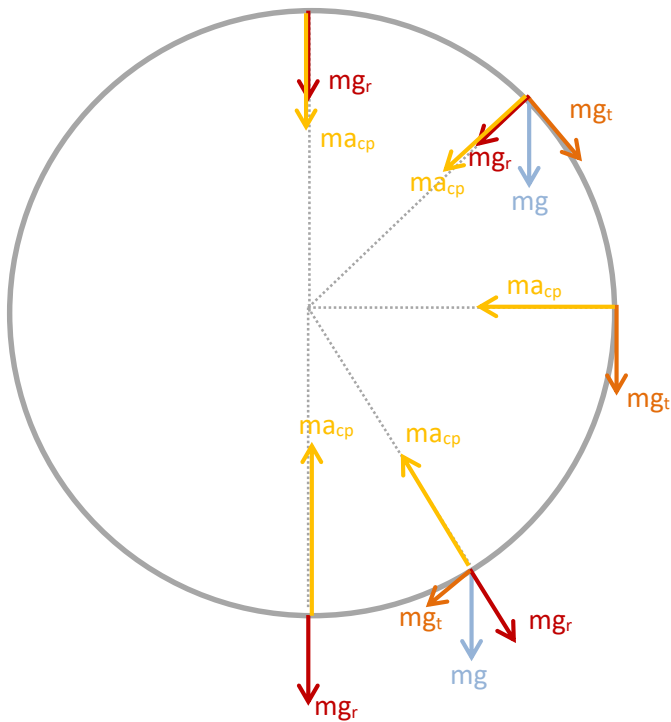
Rajzoljuk be a nehézségi erőt a pálya több jellegzetes pontján:



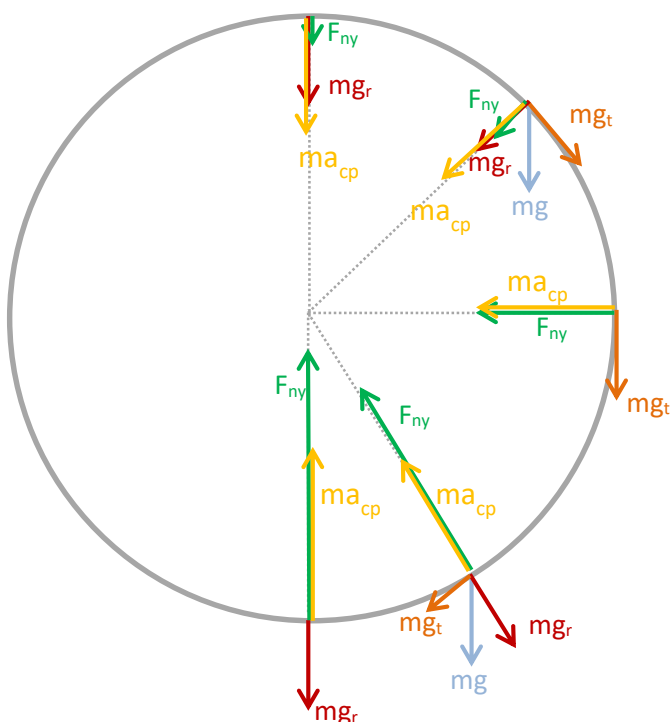
és bontsuk fel sugár- és érintő irányú komponensekre:



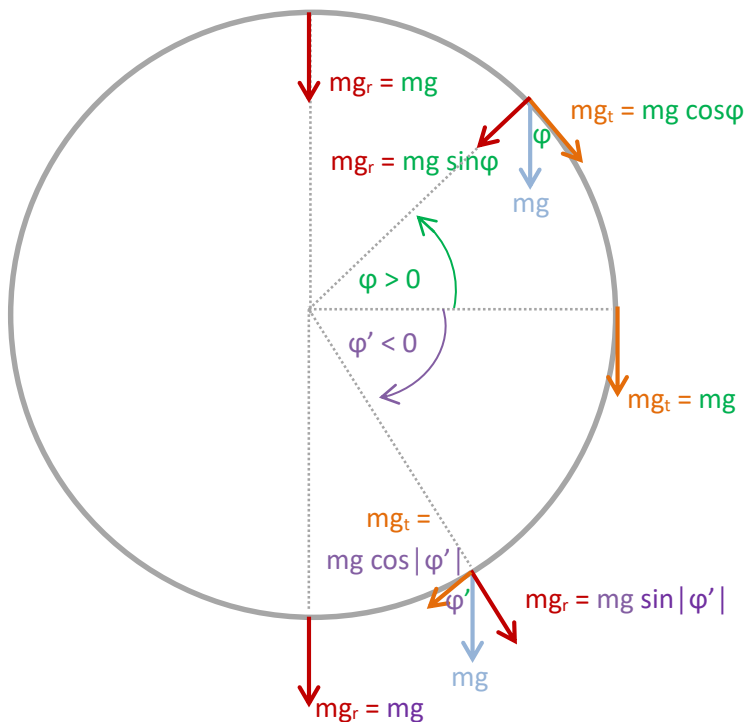
Tudjuk, hogy a nehézségi erő és a nyomóerő eredőjének a sugárirányú komponense mindig befelé, a kör közepe felé kell mutasson, és hogy a nagysága $ma_{cp} = m v^2/r$. Azt még nem tudjuk, hogy a pálya egyes pontjain mekkora a test sebessége, de egyelőre annyit vegyünk figyelembe, hogy minél lejjebb van a test, annál nagyobb a sebessége (felfelé haladva lassul az mg_t komponens miatt), vagyis annál nagyobb ma_{cp} :



Ez alapján be tudjuk rajzolni arányosan a hiányzó nyomóerőket is (mivel mg_r és F_{ny} eredője ma_{cp}).



A számoláshoz fejezzük ki az mg_r és mg_t komponenseket a vízszintes helyzettől mért előjeles φ szöggel (felfelé pozitív, lefelé negatív):



Az ábrán φ' -vel jelöltük a negatív szöget, de látni fogjuk, hogy az egyenletek felírásánál nincs szerepe annak, hogy a szög pozitív vagy negatív, nem kell különböző módon felírni az egyenleket az alsó ill. felső ívre, hanem az előjelesen értelmezett φ -vel egyértelműek az egyenletek.

A mozgásegyenlet sugár- és érintő irányú komponenseinek felírásakor az előjeleket úgy kell megválasztani, hogy

érintő irányban a sebesség iránya a pozitív, vagyis a felfelé mutató irány (a pozitív forgásirány):

$$ma_t = -mg \cos \varphi \quad \text{ill.} \quad ma_t = -mg \cos |\varphi'| ;$$

sugár irányban befelé mutat a pozitív irány:

a felső íven

$$ma_{cp} = F_{ny} + mg \sin \varphi ,$$

az alsó íven

$$ma_{cp} = F_{ny} - mg \sin |\varphi'| .$$

Mivel $\varphi' < 0$, ezért $-\sin |\varphi'| = \sin \varphi'$,

és az érintő irányú komponensnél sincs eltérés, mivel $\cos |\varphi'| = \cos \varphi$,

ezért nem szükséges a φ' jelölés, a továbbiakban el is hagyjuk.

Tehát a vízszintes helyzettől mért előjeles φ szöggel, az a_t és a_{cp} gyorsulásokat behelyettesítve

$$ma_t = mR\dot{\omega} = mR\ddot{\varphi} = -mg \cos \varphi \quad (1)$$

$$ma_{cp} = mv^2/R = mR\omega^2 = F_{ny} + mg \sin \varphi \quad (2)$$

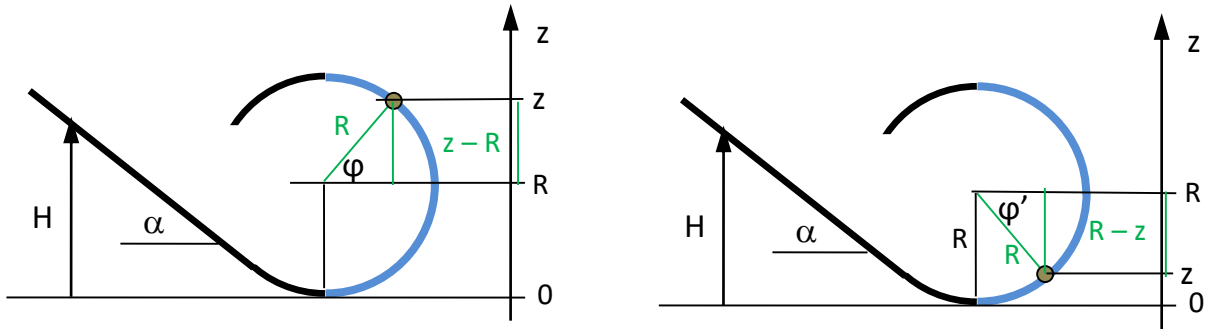
A (2) egyenletből kifejezhetjük a nyomóerőt a φ szög függvényében:

$$F_{ny} = ma_{cp} - mg \sin \varphi .$$

Mivel $a_{cp} = v^2/R = R\omega^2$, tudnunk kell azt is, hogy adott helyen mekkora a test (szög)sebessége.

Az (1) egyenlet egy differenciálegyenlet, aminek megoldása a $\varphi(t)$ függvény. Ezt deriválva megkapjuk $\omega(t)$ -t, és a két függvényből az időt kiküszöbölve elvileg előállítható az $\omega(\varphi)$ függvény. Sajnos az első differenciálegyenletnek nincs analitikus megoldása, így ez az út most nem járható. Ugyanakkor az első egyenletből közvetlenül az $\omega(\varphi)$ függvényt meg tudnánk határozni integrálással (ld. az **5/14.** feladatot). Viszont mivel a súrlódás elhanyagolható, egyszerűbben ki tudjuk fejezni a sebességet a magassággal energia-megmaradást felírva:

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{konst.}: \quad mgH + 0 = mgz + \frac{1}{2} mv^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = 2g(H-z)$$



A centripetális gyorsulás tehát

$$a_{\text{cp}} = v^2 / R = 2g(H-z) / R .$$

Ki kell még fejeznünk $\sin\varphi$ -t is z -vel és R -rel:

$$\sin\varphi = (z-R) / R .$$

[Az alsó íven $\sin|\varphi'| = (R-z) / R$, de ott $\varphi' < 0$ és $z-R < 0$, tehát $|\varphi'| = -\varphi'$ és $|z-R| = -(z-R) = R-z$.]

Helyettesítsünk be mindent a nyomóerőre rendezett egyenletbe:

$$F_{\text{ny}} = ma_{\text{cp}} - mg \sin\varphi = m \cdot 2g(H-z) / R - mg (z-R) / R = mg (2H-3z+R) / R ,$$

vagy a z koordinátát kiemelve

$$F_{\text{ny}} = (2H/R+1)mg - 3mg/R \cdot z .$$

Látható, hogy z növekedésével csökken a nyomóerő. Ha $z = (2H+R)/3$, akkor $F_{\text{ny}} = 0$. Ennél feljebb nem jut el a test, hanem elvág a vályú falától; ez tehát megadja azt is, hogy minimum milyen magasságból kell elindítani a testet, hogy végigmenjen a vályún (nem elég $2R$ magasságból elindítani).

Gyakorló feladatok a zárthelyire

5/6. Körpályán egyenletesen lassuló mozgással mozgó anyagi pont egy félkör megtétele közben elveszti sebessége felét. Hol áll meg?

Megoldás

Nem tudunk sokat arról, hogy milyen felületen, milyen erő hatására mozog ez a test. Legegyszerűbb esetként feltehetjük, hogy kötélt tartja körpályán, és vízszintes felületen mozog. Mivel egyenletesen lassuló mozgást végez, a csúszási súrlódási erő az, ami fékezi a mozgást.

Felírhatjuk a test mozgásegyenletét az összes erőt (nehézségi erő, a felület által kifejtett nyomóerő, kötél-erő, csúszási súrlódási erő) figyelembe véve:

$$\text{vektori alakban: } \mathbf{ma} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_s$$

ill. a komponenseire bontva:

$$\text{függőleges: } F_{ny} - mg = 0 \rightarrow F_{ny} = mg$$

$$\text{sugar irányú: } ma_{cp} = F_k$$

$$\text{érintő irányú: } ma_t = -F_s = -\mu F_{ny} = -\mu mg$$

Utóbbiból kapjuk meg, hogyan változik a test sebessége az időben:

$$\rightarrow a_t = \dot{v} = -\mu g \rightarrow v = v_0 - \mu g t \rightarrow s = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2 \quad (s \text{ az } R \text{ sugarú körön megtett út})$$

Tudjuk, hogy

$$\text{először } t_1 \text{ idő alatt a sebessége a felére csökken: } v(t_1) = v_0 - \mu g t_1 = \frac{v_0}{2} \quad (1)$$

$$\text{és megtesz egy félkört, azaz } s_1 = s(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \mu g t_1^2 = \pi R \quad (2)$$

majd valamennyi idő elteltével megáll, jelöljük ezt az időt t_2 -vel, ezalatt

$$\text{a sebessége } \frac{v_0}{2} \text{-ről nullára csökken: } v(t_2) = \frac{v_0}{2} - \mu g t_2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{kérdés, mekkora utat tesz meg: } s_2 = s(t_2) = \frac{v_0}{2} t_2 - \frac{1}{2} \mu g t_2^2 = ? \quad (4)$$

A négy egyenletben ismeretlen v_0 , t_1 , t_2 és s_2 .

Fejezzük ki

$$(1)\text{-ből } t_1\text{-et: } t_1 = \frac{v_0}{2\mu g}, \text{ ill.}$$

$$(3)\text{-ből } t_2\text{-t: } t_2 = \frac{v_0}{2\mu g}.$$

Látható, hogy $t_1 = t_2$: mivel a test gyorsulása (lassulása) állandó, ugyanannyi idő alatt veszíti el a sebességének a felét v_0 -ról $\frac{v_0}{2}$ -re, mint $\frac{v_0}{2}$ -ről 0-ra. A megtett út viszont nem egyenlő.

Helyettesítsük be t_1 -et (2)-be:

$$s_1 = v_0 \frac{v_0}{2\mu g} - \frac{1}{2} \mu g \left(\frac{v_0}{2\mu g} \right)^2 = \frac{4v_0^2 - v_0^2}{8\mu g} = \frac{3v_0^2}{8\mu g} = \pi R, \quad (5)$$

és t_2 -t (4)-be:

$$s_2 = \frac{v_0}{2} \frac{v_0}{2\mu g} - \frac{1}{2} \mu g \left(\frac{v_0}{2\mu g} \right)^2 = \frac{2v_0^2 - v_0^2}{8\mu g} = \frac{v_0^2}{8\mu g}, \quad (6)$$

(5)-ből kifejezhető a kezdősebesség négyzete a gyorsulással:

$$v_0^2 = \frac{8}{3} \mu g \pi R,$$

amit beírhatunk (6)-ba (vagy egyszerűen elosztjuk a két egyenletet egymással):

$$s_2 = \frac{v_0^2}{8\mu g} = \frac{\frac{8}{3} \mu g \pi R}{8\mu g} = \frac{\pi R}{3}, \text{ tehát még egy hatod kört tesz meg a test.}$$

A feladatot végigszámolhatjuk úgy is, hogy nem írjuk fel a gyorsulást a súrlódási erőből, hanem csak annyit használunk fel, hogy állandó a test gyorsulásának a nagysága.

Számolhatunk szögváltozóval is:

$$\beta = \text{konst.} \quad (\beta < 0!) \rightarrow \omega = \omega_0 + \beta t \rightarrow \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$$

Tudjuk, hogy

először t_1 idő alatt a szögsebessége a felére csökken: $\omega(t_1) = \omega_0 + \beta t_1 = \frac{\omega_0}{2}$ (1)

és megtesz egy félkört, azaz $\varphi_1 = \varphi(t_1) = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \beta t_1^2 = \pi$ (2)

majd valamennyi idő elteltével megáll, jelöljük ezt az időt t_2 -vel, ezalatt

a szögsebessége $\frac{\omega_0}{2}$ -ről nullára csökken: $\omega(t_2) = \frac{\omega_0}{2} + \beta t_2 = 0$ (3)

kérdés, mekkora a szögelfordulás: $\varphi_2 = \varphi(t_2) = \frac{\omega_0}{2} t_2 + \frac{1}{2} \beta t_2^2 = ?$ (4)

A négy egyenletben ismeretlen ω_0 , t_1 , t_2 és φ_2 .

Fejezzük ki

$$(1)\text{-ből } t_1\text{-et: } t_1 = -\frac{\omega_0}{2\beta}, \text{ ill.}$$

$$(3)\text{-ből } t_2\text{-t: } t_2 = -\frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Helyettesítsük be t_1 -et (2)-be:

$$\varphi_1 = \omega_0 \left(-\frac{\omega_0}{2\beta}\right) + \frac{1}{2} \beta \left(-\frac{\omega_0}{2\beta}\right)^2 = \frac{-4\omega_0^2 + \omega_0^2}{8\beta} = \frac{-3\omega_0^2}{8\beta} = \pi, \quad (5)$$

ill. t_2 -t (4)-be:

$$\varphi_2 = \frac{\omega_0}{2} \left(-\frac{\omega_0}{2\beta}\right) + \frac{1}{2} \beta \left(-\frac{\omega_0}{2\beta}\right)^2 = \frac{-2\omega_0^2 + \omega_0^2}{8\beta} = \frac{-\omega_0^2}{8\beta}. \quad (6)$$

(5)-ből kifejezhető a kezdő szögsebesség a szöggyorsulással:

$$\omega_0^2 = -\frac{8}{3} \beta \pi,$$

amit beírhatunk (6)-ba (vagy egyszerűen elosztjuk a két egyenletet egymással):

$$\varphi_2 = -\frac{\omega_0^2}{8\beta} = -\frac{-\frac{8}{3}\beta\pi}{8\beta} = \frac{\pi}{3}, \text{ tehát még egy hatod kört tesz meg a test.}$$

5/7. Egy ω szögsebességgel forgó vízszintes korongon egy m tömegű anyagi pont helyezkedik el. A tapadási súrlódási tényező μ_t . Milyen r sugáron belül marad a koronghoz képest nyugalomban a fenti tömegpont?

Megoldás

A testre hat függőlegesen, a körmozgás síkjára merőlegesen a nehézségi erő és a korong által kifejtett nyomóerő, ezeknek az eredője zérus; és a tapadási súrlódási erő, ami a körpálya origója felé mutat (ha nem hatna tapadási súrlódási erő, akkor a test nem maradna körpályán, hanem távolodna az origótól). A tapadási súrlódási erő adja a test centripetális gyorsulását.

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F}_t$$

$$m\mathbf{a}_\perp = F_{ny} - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg$$

$$m\mathbf{a}_{cp} = F_t$$

Tudjuk, hogy $F_t \leq F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = \mu_t mg$.

A centripetális gyorsulást kifejezzük a szögsebességgel:

$$m\mathbf{a}_{cp} = m r \omega^2.$$

Ezekből

$$m r \omega^2 \leq \mu_t m g \quad \rightarrow \quad r \leq \frac{\mu_t g}{\omega^2}.$$

5/8. Milyen φ szöggel kell az $R = 50$ m sugarú kanyarban az úttestet megdőnteni, ha a rajta haladó autók sebessége 72 km/h? A cél az, hogy ónos esőben (amikor $\mu = 0$) se csússzanak meg oldalirányban az autók.

Megoldás

A nehézségi erő és a (lejtő síkjára merőleges) nyomóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ny}$$

A függőleges komponensek:

$$ma_{\perp} = F_{ny,z} - mg = F_{ny} \cos\varphi - mg = 0$$

$$\rightarrow F_{ny} = mg / \cos\varphi$$

A sugár irányú komponens:

$$ma_{cp} = F_{ny,x} = F_{ny} \sin\varphi = (mg/\cos\varphi) \sin\varphi = mg \operatorname{tg}\varphi$$

$$(ma_{cp} = mg \operatorname{tg}\varphi \text{ leolvasható az ábráról is.})$$

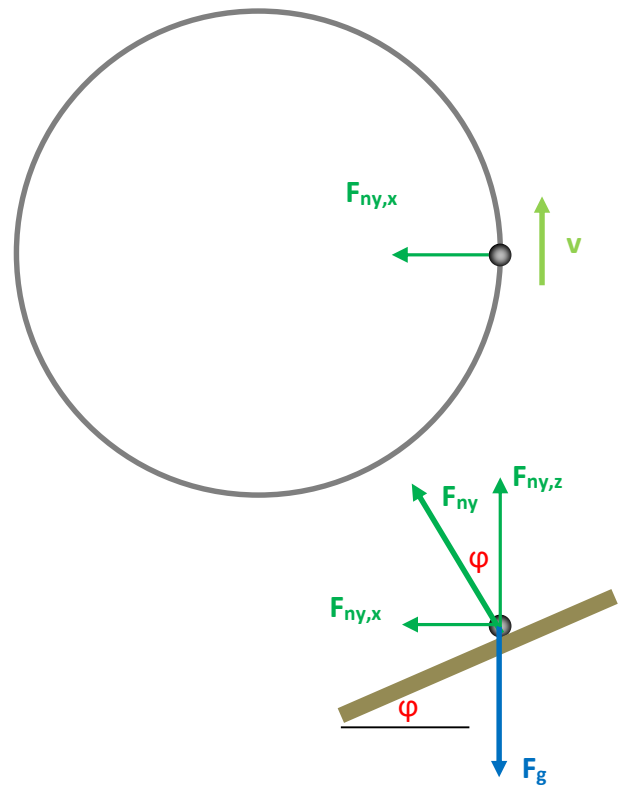
A centripetális gyorsulást kifejezzük a sebességgel:

$$ma_{cp} = mv^2/R,$$

tehát

$$mv^2/R = mg \operatorname{tg}\varphi$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}\varphi = v^2 / (gR) = 0,8 \quad \rightarrow \quad \varphi = 38,66^\circ .$$



5/9. (DRS. 6.9) Kúpíngá hossza ℓ , a kúpszög 2α . Mekkora a keringési idő?

Megoldás

A nehézségi erő és a kötélirányú húzóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja. Az 5/8. feladathoz hasonlóan a függőleges és sugár irányú komponenseket felírva és abból kifejezve, vagy közvetlenül az erőket felrajzolva látható, hogy

$$ma_{cp} = mg \operatorname{tg}\alpha.$$

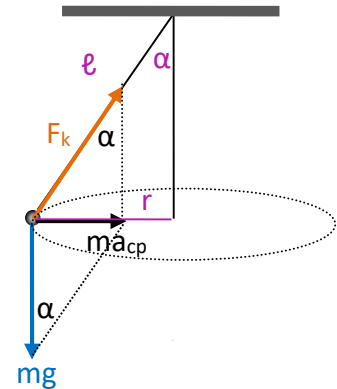
A centripetális gyorsulást a szögsebességgel írjuk fel, mivel a keringési időt akarjuk kifejezni, és $\omega = 2\pi/T$; tehát $a_{cp} = r\omega^2$.

A körpálya sugara $r = \ell \sin\alpha$.

Ezekből

$$ma_{cp} = mr\omega^2 = m\ell \sin\alpha \cdot \omega^2 = mg \operatorname{tg}\alpha$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell \cos\alpha}} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos\alpha}{g}}.$$



5/10. Félgömbben a sugár egynegyedénél ill. háromnegyedénél kering egy-egy golyó, vízszintes síkban, súrlódás nélkül. Mennyi a keringési idők aránya?

5/11. Az $y = (0,5\text{cm}^{-1})x^2$ egyenletű parabola y tengely körüli forgatásával nyert paraboloid belsejében az $y_1 = 2\text{ cm}$ és az $y_2 = 4,5\text{ cm}$ magasan elhelyezkedő síkokban két golyó kering.

- a) Milyen sebességgel keringenek?
- b) Mennyi idő alatt tesznek meg egy fordulatot?

Megoldás

a) A nehézségi erő és a forgási paraboloid adott pontbeli érintősíkjára merőleges nyomóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.

A mértékegységek miatt írjuk fel a parabola egyenletét úgy, hogy bevezetünk egy 'a' paramétert:

$$y = ax^2, \text{ és tudjuk, hogy } a = 0,5\text{ cm}^{-1}.$$

Behelyettesítéskor erre figyelni kell; legegyszerűbb cm-ben számolni, de akkor g-t is át kell számolni cm/s^2 -be: $g = 1000\text{ cm/s}^2$.

A parabola érintője dy/dx , ahol tehát

$$dy/dx = d(ax^2)/dx = 2ax,$$

vagyis az érintőnek az x tengellyel bezárt α szögére $\operatorname{tg}\alpha = dy/dx = 2ax$.

Az erőket felrajzolva látható, hogy $ma_{cp} = mg \operatorname{tg}\alpha$.

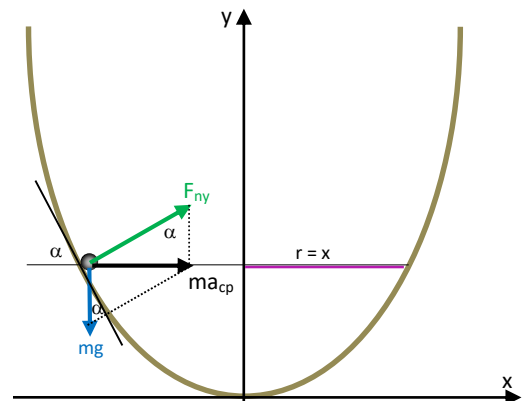
A centripetális gyorsulás a sebességgel kifejezve $a_{cp} = v^2/r$.

A körpálya sugara mindig az adott y magasság felhasználásával a parabola egyenletéből visszszámolható $x = \sqrt{y/a}$ érték, azaz $x_1 = 2\text{ cm}$, $x_2 = 3\text{ cm}$.

Ezekből $ma_{cp} = mv^2/r = mv^2/x = mg \operatorname{tg}\alpha = mg \cdot 2ax$

$$\rightarrow v^2 = 2ax^2g = 2y g \rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1000} = \sqrt{4000} = 63,25\text{ cm/s}, v_2 = \sqrt{9000} = 94,87\text{ cm/s}.$$

b) $\omega = v/r = v/x = \sqrt{2ag} = 2\pi/T \rightarrow T = 2\pi / \sqrt{2ag} = 0,1987\text{ s}$ a keringés helyétől függetlenül.



5/12. Egy R sugarú félgömb peremétől súrlódásmentesen legördülő m tömegű golyó mekkora erővel nyomja a félgömb fenekét?

Megoldás

A körpálya alsó pontján a félgömbre merőleges, függőlegesen felfelé mutató nyomóerő és a függőlegesen lefelé mutató nehézségi erő eredője felfelé mutat a körpálya közepe felé, és ez adja a test centripetális gyorsulását:

$$ma_{cp} = F_{ny} - mg \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg + ma_{cp} = mg + mv^2/R$$

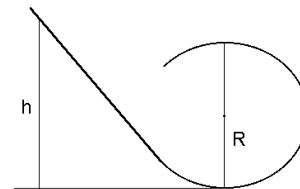
A sebességet kiszámíthatjuk energia-megmaradásból (mivel a súrlódás elhanyagolható):

$$mgR = \frac{1}{2} mv^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = 2gR.$$

Tehát

$$F_{ny} = mg + mv^2/R = mg + m(2gR)/R = mg + 2 mg = 3 mg.$$

5/13. Ferde lejtő átmegy függőleges körpályába. A lejtőn legalább milyen H magasságból kell a testet elengedni, ha azt akarjuk, hogy végigmenjen a körpályán (a legfelső pontnál se váljon el)? A súrlódás elhanyagolható. Mekkora nyomóerő hat a testre a körpálya legalsó pontján?



Megoldás

A körpálya legfelső pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen lefelé mutat, így

$$ma_{cp} = mg + F_{ny} \quad \rightarrow \quad F_{ny} = ma_{cp} - mg = mv_{fent}^2/R - mg.$$

A nyomóerő nem lehet negatív:

$$F_{ny} \geq 0: \quad mv_{fent}^2/R - mg \geq 0 \quad \rightarrow \quad v_{fent}^2 \geq gR .$$

A sebesség energia-megmaradásból kifejezve:

$$mg H = mg 2R + \frac{1}{2} m v_{fent}^2 \quad \rightarrow \quad v_{fent}^2 = 2g(H-2R) ,$$

ezt beírva a $v^2 \geq gR$ feltételbe

$$2g(H-2R) \geq gR$$

$$\rightarrow H \geq 5/2 R , \text{ tehát legalább ilyen magasságból kell elindítani a testet}$$

A körpálya legalsó pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen felfelé mutat, így

$$ma_{cp} = F_{ny} - mg \quad \rightarrow \quad F_{ny} = ma_{cp} + mg = m v_{lent}^2 / R + mg.$$

A sebesség energia-megmaradásból kifejezve:

$$mg H = \frac{1}{2} m v_{lent}^2 \quad \rightarrow \quad v_{lent}^2 = 2g H ,$$

és ezt a nyomóerőbe beírva

$$F_{ny} = 2mg H/R + mg .$$

Mivel $H \geq 5/2 R$, ezért

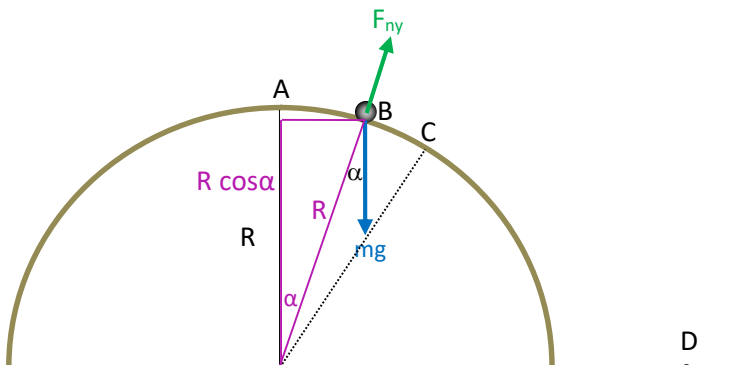
$$F_{ny} \geq 2mg \cdot (5/2) + mg = 6 mg.$$

A nyomóerő a legalsó ponton $F_{ny} \geq 6mg$, tehát a test gyorsulása legalább 6g! (Hullámvasút!)

5/14. R sugarú félgömb tetejéről (A pont) súrlódásmentesen csúszik le egy golyó.

- Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét! Bontsuk fel a golyóra ható erőket és a gyorsulást érintőleges és radiális komponensekre!
- Mekkora a golyó szögsebessége a B pontnál?
- Mekkora erővel nyomja a golyó a gömböt a B pontnál?
- A golyó a C pontnál hagyja el a gömböt. Mekkora az α_0 szög?
- Mennyi a golyó sebessége a C pontnál?
- A golyó a D pontnál ér földet. Milyen távol van a D pont a félgömbtől?

Megoldás



a) A golyótól a félgömb középpontjához húzott sugárnak a függőlegessel bezárt szöge α , a szögsebesség tehát $\omega = \dot{\alpha}$.

A golyó mozgásegyenlete vektori alakban: $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny}$.

Bontsuk fel a nehézségi erőt tangenciális és radiális komponensre, és írjuk fel a test gyorsulását polárkoordináta-rendszerben:

tangenciális komponens:

$$ma_t = mR \, d\omega/dt = mg \sin \alpha \quad (1)$$

radiális komponens:

$$ma_{cp} = mR\omega^2 = mg \cos \alpha - F_{ny} \quad (2)$$

b) Szükségünk lesz az $\omega(\alpha)$ függvényre. Ezt kétféleképpen kaphatjuk meg:

A differenciálegyenlet-rendszer megoldásával: **EZT A MEGOLDÁST NEM KELL TUDNI ZH-N!**

Az (1) egyenlet átalakításával az ω szögsebesség időfüggése ($d\omega/dt$) helyett nézhetjük a szögsebességnek az α szögtől való függését ($d\omega/d\alpha$):

$$mR \frac{d\omega}{dt} = mR \frac{d\omega}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = mR\omega \frac{d\omega}{d\alpha} = mg \sin \alpha \cdot$$

Ezt szeparáljuk és integráljuk:

$$\int_0^\omega R\omega \, d\omega = \int_0^\alpha g \sin \alpha \, d\alpha \rightarrow R \omega^2/2 = g (1 - \cos \alpha) \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos \alpha)}{R}}.$$

Ugyanezt kifejezhetjük az energia-megmaradásból is:

a golyó R magasságban zérus sebességgel indul, és $R \cos \alpha$ magasságban $v = R\omega$ sebessége van:

$$mg R = mg R \cos \alpha + \frac{1}{2} m (R\omega)^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos \alpha)}{R}}.$$

c) A (2) egyenletből a nyomóerő $F_{ny} = mg \cos \alpha - mR\omega^2$.

Az előbb kifejeztük ω -t az α függvényében, helyettesítsük be ide:

$$F_{ny} = mg \cos \alpha - 2 mg (1 - \cos \alpha) = mg (3 \cos \alpha - 2) \text{ a nyomóerő az } \alpha \text{ szög függvényében.}$$

d) A golyó akkor hagyja el a gömböt, amikor $F_{ny} = 0$,

$$mg(3 \cos \alpha - 2) = 0 \rightarrow \cos \alpha_0 = 2/3 \rightarrow \alpha_0 = 48,19^\circ.$$

e) A golyó sebességének nagysága a C pontban

$$v_0 = R \cdot \omega(\alpha_0) = \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha_0)} = \sqrt{2Rg/3} \approx 2,58\sqrt{R},$$

iránya pedig az érintő iránya, azaz

$$\mathbf{v}_0 = \cos \alpha_0 \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha_0)} \mathbf{i} - \sin \alpha_0 \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha_0)} \mathbf{k} \approx 1,72\sqrt{R} \mathbf{i} - 1,92\sqrt{R} \mathbf{k}.$$

f) Ha a félgömb középpontjába helyezzük az origót, a golyó az

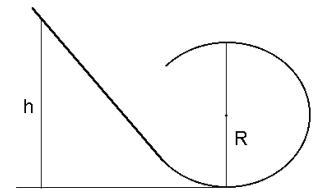
$$\mathbf{r}_0 = (R \sin \alpha_0) \mathbf{i} + R \cos \alpha_0 \mathbf{k} \approx 0,745R \mathbf{i} + 0,667R \mathbf{k} \text{ pontból indul (C pont).}$$

Tehát $z(t) = 0,667R - 1,92\sqrt{R}t - \frac{1}{2}gt^2$.

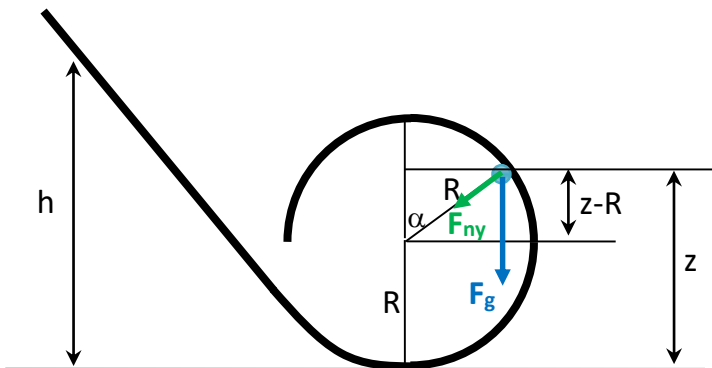
$$z = 0, \text{ ha } t_1 \approx 0,22\sqrt{R},$$

és ekkor $x(t_1) = 0,745R + 1,72\sqrt{R}t_1 = 1,12R$, azaz a félgömbtől $0,12R$ távolságra ér földet a golyó.

5/15. Az egyenes lejtő érintőként csatlakozik a kör keresztmetszetű függőleges vályúhoz. A lejtőn h magasságból kezdősebesség nélkül elindul egy test. Adjuk meg azt a $z(h)$ függvényt, ami leírja, hogy a h magasság függvényében milyen z magasságban fog elválni a test a körpályától! Ábrázoljuk is a függvényt (ügyelve az értelmezési tartományra)! A test súrlódás nélkül csúszik.



Megoldás



A testre hat az \mathbf{F}_g nehézségi erő és a vályú falától származó \mathbf{F}_{ny} nyomóerő, tehát a mozgásegyenlet:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ny}, \text{ aminek}$$

érintő irányú komponense

$$ma_t = mg \sin \alpha \text{ és}$$

radiális komponense

$$ma_{cp} = mg \cos \alpha + F_{ny};$$

utóbbiból a nyomóerő

$$F_{ny} = ma_{cp} - mg \cos \alpha.$$

$\cos \alpha$ a z magassággal kifejezve az ábráról: $\cos \alpha = (z-R)/R$.

Ahhoz, hogy a nyomóerőt felírjuk α függvényében, ismerni kell a_{cp} -t α függvényében. Mivel a súrlódás elhanyagolható, számolhatunk energia-megmaradásból:

$$mgh = mgz + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v^2 = (R\omega)^2 = 2g(h-z)$$

$$a_{cp} = v^2/R = 2g(h-z)/R$$

Tehát

$$F_{ny} = ma_{cp} - mg \cos\alpha = 2mg(h-z)/R - mg(z-R)/R = mg(2h-3z+R)/R.$$

Ott válik el a test a pályától, ahol $F_{ny} = 0$, azaz

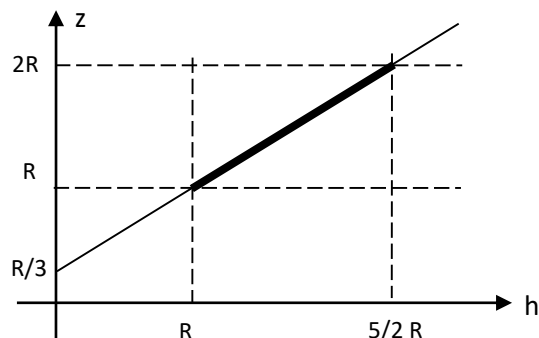
$$mg(2h-3z+R)/R = 0,$$

a keresett $z(h)$ függvény tehát

$$z = (2h+R)/3 = R/3 + 2/3 \cdot h$$

Ez egy $R/3$ tengelymetszetű és $2/3$ meredekségű egyenes, de annak csak az a szakasza, ahol

z értéke R és $2R$ közé esik (mert a pályá alsó felében nem válik el a golyó, és $z = 2R$ esetén meg már végigmegy a pályán). Az $R < z < 2R$ feltételből $R < h < 5/2 R$.



Körpálya általános gravitációs erővel

5/16. Milyen távolságban keringenek a Föld középpontjától az ún. álló műholdak? (szögsebességük megegyezik a Föld szögsebességével)

Megoldás

A testre egyetlen erő hat, a Föld vonzóereje, ez tartja körpályán:

$$ma_{cp} = m\omega^2 = \gamma m \cdot m_{Föld} / r^2 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\gamma m_{Föld}}{\omega^2}}, \quad \text{ahol } \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2},$$

$$m_{Föld} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$

$$r_{Föld} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24 \cdot 60 \cdot 60) = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

amiből $r = 42,3 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Számolhatunk úgy is, hogy γ és $m_{Föld}$ értéke helyett felhasználjuk azt, hogy a Föld felszínén

$$mg = \gamma m \cdot m_{Föld} / r_{Föld}^2, \text{ azaz } \gamma m_{Föld} = g r_{Föld}^2$$

$$\text{vagyis } m\omega^2 = \gamma m \cdot m_{Föld} / r^2 = m \cdot g \cdot r_{Föld}^2 / r^2 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{g r_{Föld}^2}{\omega^2}}$$

5/17. Számítsuk ki a Hold centripetális gyorsulását kétféleképpen: a

a) gravitációs erőtvényt,

b) körmozgás adatait felhasználva.

A Hold pályájának sugara kb. 60-szorosa a Föld sugarának ($R_{Föld} \approx 6400 \text{ km}$),

a Hold keringési ideje 27 nap.

Megoldás

$$\text{a) } a_{cp} = \gamma m_{Föld} / d^2$$

$$\rightarrow a_{cp} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \cdot (6 \cdot 10^{24} \text{ kg}) / (60 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ m})^2 = 2,714 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2.$$

$$\text{b) } a_{cp} = R\omega^2 = 60R_{Föld} (2\pi/T)^2 = 60 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot (2\pi/(28 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}))^2 = 2,590 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

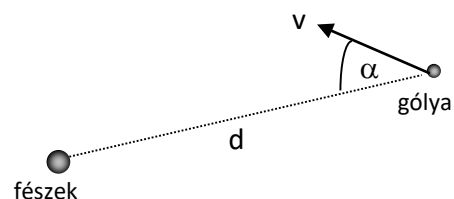
Érdeklődőknek: (nem zh feladat!)

**kancsal fecske, avagy inkább kancsal gólya
(vagy még inkább normális molylepke)**

A kancsal gólya szeretne a fészkére repülni. Ő azt hiszi, hogy egyenesen a fészke felé repül, de kancsalsága miatt mindig az őt a fészkekkel összekötő egyenessel állandó α szöget bezárva repül.

A gólya sebességének nagysága állandó (v).

Odaér-e valaha a fészkére?



Megoldás

Síkbeli polárkoordináta-rendszerben a sebességvektor

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

azaz a sebességvektor radiális komponense $v_r = \dot{r}$, tangenciális komponense $v_t = r\dot{\varphi}$.

Legyen a fészek az origóban, a gólya helyvektora \mathbf{r} . Bontsuk fel a gólya sebességét radiális és tangenciális komponensekre: $\mathbf{v} = -v \cos\alpha \mathbf{e}_r + v \sin\alpha \mathbf{e}_\varphi$.

A radiális komponens tekintve tehát

$$(1) \dot{r} = -v \cos\alpha$$

Integrálva: $r = d - (v \cos\alpha) t$, azaz a gólya távolsága a fészektől lineárisan csökken, és $t = d / (v \cos\alpha)$ idő alatt $r = 0$, vagyis a gólya beér a fészkébe!

A kérdést tehát megválaszoltuk, de nézzük meg azt is, milyen pályán repül a gólya.

A tangenciális komponens tekintve

$$(2) r\dot{\varphi} = v \sin\alpha, \text{ ahol}$$

α a gólya kancsalságának szöge, ez konstans,

φ a fészektől a fecskéhez t időben húzott helyvektornak a 0 időben húzott helyvektorral bezárt szöge.

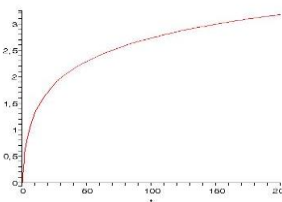
$$r(t)\text{-t behelyettesítve } (d - vt \cos\alpha) \frac{d\varphi}{dt} = v \sin\alpha,$$

$$\text{szeparálva és integrálva: } \int \frac{1}{d - v \cos\alpha \cdot t} dt = \frac{1}{v \sin\alpha} \int d\varphi \quad \rightarrow \quad \frac{1}{-v \cos\alpha} \ln \frac{d - v \cos\alpha \cdot t}{d} = \frac{\varphi}{v \sin\alpha},$$

$$\text{amiből } \varphi = -\text{tg}\alpha \cdot \ln\left(1 - \frac{v \cos\alpha}{d} t\right).$$

$t \rightarrow \frac{d}{v \cos\alpha}$ esetén ez a függvény végtelenhez tart, vagyis a

gólya végtelen sokszor fordul körbe, amíg beér a fészkébe, de ezt véges idő alatt és véges úton teszi.



Határozzuk meg a gólya pályáját!

Az egyik lehetőség, hogy az $r(t)$, $\varphi(t)$ függvényekből kiküszöböljük t -t:

$$r = d - (v \cos\alpha)t \Rightarrow t = (d - r) / (v \cos\alpha) \text{ és } \varphi = -\text{tg}\alpha \cdot \ln\left(1 - \frac{v \cos\alpha}{d} \cdot \frac{d - r}{v \cos\alpha}\right) = -\text{tg}\alpha \cdot \ln \frac{r}{d};$$

a másik lehetőség, hogy az (1) és (2) differenciálegyenletet elosztjuk egymással:

$$\frac{v_t}{v_r} = \frac{r d\varphi}{dr} = \frac{v \sin\alpha}{-v \cos\alpha} = -\text{tg}\alpha, \text{ szeparáljuk: } \int_0^\varphi d\varphi = -\text{tg}\alpha \cdot \int_d^r \frac{1}{r} dr \text{ és integráljuk:}$$

$$\varphi = -\text{tg}\alpha \cdot \ln \frac{r}{d}$$

Ez az ún. logaritmikus spirális egyenlete, melynek jellemzője, hogy egy-egy teljes fordulatot megtéve a középponttól mért távolság mértani sor szerint (mindig ugyanannyi részére) csökken:

$$r\text{-et kifejezve } \varphi(r)\text{-ből } r = d \cdot e^{-\varphi/\text{tg}\alpha}, \quad \frac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\text{tg}\alpha}},$$

egy fordulatot megtéve $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$,

$$\text{így } \frac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{2\pi}{\text{tg}\alpha}} = \text{konst.}$$

