Síkbeli polárkoordináta-rendszerben a test helyvektora, sebessége és gyorsulása általános esetben:

$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \ldots = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$

$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ldots = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\mathbf{e}_\varphi$

Ha a test körpályán mozog, akkor r = konst., ezért a körmozgás egyetlen változóval,
a φ szögváltozóval leírható.
$\varphi(t)$ megadja a test helyét a körvonalon; φ radiánban értendő (dimenziómentes);
a szögsebesség $\omega = \dot{\varphi}$ $[s^{-1}]$;
a szöggyorsulás $\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ $[s^{-2}]$.

Mivel r = konst. esetén $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, ezért a fenti egyenletek egyszerűsödnek: a test
sebessége $\mathbf{v} = r\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$: érintő irányú,
nagysága $v = r\dot{\varphi} = r\omega$;
gyorsulása $\mathbf{a} = -r\dot{\varphi}^2\,\mathbf{e}_r + r\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$, aminek
sugár (radiális) irányú komponense, a centripetális gyorsulás a sebességvektor irányának változását okozza, ez a körpálya közepe felé mutat és nagysága

$a_{cp} = r\omega^2 = v^2/r = v\omega$;

érintő (tangenciális) irányú komponense a sebességvektor nagyságának változását okozza, nagysága

$a_t = \dot{v} = r\beta = r\dot{\omega} = r\ddot{\varphi}$.

Ha a_t és v ugyanolyan irányúak, akkor a test (szög)sebessége nő, ha ellentétesek, akkor csökken.

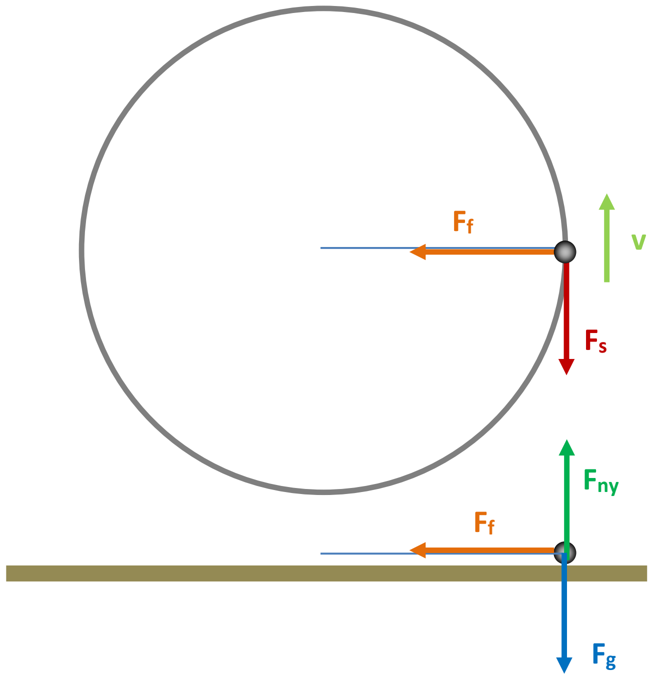
Körmozgás esetén a testre ható erőket sugár irányú, érintő irányú és a körpálya síkjára merőleges komponensekre bontjuk (hengerkoordináta-rendszer).

- A körpálya síkjára merőleges komponensek eredője zérus kell legyen, mivel a test nem mozdul ki abból a síkból.
- Az érintő irányú komponensek eredője határozza meg, hogy hogyan változik a sebesség nagysága. Lehetséges, hogy $a_t = 0$, ekkor a test egyenletes körmozgást végez.
- A sugár irányú komponensek eredője soha nem lehet zérus ($a_{cp} \neq 0$!!!), hanem ez adja a test centripetális gyorsulását (ami miatt a test sebességének iránya változik). A centripetális gyorsulás nagysága a pillanatnyi (szög)sebességtől függ.

Körmozgás létrejöhet különböző kényszererők (nyomóerő, kötélerő, rúderő), ill. a nehézségi erő hatására. Vízszintes síkban fekvő körpálya esetén a nehézségi erő merőleges a körpálya síkjára, és a kényszererő (ill. ferde felület, kötél vagy rúd esetén a függőleges komponense) ellensúlyozza, így a nehézségi erő közvetlenül nem befolyásolja a körmozgást. Függőleges síkban fekvő körpálya esetén viszont a nehézségi erőnek van tangenciális komponense (kivéve az alsó és a felső pontot), ami miatt a sebesség nagysága változik.

5/1. Asztalon $m = 0{,}5$ kg-os golyót $\ell = 0{,}5$ m-es fonálon $v_0 = 5$ m/s kezdősebességgel meglökünk úgy, hogy a kezdősebesség merőleges a fonálra. A golyó és az asztal közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$.
Mekkora lesz 2 s múlva a golyó sebessége és a fonálerő?

Megoldás



A testre ható erők:

- F_g gravitációs erő
- F_{ny} az asztal által a golyóra kifejtett nyomóerő
- F_f fonálerő
- F_s csúszási súrlódási erő

A test mozgásegyenlete vektori alakban $m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_f} + \mathbf{F_s}$.
A mozgásegyenlet komponensei
1.) függőleges irányban, a körpálya síkjára merőlegesen:

$ma_\perp = F_{ny} - F_g = F_{ny} - mg$;

2.) érintő irányban: a súrlódási erő a sebességgel ellentétes irányba mutat:

$ma_t = -F_s$;

3.) sugár irányban: a fonálerő a kör középpontja felé mutat:

$ma_{cp} = F_f$.

1.) A függőleges komponens esetén az $a_\perp$ gyorsulás zérus kell legyen, mivel a golyó vízszintes síkban mozog:

$a_\perp = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg.$

A nyomóerő nagyságára a súrlódási erőnél lesz szükségünk.

2.) Az érintő irányú komponensből tudjuk meg, hogy hogyan változik időben a golyó sebességének a nagysága, mivel $a_t = \dot{v}$.
A súrlódási erő nagysága $F_s = \mu F_{ny} = \mu mg$, tehát $ma_t = -\mu mg \quad \rightarrow$
a tangenciális gyorsulás

$a_t = -\mu g = \text{konst.}$

Mivel a gyorsulás állandó, ezért a sebesség

$v(t) = v_0 - \mu g \cdot t,$

v_0 és μ értékét behelyettesítve

$v(t) = 5 - 0{,}2 \cdot 10\ t = 5 - 2\ t\ .$

A megadott 2 s múlva a sebesség $v(2) = 5 - 2 \cdot 2 = 1$ m/s .

3.) A sugár irányú komponensből látjuk, hogy a fonálerő nagysága a centripetális gyorsulással arányos, ami a test sebességének négyzetével arányos:

$$F_f = ma_{cp} = m\frac{v^2}{r}\ .$$

Jelen esetben $r = \ell$, a körpálya sugara éppen a fonál hossza.

Behelyettesítve a fonálerő az adott pillanatban

$$F_f = 0{,}5 \cdot \frac{1^2}{0{,}5} = 1\ \text{N}.$$

Megjegyzés

Mennyi lenne a test sebessége 3 s múlva? A fenti függvénybe behelyettesítve

$v(3) = 5 - 2 \cdot 3 = -1$ m/s jönne ki, ami azt jelentené, hogy a golyó az eredeti iránnyal ellentétes irányba mozog, ami lehetetlen.

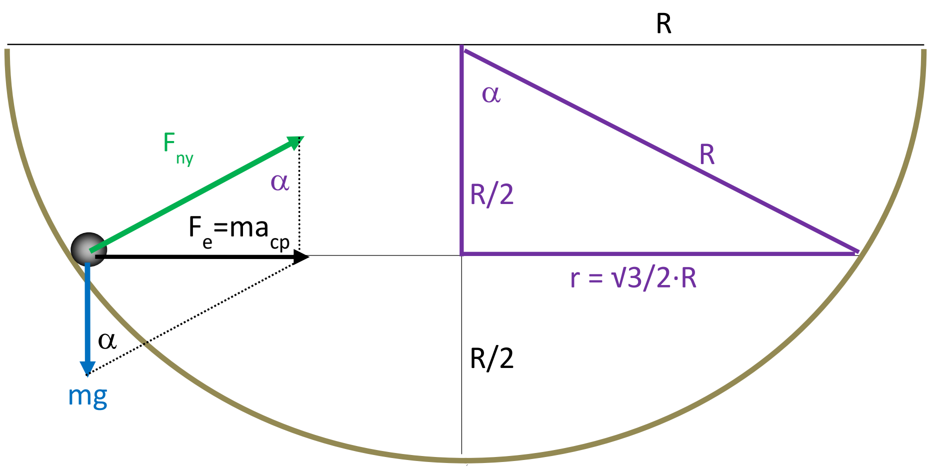
A $v(t) = v_0 - \mu g \cdot t$ összefüggés csak addig érvényes, amíg a test mozgásban van, hiszen a gyorsulását a csúszási súrlódási erő adta, ami csak mozgásban levő testre hat.

A sebesség az idő függvényében zérusra csökken $t = v_0 / (\mu g) = 5 / 2 = 2{,}5$ s alatt,

utána a testre nem hat már a csúszási súrlódási erő (és a kötélerő se, mivel $v = 0$); a testre ható erők (a nehézségi erő és a nyomóerő) eredője zérus.

5/2. Egy R = 10 cm sugarú gömb belsejében a sugár fele magasságában elhelyezkedő vízszintes síkban egy golyó kering. Számítsuk ki a keringési időt!

Megoldás



A testre ható erők:

$\mathbf{F_g}$ gravitációs erő

$\mathbf{F_{ny}}$ a gömb által a golyóra kifejtett nyomóerő

A test mozgásegyenlete vektori alakban $m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}}$.

A nyomóerő merőleges a gömb adott pontbeli érintősíkjára, tehát a gömb középpontja felé mutat. Legyen α a nyomóerőnek a függőlegessel bezárt szöge, ezzel a nyomóerő

függőleges komponense $F_{ny,z} = F_{ny} \cos\alpha$, és

vízszintes komponense $F_{ny,r} = F_{ny} \sin\alpha$.

A nyomóerő nagyságát nem tudjuk, de azt tudjuk, hogy mivel a golyó vízszintes síkban mozog, ezért a függőleges komponensek eredője zérus kell legyen; illetve hogy a nyomóerő és a gravitációs erő eredője vízszintes kell legyen, és ez adja a test centripetális gyorsulását.

A mozgásegyenlet komponensei

1.) függőleges irányban, a körpálya síkjára merőlegesen: $ma_{\perp} = F_{ny,z} - mg = F_{ny} \cos\alpha - mg = 0$;

2.) sugár irányban: $ma_{cp} = F_{ny,r} = F_{ny} \sin\alpha$;

3.) érintő irányban: a testre érintő irányú erő nem hat, $ma_t = 0$.

A 3.) egyenletből $a_t = \dot{v}$ $\rightarrow$ v = konst., a test állandó sebességgel kering.

Az 1.) egyenletből ki tudjuk fejezni a nyomóerő nagyságát:

$F_{ny} = mg/\cos\alpha$,

ezt a 2.) egyenletbe beírva kapjuk, hogy

$ma_{cp} = mg \sin\alpha/\cos\alpha = mg\,\mathrm{tg}\alpha$ (*),

amit közvetlenül is leolvashatunk az ábráról. Az erők alkotta háromszög és a jobb oldalon bejelölt háromszög hasonló háromszögek.

A feladat a golyó keringési idejét kérdezi, ezért a centripetális gyorsulást most

$a_{cp} = r\omega^2$ alakban írjuk fel.

r annak a körpályának sugara, amin a golyó kering (vízszintes síkban), ezt a gömb R sugarával kell kifejeznünk:

$r = R \sin\alpha$.

ω felírható T a periódusidővel kifejezve:

$\omega = 2\pi/T$.

Ezeket behelyettesítve

$a_{cp} = r\omega^2 = R \sin\alpha\cdot(2\pi/T)^2$.

Írjuk ezt be a (*) egyenletbe, majd rendezzük T-re:

$m R \sin\alpha\cdot(2\pi/T)^2 = mg\,\mathrm{tg}\alpha$

$\rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R\cos\alpha}{g}}$.

cosα kifejezhető a jobb oldali háromszögből:

$\cos\alpha = (R/2) / R = ½$ (vagyis $\alpha = 60°$)

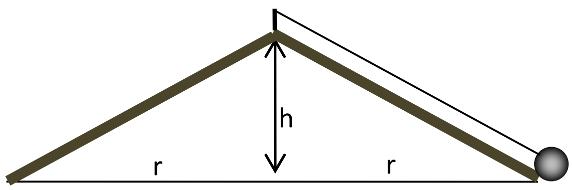
$\rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}5}{10}} = 0{,}4443$ s .

Egyéb keresztmetszetű vályúkra (parabola, stb.) ld. a gyakorló és zh feladatokat!

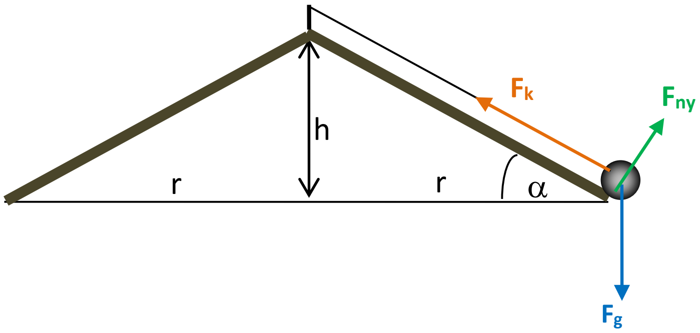
5/3. Egy körhinta kúp alakú, az alapkörének sugara r = 3 m, a közepén a magassága h = 2,2 m.

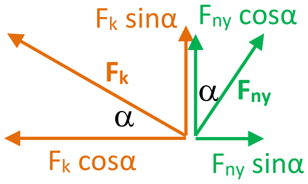
a) Milyen fordulatszámnál kezdenek el a körhinta ülései emelkedni?

b) Mekkora ekkor a kötélerő, ha a benne ülő gyerek tömege az üléssel együtt 36 kg?



Megoldás





A testre (gyerek + ülés) ható erők:

F_g gravitációs erő,

F_{ny} a körhinta által a testre kifejtett nyomóerő,

F_k kötélerő.

A test mozgásegyenlete vektori alakban: $m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_k} + \mathbf{F_{ny}}$

A kötélerőt és a nyomóerőt vízszintes és függőleges komponensekre kell bontani. (Azért nem az oldalnézetben lejtőnek kinéző felülettel párhuzamos és arra merőleges komponensekre, mert a test nem annak a síkjában mozog, ez csak annak a kúpos felületnek a metszete, ami a vízszintes körmozgást végző testet megtámasztja.)

A kötélerő

függőleges komponense $F_{k,z} = F_k \sin\alpha$,

vízszintes komponense $F_{k,x} = F_k \cos\alpha$;

a nyomóerő

függőleges komponense $F_{ny,x} = F_{ny} \cos\alpha$,

vízszintes komponense $F_{ny,z} = F_{ny} \sin\alpha$.

A mozgásegyenlet komponensei

1.) függőleges irányban, a körpálya síkjára merőlegesen:

$ma_\perp = F_{k,z} + F_{ny,z} - F_g = F_k \sin\alpha + F_{ny} \cos\alpha - mg = 0$;

2.) sugár irányban :

$ma_{cp} = F_{k,r} - F_{ny,r} = F_{k,x} - F_{ny,x} = F_k \cos\alpha - F_{ny} \sin\alpha$

(a kötélerő vízszintes komponense az origó felé mutat, ezért pozitív előjelű,
a nyomóerő vízszintes komponense kifelé mutat, ezért negatív előjelű);

3.) érintő irányban: a testre érintő irányú erő nem hat,

$ma_t = 0$.

Az érintő irányú gyorsulást azért hagyhatjuk figyelmen kívül, mert nem azt vizsgáljuk, hogy a fordulatszám fokozatosan nő, hanem különböző állandó (szög)sebességű állapotokat hasonlítunk össze. Így a 3.) egyenletből $a_t = \dot{v} \quad \rightarrow \quad v =$ konst., a test állandó sebességgel kering.

Mivel a test vízszintes síkban kering körpályán (azokat a fordulatszámokat vizsgálva, amikor még nem emelkedik el az ülés a kúpos részről), a gyorsulása a vízszintes síkú körpálya közepe felé mutató centripetális gyorsulás.

a) Először vizsgáljuk meg általánosan azokat a fordulatszámokat, aminél még nem emelkedik el a test. Fejezzük ki a nyomóerőt a fordulatszám függvényében!

A függőleges irányra felírt $F_k \sin\alpha + F_{ny} \cos\alpha - mg = 0$ egyenletből

$F_k = (mg - F_{ny} \cos\alpha) / \sin\alpha$,

ezt behelyettesítve a sugár irányba felírt $ma_{cp} = F_k \cos\alpha - F_{ny} \sin\alpha$ egyenletbe

$ma_{cp} = (mg - F_{ny} \cos\alpha) \cos\alpha / \sin\alpha - F_{ny} \sin\alpha =$

$= mg \cos\alpha / \sin\alpha - F_{ny} \cos\alpha \cdot \cos\alpha / \sin\alpha - F_{ny} \sin\alpha \cdot \sin\alpha / \sin\alpha =$

$= mg / \mathrm{tg}\alpha - F_{ny} / \sin\alpha (\cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sin\alpha) = mg / \mathrm{tg}\alpha - F_{ny} / \sin\alpha$.

A centripetális gyorsulást most a fordulatszámmal kifejezve kell felírni:

$ma_{cp} = mr\omega^2 = mr(2\pi f)^2$;

ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe megkapjuk, hogyan függ a nyomóerő a fordulatszámtól:

$mr(2\pi f)^2 = mg / \mathrm{tg}\alpha - F_{ny} / \sin\alpha$

$\rightarrow \quad F_{ny} = mg \cos\alpha - mr(2\pi f)^2 \sin\alpha$.

Látható, hogy a nyomóerő a nyugalmi $mg \cos\alpha$ értékről az 'f' fordulatszám növelésével csökken.

Az ülések akkor kezdenek el emelkedni, amikor $F_{ny} = 0$:

$mg \cos\alpha - mr(2\pi f_{krit})^2 \sin\alpha = 0$

$$\rightarrow \quad f_{krit}{}^2 = \frac{g}{4\pi^2\, r\, \mathrm{tg}\alpha} = \frac{g}{4\pi^2\, r \left(\frac{h}{r}\right)} = \frac{g}{4\pi^2\, h} \qquad \rightarrow \quad f_{krit} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} .$$

A kritikus fordulatszám csak a kúp alakú rész magasságától függ.

Behelyettesítve

$$f_{krit} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{2{,}2}} = 0{,}3393\ s^{-1}.$$

Mivel ebben a feladatban az a kritikus fordulatszám volt a kérdés, amikor elkezd emelkedni az ülés a gyerekkel, azaz amikor $F_{ny} = 0$, felírhattuk volna a mozgásegyenletet úgy, hogy nem is tartalmazza a nyomóerőt:

$ma_{\perp} = F_k \sin\alpha - mg = 0$

$ma_{cp} = F_k \cos\alpha$

A másodikból $F_k = mg / \sin\alpha$, ezt beírva az elsőbe $mr(2\pi f_{krit})^2 = (mg/\sin\alpha) \cos\alpha$, amiből kifejezhető f_{krit} (ld. feljebb).

b) A függőleges irányra felírt $F_k \sin\alpha + F_{ny} \cos\alpha - mg = 0$ egyenletből $F_{ny} = 0$ esetén:

$F_k = mg / \sin\alpha = 608{,}8$ N.

(Bonyolultabb megoldás, ha kifejezzük a kötélerőt a fordulatszám függvényében, vagyis a

$F_k = (mg - F_{ny} \cos\alpha) / \sin\alpha$

kifejezésbe behelyettesítve az f-fel kifejezett nyomóerőt:

$F_{ny} = mg \cos\alpha - mr(2\pi f)^2 \sin\alpha$

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \; F_k = mg \sin\alpha + mr \cos\alpha\, (2\pi f)^2$,

majd behelyettesítjük f_{krit} értékét.)

5/4. Függőleges síkban körpályán haladó repülőgép sebessége 1080 km/h.

a) Mekkora legyen a körpálya sugara, hogy a legfelső pontban a pilóta „súlytalan" legyen?

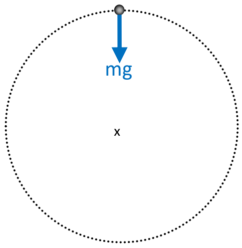
b) És mekkora legyen a körpálya sugara, ha azt szeretnénk elérni, hogy a pilóta 'g' gyorsulást érezzen a talpa felé?

Ebben az esetben a pilóta azt látná, hogy amit elenged, a lába felé esik; ha vizet önt, akkor az a lába felé folyik, és meg is tudja inni a pohárból, ahogy ezt az alábbi videón is lehet látni:

https://www.youtube.com/watch?v=g99ho_ExApU

Megoldás $v = 1080\ km/h = 300\ m/s$

Súly: az az erő, amivel a test az alátámasztást nyomja, vagy a felfüggesztést húzza.



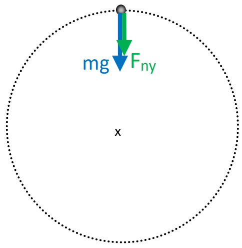
a) Mivel a pilóta súlytalan, azaz a repülőgép nem hat rá nyomóerővel, ezért a legfelső pontban a pilótára csak egyetlen erő hat, a nehézségi erő:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}$$

A pilóta körpályán mozog, gyorsulása a körpálya középpontja felé mutató centripetális gyorsulás, tehát

$$mg = ma_{cp} = mv^2/R$$

$$\rightarrow \quad R = v^2/g = 9000\ m.$$



b) A legfelső pontban a pilóta fejjel lefelé ül a gépben, és abban a helyzetben azt érzi, hogy az ülés ugyanúgy nyomja, mint amikor nyugalomban van a földön (vagyis a feje irányába), tehát a repülőgép függőlegesen lefelé nyomja őt.

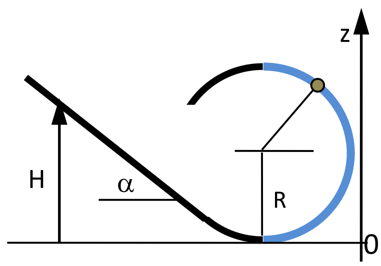
$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F_{ny}}$$

Mivel a nyomóerő éppen mg nagyságú:

$$mg + F_{ny} = 2mg = ma_{cp} = mv^2/R$$

$$\rightarrow \quad R = v^2/2g = 4500\ m.$$

5/5. Az α hajlásszögű egyenes lejtő érintő irányban csatlakozik az R sugarú körív keresztmetszetű vályúhoz. A súrlódás elhanyagolható. Egy testet kezdősebesség nélkül elengedünk a lejtő H magasságú pontjából. Adjuk meg a testre ható nyomóerőt tetszőleges kiindulási H magasság esetén a z koordináta függvényében a vályú jobb oldali (kékre színezett) részére!

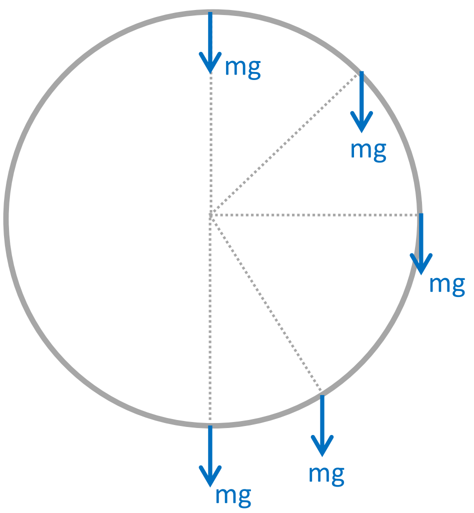


Megoldás

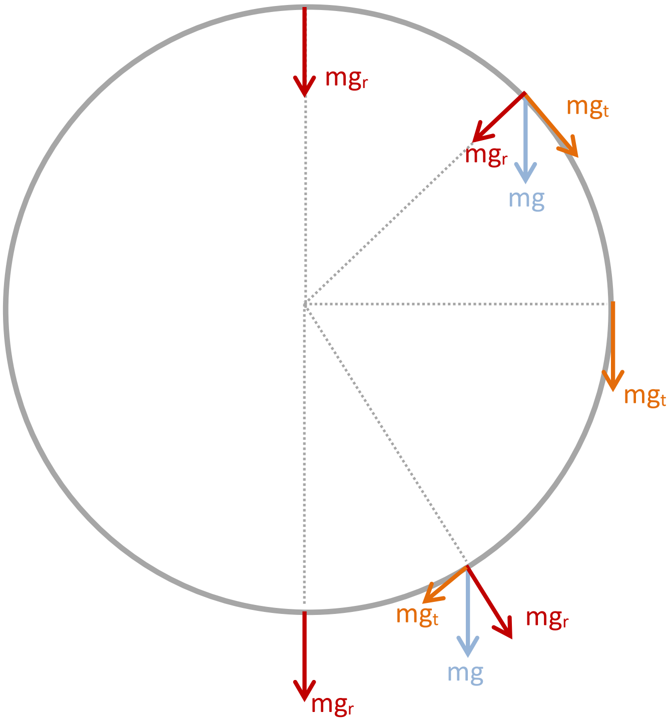
A testre a nehézségi erő és a vályú által kifejtett nyomóerő hat:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F_{ny}}$$

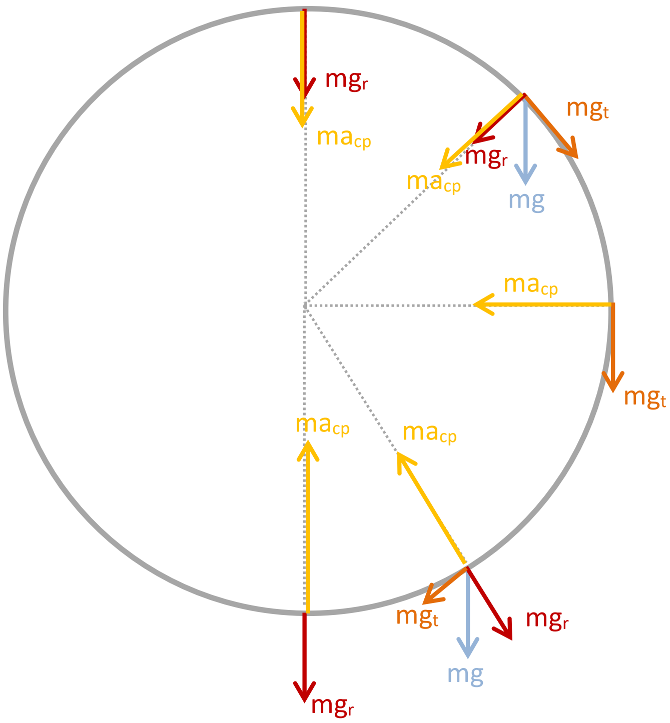
Mielőtt számolni kezdenénk, gondoljuk végig, mit mondhatunk az erőkről. Rajzoljuk be a nehézségi erőt a pálya több jellegzetes pontján:



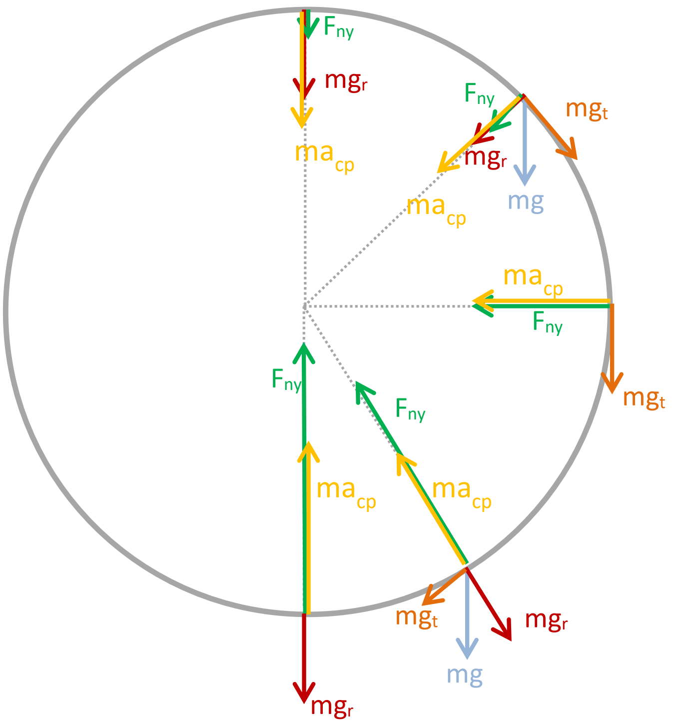
és bontsuk fel sugár- és érintő irányú komponensekre:



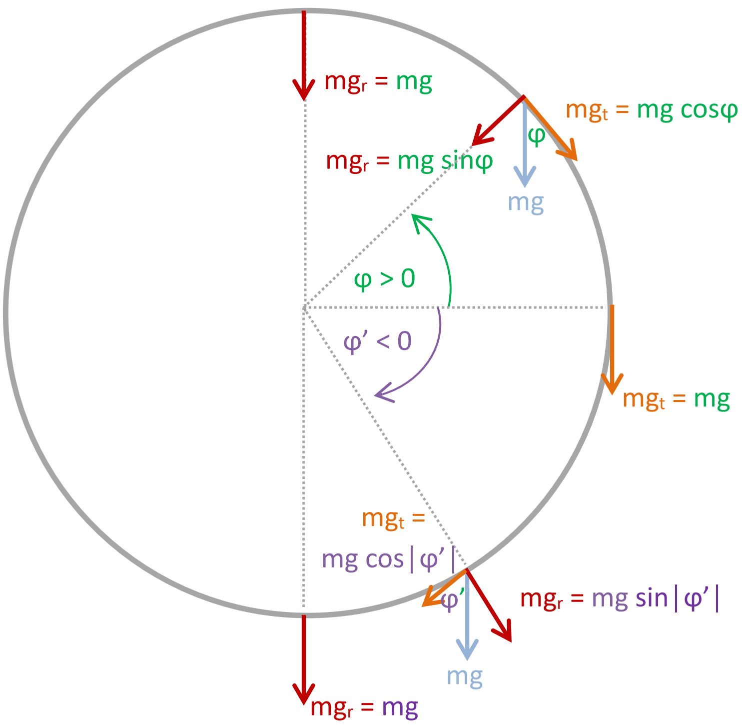
Tudjuk, hogy a nehézségi erő és a nyomóerő eredőjének a sugárirányú komponense mindig befelé, a kör közepe felé kell mutasson, és hogy a nagysága $ma_{cp} = m\, v^2/r$. Azt még nem tudjuk, hogy a pálya egyes pontjain mekkora a test sebessége, de egyelőre annyit vegyünk figyelembe, hogy minél lejjebb van a test, annál nagyobb a sebessége (felfelé haladva lassul az mg_t komponens miatt), vagyis annál nagyobb ma_{cp}:



Ez alapján be tudjuk rajzolni arányosan a hiányzó nyomóerőket is (mivel mg_r és F_{ny} eredője ma_{cp}).



A számoláshoz fejezzük ki az mg_r és mg_t komponenseket a vízszintes helyzettől mért előjeles φ szöggel (felfelé pozitív, lefelé negatív):



Az ábrán φ'-vel jelöltük a negatív szöget, de látni fogjuk, hogy az egyenletek felírásánál nincs szerepe annak, hogy a szög pozitív vagy negatív, nem kell különböző módon felírni az egyenleket az alsó ill. felső ívre, hanem az előjelesen értelmezett φ-vel egyértelműek az egyenletek.

A mozgásegyenlet sugár- és érintő irányú komponenseinek felírásakor az előjeleket úgy kell megválasztani, hogy
érintő irányban a sebesség iránya a pozitív, vagyis a felfelé mutató irány (a pozitív forgásirány):

$ma_t = -mg\cos\varphi$ ill. $ma_t = -mg\cos|\varphi'|$;

sugár irányban befelé mutat a pozitív irány:
a felső íven

$ma_{cp} = F_{ny} + mg\sin\varphi$,

az alsó íven

$ma_{cp} = F_{ny} - mg\sin|\varphi'|$.

Mivel $\varphi' < 0$, ezért $-\sin|\varphi'| = \sin\varphi'$,
és az érintő irányú komponensnél sincs eltérés, mivel $\cos|\varphi'| = \cos\varphi$,
ezért nem szükséges a φ' jelölés, a továbbiakban el is hagyjuk.
Tehát a vízszintes helyzettől mért előjeles φ szöggel, az a_t és a_{cp} gyorsulásokat behelyettesítve

$ma_t = mR\dot{\omega} = mR\ddot{\varphi} = -mg\cos\varphi$ (1)

$ma_{cp} = mv^2/R = mR\omega^2 = F_{ny} + mg\sin\varphi$ (2)

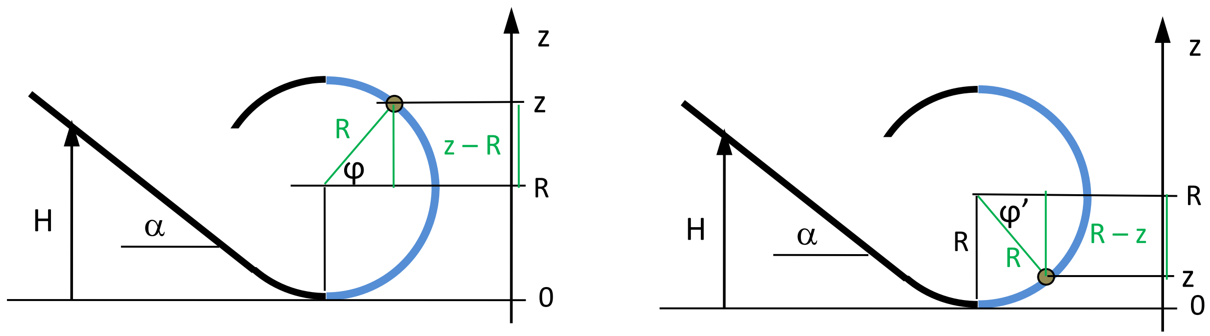
A (2) egyenletből kifejezhetjük a nyomóerőt a φ szög függvényében:

$F_{ny} = ma_{cp} - mg\sin\varphi$.

Mivel $a_{cp} = v^2/R = R\omega^2$, tudnunk kell azt is, hogy adott helyen mekkora a test (szög)sebessége.

Az (1) egyenlet egy differenciálegyenlet, aminek megoldása a φ(t) függvény. Ezt deriválva megkapjuk ω(t)-t, és a két függvényből az időt kiküszöbölve elvileg előállítható az ω(φ) függvény. Sajnos az első differenciálegyenletnek nincs analitikus megoldása, így ez az út most nem járható. Ugyanakkor az első egyenletből közvetlenül az ω(φ) függvényt meg tudnánk határozni integrálással (ld. az **5/14.** feladatot). Viszont mivel a súrlódás elhanyagolható, egyszerűbben ki tudjuk fejezni a sebességet a magassággal energia-megmaradást felírva:

$E_{pot} + E_{kin} = \text{konst.}$: $mgH + 0 = mgz + ½\,mv^2 \;\rightarrow\; v^2 = 2g(H-z)$



A centripetális gyorsulás tehát

$a_{cp} = v^2/R = 2g(H-z)/R$.

Ki kell még fejeznünk sinφ-t is z-vel és R-rel:

$\sin\varphi = (z-R)/R$.

[Az alsó íven $\sin|\varphi'| = (R-z)/R$, de ott $\varphi' < 0$ és $z-R < 0$, tehát $|\varphi'| = -\varphi'$ és $|z-R| = -(z-R) = R-z$.]

Helyettesítsünk be mindent a nyomóerőre rendezett egyenletbe:

$F_{ny} = ma_{cp} – mg \sin\varphi = m \cdot 2g(H–z)/R – mg (z–R)/R = mg (2H–3z+R)/R$,

vagy a z koordinátát kiemelve

$F_{ny} = (2H/R+1)mg – 3mg/R \cdot z$.

Látható, hogy z növekedésével csökken a nyomóerő. Ha $z = (2H+R)/3$, akkor $F_{ny} = 0$. Ennél feljebb nem jut el a test, hanem elválik a vályú falától; ez tehát megadja azt is, hogy minimum milyen magasságból kell elindítani a testet, hogy végigmenjen a vályún (nem elég 2R magasságból elindítani).

Gyakorló feladatok a zárthelyire

5/6. Körpályán egyenletesen lassuló mozgással mozgó anyagi pont egy félkör megtétele közben elveszti sebessége felét. Hol áll meg?

Megoldás

Nem tudunk sokat arról, hogy milyen felületen, milyen erő hatására mozog ez a test. Legegyszerűbb esetként feltehetjük, hogy kötél tartja körpályán, és vízszintes felületen mozog. Mivel egyenletesen lassuló mozgást végez, a csúszási súrlódási erő az, ami fékezi a mozgást.

Felírhatjuk a test mozgásegyenletét az összes erőt (nehézségi erő, a felület által kifejtett nyomóerő, kötélerő, csúszási súrlódási erő) figyelembe véve:

vektori alakban: $m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_k} + \mathbf{F_s}$

ill. a komponenseire bontva:

függőleges: $F_{ny} – mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg$

sugár irányú: $ma_{cp} = F_k$

érintő irányú: $ma_t = –F_s = –\mu F_{ny} = –\mu mg$

Utóbbiból kapjuk meg, hogyan változik a test sebessége az időben:

$\rightarrow \quad a_t = \dot{v} = –\mu g \quad \rightarrow \quad v = v_0 – \mu gt \quad \rightarrow \quad s = v_0t – ½\mu gt^2$ (s az R sugarú körön megtett út)

Tudjuk, hogy

először t_1 idő alatt a sebessége a felére csökken: $v(t_1) = v_0 – \mu gt_1 = \frac{v_0}{2}$ (1)

és megtesz egy félkört, azaz $s_1 = s(t_1) = v_0t_1 – ½\mu gt_1^2 = \pi R$ (2)

majd valamennyi idő elteltével megáll, jelöljük ezt az időt t_2-vel, ezalatt

a sebessége $\frac{v_0}{2}$-ről nullára csökken: $v(t_2) = \frac{v_0}{2} – \mu gt_2 = 0$ (3)

kérdés, mekkora utat tesz meg: $s_2 = s(t_2) = \frac{v_0}{2} t_2 – ½\mu gt_2^2 = ?$ (4)

A négy egyenletben ismeretlen v_0, t_1, t_2 és s_2.

Fejezzük ki

(1)-ből t_1-et: $t_1 = \frac{v_0}{2\mu g}$, ill.

(3)-ből t_2-t: $t_2 = \frac{v_0}{2\mu g}$.

Látható, hogy $t_1 = t_2$: mivel a test gyorsulása (lassulása) állandó, ugyanannyi idő alatt veszíti el a sebességének a felét v_0-ról $\frac{v_0}{2}$-re, mint $\frac{v_0}{2}$-ről 0-ra. A megtett út viszont nem egyenlő.

Helyettesítsük be t_1-et (2)-be:

$$s_1 = v_0 \frac{v_0}{2\mu g} – \frac{1}{2}\mu g \left(\frac{v_0}{2\mu g}\right)^2 = \frac{4v_0^2 – v_0^2}{8\mu g} = \frac{3v_0^2}{8\mu g} = \pi R , \quad (5)$$

és t_2-t (4)-be:

$$s_2 = \frac{v_0}{2}\frac{v_0}{2\mu g} - \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{v_0}{2\mu g}\right)^2 = \frac{2v_0^2 - v_0^2}{8\mu g} = \frac{v_0^2}{8\mu g}, \qquad (6)$$

(5)-ből kifejezhető a kezdősebesség négyzete a gyorsulással:

$$v_0^2 = \frac{8}{3}\mu g\,\pi R\,,$$

amit beírhatunk (6)-ba (vagy egyszerűen elosztjuk a két egyenletet egymással):

$$s_2 = \frac{v_0^2}{8\mu g} = \frac{\frac{8}{3}\mu g\,\pi R}{8\mu g} = \frac{\pi R}{3}$$, tehát még egy hatod kört tesz meg a test.

A feladatot végigszámolhatjuk úgy is, hogy nem írjuk fel a gyorsulást a súrlódási erőből, hanem csak annyit használunk fel, hogy állandó a test gyorsulásának a nagysága.
Számolhatunk szögváltozóval is:

β = konst. $(\beta < 0!)$ $\rightarrow$ $\omega = \omega_0 + \beta t$ $\rightarrow$ $\varphi = \omega_0 t + ½\beta t^2$

Tudjuk, hogy

először t_1 idő alatt a szögsebessége a felére csökken: $\omega(t_1) = \omega_0 + \beta t_1 = \frac{\omega_0}{2}$ (1)

és megtesz egy félkört, azaz $\varphi_1 = \varphi(t_1) = \omega_0 t_1 + ½\beta t_1^2 = \pi$ (2)

majd valamennyi idő elteltével megáll, jelöljük ezt az időt t_2-vel, ezalatt

a szögsebessége $\frac{\omega_0}{2}$-ről nullára csökken: $\omega(t_2) = \frac{\omega_0}{2} + \beta t_2 = 0$ (3)

kérdés, mekkora a szögelfordulás: $\varphi_2 = \varphi(t_2) = \frac{\omega_0}{2} t_2 + ½\beta t_2^2 = ?$ (4)

A négy egyenletben ismeretlen ω_0, t_1, t_2 és φ_2.
Fejezzük ki

(1)-ből t_1-et: $t_1 = -\frac{\omega_0}{2\beta}$, ill.

(3)-ből t_2-t: $t_2 = -\frac{\omega_0}{2\beta}$.

Helyettesítsük be t_1-et (2)-be:

$$\varphi_1 = \omega_0\left(-\frac{\omega_0}{2\beta}\right) + \frac{1}{2}\beta\left(-\frac{\omega_0}{2\beta}\right)^2 = \frac{-4\omega_0^2 + \omega_0^2}{8\beta} = \frac{-3\omega_0^2}{8\beta} = \pi\,, \qquad (5)$$

ill. t_2-t (4)-be:

$$\varphi_2 = \frac{\omega_0}{2}\left(-\frac{\omega_0}{2\beta}\right) + \frac{1}{2}\beta\left(-\frac{\omega_0}{2\beta}\right)^2 = \frac{-2\omega_0^2 + \omega_0^2}{8\beta} = \frac{-\omega_0^2}{8\beta}\,. \qquad (6)$$

(5)-ből kifejezhető a kezdő szögsebesség a szöggyorsulással:

$$\omega_0^2 = -\frac{8}{3}\beta\,\pi\,,$$

amit beírhatunk (6)-ba (vagy egyszerűen elosztjuk a két egyenletet egymással):

$$\varphi_2 = -\frac{\omega_0^2}{8\beta} = -\frac{-\frac{8}{3}\beta\,\pi}{8\beta} = \frac{\pi}{3}$$, tehát még egy hatod kört tesz meg a test.

5/7. Egy ω szögsebességgel forgó vízszintes korongon egy m tömegű anyagi pont helyezkedik el. A tapadási súrlódási tényező μ_t. Milyen r sugáron belül marad a koronghoz képest nyugalomban a fenti tömegpont?

Megoldás

A testre hat függőlegesen, a körmozgás síkjára merőlegesen a nehézségi erő és a korong által kifejtett nyomóerő, ezeknek az eredője zérus; és a tapadási súrlódási erő, ami a körpálya origója felé mutat (ha nem hatna tapadási súrlódási erő, akkor a test nem maradna körpályán, hanem távolodna az origótól). A tapadási súrlódási erő adja a test centripetális gyorsulását.

$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F}_t$

$ma_{\perp} = F_{ny} - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg$

$ma_{cp} = F_t$

Tudjuk, hogy $F_t \le F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = \mu_t mg$.

A centripetális gyorsulást kifejezzük a szögsebességgel:

$ma_{cp} = mr\omega^2$.

Ezekből

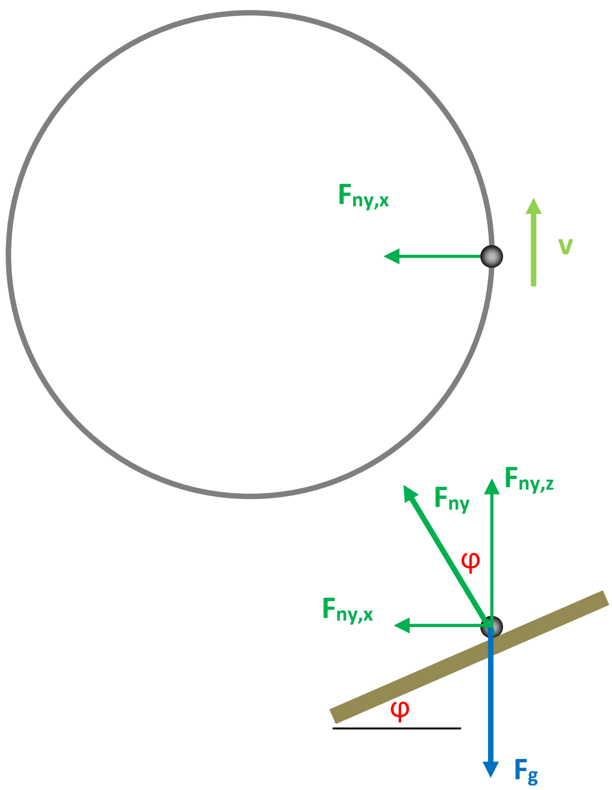
$$mr\omega^2 \le \mu_t mg \quad \rightarrow \quad r \le \frac{\mu_t g}{\omega^2} .$$

5/8. Milyen φ szöggel kell az R = 50 m sugarú kanyarban az úttestet megdönteni, ha a rajta haladó autók sebessége 72 km/h? A cél az, hogy ónos esőben (amikor $\mu = 0$) se csússzanak meg oldalirányban az autók.

Megoldás

A nehézségi erő és a (lejtő síkjára merőleges) nyomóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}}$



A függőleges komponensek:

$ma_{\perp} = F_{ny,z} - mg = F_{ny} \cos\varphi - mg = 0$

$\rightarrow \quad F_{ny} = mg / \cos\varphi$

A sugár irányú komponens:

$ma_{cp} = F_{ny,x} = F_{ny} \sin\varphi = (mg/\cos\varphi) \sin\varphi = mg \,\mathrm{tg}\varphi$

($ma_{cp} = mg \,\mathrm{tg}\varphi$ leolvasható az ábráról is.)

A centripetális gyorsulást kifejezzük a sebességgel:

$ma_{cp} = mv^2/R$,

tehát

$mv^2/R = mg \,\mathrm{tg}\varphi$

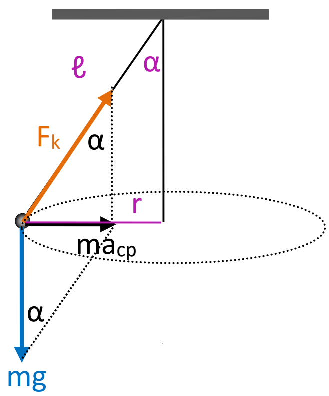
$\rightarrow \quad \mathrm{tg}\varphi = v^2 / (gR) = 0{,}8 \quad \rightarrow \quad \varphi = 38{,}66°$.

5/9. (DRS. 6.9) Kúpinga hossza ℓ, a kúpszög 2α. Mekkora a keringési idő?

Megoldás

A nehézségi erő és a kötélirányú húzóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja. Az 5/8. feladathoz hasonlóan a függőleges és sugár irányú komponenseket felírva és abból kifejezve, vagy közvetlenül az erőket felrajzolva látható, hogy

$ma_{cp} = mg\,\mathrm{tg}\alpha$.



A centripetális gyorsulást a szögsebességgel írjuk fel, mivel a keringési időt akarjuk kifejezni, és $\omega = 2\pi/T$; tehát $a_{cp} = mr\omega^2$.

A körpálya sugara $r = \ell\sin\alpha$.

Ezekből

$$ma_{cp} = mr\omega^2 = m\ell\sin\alpha\cdot\omega^2 = mg\,\mathrm{tg}\alpha$$

$$\rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}} = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\alpha}{g}}.$$

5/10. Félgömbben a sugár egynegyedénél ill. háromnegyedénél kering egy-egy golyó, vízszintes síkban, súrlódás nélkül. Mennyi a keringési idők aránya?

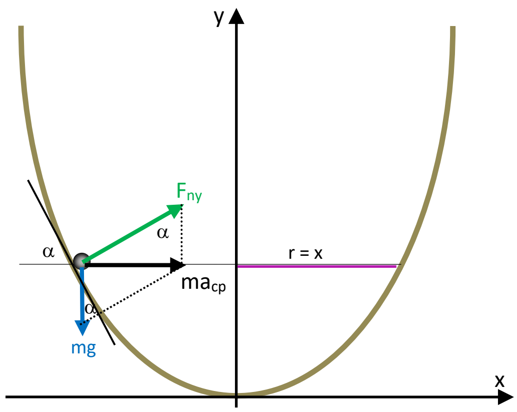
5/11. Az $y = (0{,}5\text{cm}^{-1})x^2$ egyenletű parabola y tengely körüli forgatásával nyert paraboloid belsejében az $y_1 = 2$ cm és az $y_2 = 4{,}5$ cm magasan elhelyezkedő síkokban két golyó kering.

a) Milyen sebességgel keringenek?

b) Mennyi idő alatt tesznek meg egy fordulatot?

Megoldás

a) A nehézségi erő és a forgási paraboloid adott pontbeli érintősíkjára merőleges nyomóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.



A mértékegységek miatt írjuk fel a parabola egyenletét úgy, hogy bevezetünk egy ’a’ paramétert:

$y = ax^2$, és tudjuk, hogy $a = 0{,}5\ \text{cm}^{-1}$.

Behelyettesítéskor erre figyelni kell; legegyszerűbb cm-ben számolni, de akkor g-t is át kell számolni cm/s^2-be: $g = 1000\ \text{cm/s}^2$.

A parabola érintője dy/dx, ahol tehát

$dy/dx = d(ax^2)/dx = 2ax$,

vagyis az érintőnek az x tengellyel bezárt α szögére $\mathrm{tg}\alpha = dy/dx = 2ax$.

Az erőket felrajzolva látható, hogy $ma_{cp} = mg\,\mathrm{tg}\alpha$.

A centripetális gyorsulás a sebességgel kifejezve $a_{cp} = v^2/r$.

A körpálya sugara mindig az adott y magasság felhasználásával a parabola egyenletéből visszaszámolható $x = \sqrt{y/a}$ érték, azaz $x_1 = 2$ cm, $x_2 = 3$ cm.

Ezekből $ma_{cp} = mv^2/r = mv^2/x = mg\,\mathrm{tg}\alpha = mg\cdot 2ax$

$\rightarrow\ v^2 = 2ax^2g = 2y\,g \quad \rightarrow\ v_1 = \sqrt{2\cdot2\cdot1000} = \sqrt{4000} = 63{,}25$ cm/s, $v_2 = \sqrt{9000} = 94{,}87$ cm/s.

b) $\omega = v/r = v/x = \sqrt{2ag} = 2\pi/T \ \rightarrow\ T = 2\pi/\sqrt{2ag} = 0{,}1987$ s a keringés helyétől függetlenül.

5/12. Egy R sugarú félgömb peremétől súrlódásmentesen legördülő m tömegű golyó mekkora erővel nyomja a félgömb fenekét?

Megoldás

A körpálya alsó pontján a félgömbre merőleges, függőlegesen felfelé mutató nyomóerő és a függőlegesen lefelé mutató nehézségi erő eredője felfelé mutat a körpálya közepe felé, és ez adja a test centripetális gyorsulását:

$ma_{cp} = F_{ny} - mg \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg + ma_{cp} = mg + mv^2/R$

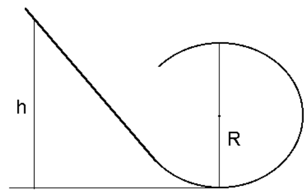
A sebességet kiszámíthatjuk energia-megmaradásból (mivel a súrlódás elhanyagolható):

$mgR = \frac{1}{2} mv^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = 2gR.$

Tehát

$F_{ny} = mg + mv^2/R = mg + m(2gR)/R = mg + 2\,mg = 3\,mg.$

5/13. Ferde lejtő átmegy függőleges körpályába. A lejtőn legalább milyen H magasságból kell a testet elengedni, ha azt akarjuk, hogy végigmenjen a körpályán (a legfelső pontnál se váljon el)? A súrlódás elhanyagolható. Mekkora nyomóerő hat a testre a körpálya legalsó pontján?



Megoldás

A körpálya legfelső pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen lefelé mutat, így

$ma_{cp} = mg + F_{ny} \quad \rightarrow \quad F_{ny} = ma_{cp} - mg = mv_{fent}^2/R - mg.$

A nyomóerő nem lehet negatív:

$F_{ny} \geq 0: \quad mv_{fent}^2/R - mg \geq 0 \quad \rightarrow \quad v_{fent}^2 \geq gR$.

A sebesség energia-megmaradásból kifejezve:

$mg\,H = mg\,2R + \frac{1}{2}\,m\,v_{fent}^2 \quad \rightarrow \quad v_{fent}^2 = 2g(H-2R)$,

ezt beírva a $v^2 \geq gR$ feltételbe

$2g(H-2R) \geq gR$

$\rightarrow \quad H \geq 5/2\,R$, tehát legalább ilyen magasságból kell elindítani a testet

.

A körpálya legalsó pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen felfelé mutat, így

$ma_{cp} = F_{ny} - mg \quad \rightarrow \quad F_{ny} = ma_{cp} + mg = m\,v_{lent}^2 / R + mg.$

A sebesség energia-megmaradásból kifejezve:

$mg\,H = \frac{1}{2}\,m\,v_{lent}^2 \quad \rightarrow \quad v_{lent}^2 = 2g\,H$,

és ezt a nyomóerőbe beírva

$F_{ny} = 2mg\,H/R + mg$.

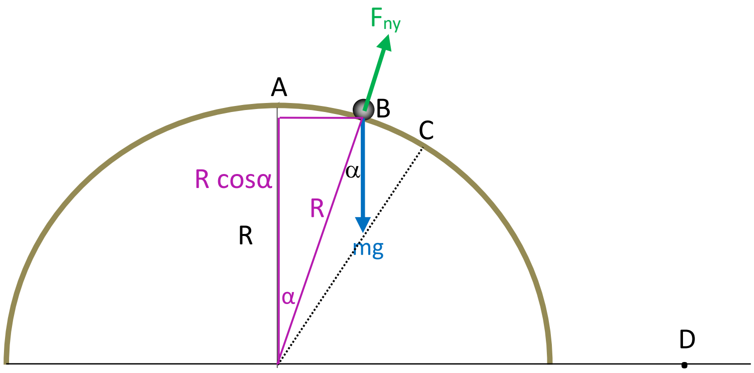
Mivel $H \geq 5/2\,R$, ezért

$F_{ny} \geq 2mg \cdot (5/2) + mg = 6\,mg.$

A nyomóerő a legalsó ponton $F_{ny} \geq 6mg$, tehát a test gyorsulása legalább 6g! (Hullámvasút!)

5/14. R sugarú félgömb tetejéről (A pont) súrlódásmentesen csúszik le egy golyó.
a) Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét! Bontsuk fel a golyóra ható erőket és a gyorsulást érintőleges és radiális komponensekre!
b) Mekkora a golyó szögsebessége a B pontnál?
c) Mekkora erővel nyomja a golyó a gömböt a B pontnál?
d) A golyó a C pontnál hagyja el a gömböt. Mekkora az α_0 szög?
e) Mennyi a golyó sebessége a C pontnál?
f) A golyó a D pontnál ér földet. Milyen távol van a D pont a félgömbtől?

Megoldás



a) A golyótól a félgömb középpontjához húzott sugárnak a függőlegessel bezárt szöge α, a szögsebesség tehát $\omega = \dot{\alpha}$.
A golyó mozgásegyenlete vektori alakban: $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny}$.
Bontsuk fel a nehézségi erőt tangenciális és radiális komponensre,
és írjuk fel a test gyorsulását polárkoordináta-rendszerben:
tangenciális komponens:

$$ma_t = mR\, d\omega/dt = mg \sin\alpha \qquad (1)$$

radiális komponens:

$$ma_{cp} = mR\omega^2 = mg\cos\alpha - F_{ny} \qquad (2)$$

b) Szükségünk lesz az $\omega(\alpha)$ függvényre. Ezt kétféleképpen kaphatjuk meg:
A differenciálegyenlet-rendszer megoldásával: **EZT A MEGOLDÁST NEM KELL TUDNI ZH-N!**
Az (1) egyenlet átalakításával az ω szögsebesség időfüggése ($d\omega/dt$) helyett nézhetjük a szögsebességnek az α szögtől való függését ($d\omega/d\alpha$):

$$mR\frac{d\omega}{dt} = mR\frac{d\omega}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = mR\omega\frac{d\omega}{d\alpha} = mg\sin\alpha\,.$$

Ezt szeparáljuk és integráljuk:

$$\int_0^\omega R\omega\, d\omega = \int_0^\alpha g \sin\alpha\, d\alpha \quad\rightarrow\quad R\,\omega^2/2 = g\,(1-\cos\alpha) \quad\rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha)}{R}}\,.$$

Ugyanezt kifejezhetjük az energia-megmaradásból is:
a golyó R magasságban zérus sebességgel indul, és $R\cos\alpha$ magasságban $v = R\omega$ sebessége van:

$$mg\,R = mg\,R\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\, m\,(R\omega)^2 \quad\rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha)}{R}}\,.$$

c) A (2) egyenletből a nyomóerő $F_{ny} = mg\cos\alpha - mR\omega^2$.
Az előbb kifejeztük ω-t az α függvényében, helyettesítsük be ide:

$F_{ny} = mg\cos\alpha - 2\,mg\,(1-\cos\alpha) = mg\,(3\cos\alpha - 2)$ a nyomóerő az α szög függvényében.

d) A golyó akkor hagyja el a gömböt, amikor $F_{ny} = 0$,

$mg\,(3\cos\alpha - 2) = 0 \quad \to \quad \cos\alpha_0 = 2/3 \quad \to \quad \alpha_0 = 48{,}19°$.

e) A golyó sebességének nagysága a C pontban

$v_0 = R\cdot\omega(\alpha_0) = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha_0)} = \sqrt{2Rg/3} \approx 2{,}58\sqrt{R}$,

iránya pedig az érintő iránya, azaz

$\mathbf{v}_0 = \cos\alpha_0 \sqrt{2gR(1-\cos\alpha_0)}\,\mathbf{i} - \sin\alpha_0 \sqrt{2gR(1-\cos\alpha_0)}\,\mathbf{k} \approx 1{,}72\sqrt{R}\,\mathbf{i} - 1{,}92\sqrt{R}\,\mathbf{k}$.

f) Ha a félgömb középpontjába helyezzük az origót, a golyó az

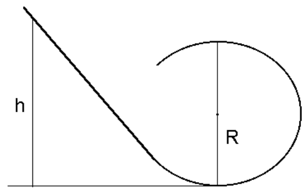
$\mathbf{r}_0 = (R\sin\alpha_0)\,\mathbf{i} + R\cos\alpha_0\,\mathbf{k} \approx 0{,}745R\,\mathbf{i} + 0{,}667R\,\mathbf{k}$ pontból indul (C pont).

Tehát $z(t) = 0{,}667R - 1{,}92\sqrt{R}t - ½\,gt^2$.

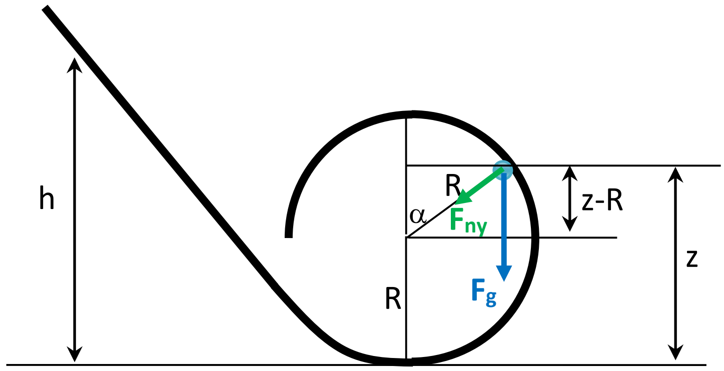
$z = 0$, ha $t_1 \approx 0{,}22\sqrt{R}$,

és ekkor $x(t_1) = 0{,}745R + 1{,}72\sqrt{R}t_1 = 1{,}12R$, azaz a félgömbtől 0,12R távolságra ér földet a golyó.

5/15. Az egyenes lejtő érintőként csatlakozik a kör keresztmetszetű függőleges vályúhoz. A lejtőn h magasságból kezdősebesség nélkül elindul egy test. Adjuk meg azt a z(h) függvényt, ami leírja, hogy a h magasság függvényében milyen z magasságban fog elválni a test a körpályától! Ábrázoljuk is a függvényt (ügyelve az értelmezési tartományra)! A test súrlódás nélkül csúszik.



Megoldás



A testre hat az $\mathbf{F_g}$ nehézségi erő és a vályú falától származó $\mathbf{F_{ny}}$ nyomóerő, tehát a mozgásegyenlet:

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}}$, aminek

érintő irányú komponense

$ma_t = mg\sin\alpha$ és

radiális komponense

$ma_{cp} = mg\cos\alpha + F_{ny}$;

utóbbiból a nyomóerő

$F_{ny} = ma_{cp} - mg\cos\alpha$.

$\cos\alpha$ a z magassággal kifejezve az ábráról: $\cos\alpha = (z-R)/R$.

Ahhoz, hogy a nyomóerőt felírjuk α függvényében, ismerni kell a_{cp}-t α függvényében. Mivel a súrlódás elhanyagolható, számolhatunk energia-megmaradásból:

$mgh = mgz + ½\,mv^2 \quad \to \quad v^2 = (R\omega)^2 = 2g(h-z)$

$a_{cp} = v^2/R = 2g(h–z)/R$

Tehát

$F_{ny} = ma_{cp} – mg \cos\alpha = 2mg(h–z)/R – mg\,(z–R)/R = mg(2h–3z+R)/R$.

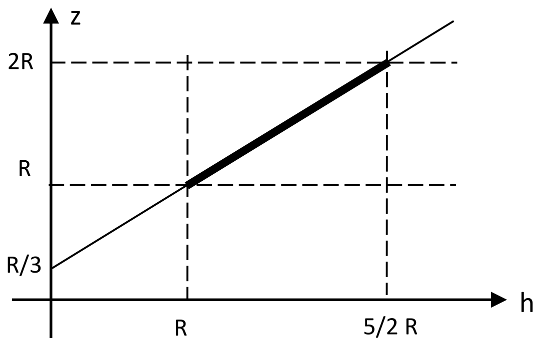
Ott válik el a test a vályútól, ahol $F_{ny} = 0$, azaz

$mg(2h–3z+R)/R = 0$,

a keresett z(h) függvény tehát

$z = (2h+R)/3 = R/3 + 2/3 \cdot h$

Ez egy R/3 tengelymetszetű és 2/3 meredekségű egyenes, de annak csak az a szakasza, ahol z értéke R és 2R közé esik (mert a vályú alsó felében nem válik el a golyó, és z = 2R esetén meg már végigmegy a vályún). Az $R < z < 2R$ feltételből $R < h < 5/2\,R$.



Körpálya általános gravitációs erővel

5/16. Milyen távolságban keringenek a Föld középpontjától az ún. álló műholdak? (szögsebességük megegyezik a Föld szögsebességével)

Megoldás

A testre egyetlen erő hat, a Föld vonzóereje, ez tartja körpályán:

$ma_{cp} = mr\omega^2 = \gamma\, m \cdot m_{Föld} / r^2 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{\dfrac{\gamma\, m_{Föld}}{\omega^2}}$, ahol $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$,

$m_{Föld} = 6 \cdot 10^{24}$ kg,

$r_{Föld} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m,

$\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24 \cdot 60 \cdot 60) = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$,

amiből $r = 42{,}3 \cdot 10^6$ m.

Számolhatunk úgy is, hogy γ és $m_{Föld}$ értéke helyett felhasználjuk azt, hogy a Föld felszínén

$mg = \gamma\, m \cdot m_{Föld} / r_{Föld}^2$, azaz $\gamma\, m_{Föld} = g\, r_{Föld}^2$

vagyis $mr\omega^2 = \gamma\, m \cdot m_{Föld} / r^2 = m \cdot g \cdot r_{Föld}^2 / r^2 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{\dfrac{g\, r_{Föld}^{\ 2}}{\omega^2}}$

5/17. Számítsuk ki a Hold centripetális gyorsulását kétféleképpen: a

a) gravitációs erőtörvényt,

b) körmozgás adatait felhasználva.

A Hold pályájának sugara kb. 60-szorosa a Föld sugarának ($R_{Föld} \approx 6400$ km),

a Hold keringési ideje 27 nap.

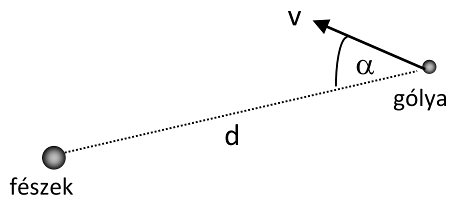
Megoldás

a) $\cancel{m_{Hold}}\, a_{cp} = \gamma\, \cancel{m_{Hold}}\, m_{Föld} / d^2$

$\rightarrow\; a_{cp} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3kg^{–1}s^{–2} \cdot (6 \cdot 10^{24}\ kg) / (60 \cdot 6400 \cdot 10^3\ m)^2 = 2{,}714 \cdot 10^{–5}\ m/s^2$.

b) $a_{cp} = R\omega^2 = 60R_{Föld}\,(2\pi/T)^2 = 60 \cdot 6400 \cdot 10^3\ m \cdot (2\pi/(28 \cdot 24 \cdot 3600\ s))^2 = 2{,}590 \cdot 10^{–3}\ m/s^2$.

Érdeklődőknek: (nem zh feladat!)
kancsal fecske, avagy inkább kancsal gólya
(vagy még inkább normális molylepke)



A kancsal gólya szeretne a fészkére repülni. Ő azt hiszi, hogy egyenesen a fészke felé repül, de kancsalsága miatt mindig az őt a fészekkel összekötő egyenessel állandó α szöget bezárva repül. A gólya sebességének nagysága állandó (v).
Odaér-e valaha a fészkére?

Megoldás
Síkbeli polárkoordináta-rendszerben a sebességvektor

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = (r\dot{\boldsymbol{e}_r}) = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}_r} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi ,$$

azaz a sebességvektor radiális komponense $v_r = \dot{r}$, tangenciális komponense $v_t = r\dot{\varphi}$.
Legyen a fészek az origóban, a gólya helyvektora **r**. Bontsuk fel a gólya sebességét radiális és tangenciális komponensekre: $\boldsymbol{v} = -v\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_r + v\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_\varphi$.
A radiális komponenst tekintve tehát
(1) $\dot{r} = -v\cos\alpha$
Integrálva: $r = d - (v\cos\alpha)\,t$, azaz a gólya távolsága a fészektől lineárisan csökken,
és $t = d/(v\cos\alpha)$ idő alatt r = 0, vagyis a gólya beér a fészkébe!
<u>A kérdést tehát megválaszoltuk, de nézzük meg azt is, milyen pályán repül a gólya.</u>

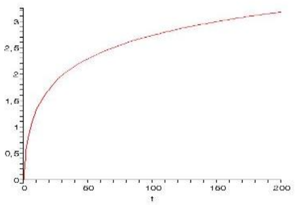
A tangenciális komponenst tekintve
(2) $r\dot{\varphi} = v\sin\alpha$, ahol
α a gólya kancsalságának szöge, ez konstans,
φ a fészektől a fecskéhez t időben húzott helyvektornak a 0 időben húzott helyvektorral bezárt szöge.

r(t)-t behelyettesítve $(d - vt\cos\alpha)\dfrac{d\varphi}{dt} = v\sin\alpha$,

szeparálva és integrálva: $\displaystyle\int \frac{1}{d - v\cos\alpha\cdot t}\,dt = \frac{1}{v\sin\alpha}\int d\varphi \quad\rightarrow\quad \frac{1}{-v\cos\alpha}\ln\frac{d - v\cos\alpha\cdot t}{d} = \frac{\varphi}{v\sin\alpha}$,

amiből $\varphi = -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\ln\left(1 - \dfrac{v\cos\alpha}{d}t\right)$.

$t \rightarrow \dfrac{d}{v\cos\alpha}$ esetén ez a függvény végtelenhez tart, vagyis a gólya végtelen sokszor fordul körbe, amíg beér a fészkébe, de ezt véges idő alatt és véges úton teszi.



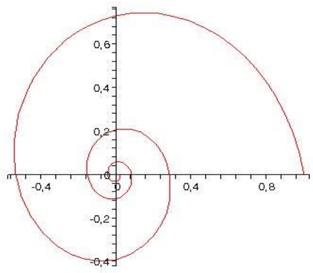
<u>Határozzuk meg a gólya pályáját!</u>
Az egyik lehetőség, hogy az r(t), φ(t) függvényekből kiküszöböljük t-t:
$r = d - (v\cos\alpha)t \Rightarrow t = (d-r)/(v\cos\alpha)$ és $\varphi = -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\ln\left(1 - \dfrac{v\cos\alpha}{d}\cdot\dfrac{d-r}{v\cos\alpha}\right) = -\mathrm{tg}\alpha\cdot\ln\dfrac{r}{d}$;

a másik lehetőség, hogy az (1) és (2) differenciálegyenletet elosztjuk egymással:

$\dfrac{v_t}{v_r} = \dfrac{r\,d\varphi}{dr} = \dfrac{v\sin\alpha}{-v\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha$, szeparáljuk: $\displaystyle\int_0^{\varphi} d\varphi = -\mathrm{tg}\alpha\cdot\int_d^r \frac{1}{r}dr$ és integráljuk:

$$\varphi = -\mathrm{tg}\alpha\cdot\ln\frac{r}{d}$$

Ez az ún. logaritmikus spirális egyenlete, melynek jellemzője, hogy egy-egy teljes fordulatot megtéve a középponttól mért távolság mértani sor szerint (mindig ugyanannyiad részére) csökken:



r-et kifejezve φ(r)-ből r = d·$e^{-\varphi/\mathrm{tg}\alpha}$, $\frac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{\varphi_2}{\mathrm{tg}\alpha}+\frac{\varphi_1}{\mathrm{tg}\alpha}}$,

egy fordulatot megtéve $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$,

így $\frac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{2\pi}{\mathrm{tg}\alpha}} = \mathrm{konst.}$