MOZGÁSEGYENLET

Az $m\boldsymbol{a} = \Sigma \boldsymbol{F}_i$ egyenletbe

– egyrészt behelyettesítjük az egyes kölcsönhatásoknak megfelelő erőtörvényeket, amelyek általánosan $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t,\ldots)$ alakban írhatók fel;

– másrészt tudjuk kinematikából, hogy $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$; ezeket behelyettesítve

$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$: ez a test **mozgásegyenlet**e ,

(matematikailag ez egy másodrendű differenciálegyenlet)

ennek megoldásaként kapjuk az $\boldsymbol{r}(t)$ függvényt, ami a mozgást leírja.
A megoldáshoz szükség van 2 integrációs állandóra, azaz a kezdeti helyvektorra és a kezdősebességre is (vagy hely és sebesség vektorára bármely időpontban).

ERŐTÖRVÉNYEK

1. Földi nehézségi (gravitációs) erő

Nagysága:

$F_g = mg$,

ahol g a nehézségi gyorsulás, aminek értéke kis mértékben függ attól, hogy a Föld mely pontján van a test; Magyarországon $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, de a számolási feladatokban $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$ értékkel számolunk (ha nincs más érték megadva).
iránya: függőlegesen lefelé mutat;
vektorként felírva: $\boldsymbol{g}$-t vektorként értelmezve $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$,
vagy függőlegesen felfelé mutató z-tengellyel felírva $\boldsymbol{F}_g = -mg\,\boldsymbol{k}$.

2. Általános tömegvonzási (gravitációs) erő

Nagysága:

$F_{grav} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$,

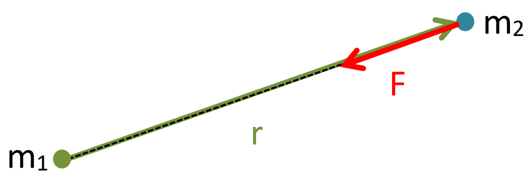
ahol

m_1 ill. m_2 a testek tömege [kg],

γ univerzális állandó ($\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m^3 s^2/kg} = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$),

d a két tömegpont közötti távolság [m];

iránya: vonzó a két testet összekötő egyenes mentén;
vektorként felírva:



$$\mathbf{F_{grav}} = -\gamma \frac{m_1\, m_2}{r^2}\, \frac{\mathbf{r}}{r},$$

ahol **r** az egyik testből a másikba mutató vektor.

A földi nehézségi erő az általános gravitációs erőből származtatható.

3) Kényszererők: felület, kötél, rúd

A kényszererőknek csak az irányukat tudjuk (a geometriai kényszer miatt), a nagyságukat nem, az mindig az adott problémából adódik.

A testre a felület által kifejtett $\mathbf{F_{ny}}$ **nyomóerő**:
iránya: a felületre merőleges (ha görbült a felület, akkor az adott pontbeli érintősíkra merőleges); csak nyomni tud;
nagysága akkora, hogy a test a felületen maradjon.

A testre a kötél által kifejtett $\mathbf{F_{kötél}}$ **kötélerő**:
iránya: csak húzni tudja a testet, kötélirányban;
nagysága: a test a kötél hosszánál távolabbra nem kerülhet a kötél rögzítési pontjától.

A testre rúd által kifejtett $\mathbf{F_{rúd}}$ **rúderő**:
iránya: húzni és nyomni is tudja a testet, rúdirányban;
nagysága abból a kényszerből adódik, hogy a rúd hossza nem változhat.

4.) Súrlódási erők

Csúszási súrlódási erő
Nagysága:

$F_s = \mu F_{ny}$,

ahol

F_{ny} a testre ható nyomóerő,
μ a csúszási súrlódási együttható;

iránya: a sebességgel ellentétes irányú;
vektorként felírva: $\mathbf{F_s} = -\mu F_{ny} \cdot \mathbf{v}/v$.
(Figyelem: $\mathbf{F_s} = -\mu \mathbf{F_{ny}}$ nem jó felírás, mert $\mathbf{F_s}$ és $\mathbf{F_{ny}}$ merőlegesek egymásra!)

Gördülési súrlódás: mint a csúszási súrlódás, de más a súrlódási együttható.

Tapadási súrlódási erő
Nagysága: akkora, amekkora ahhoz szükséges, hogy a test nyugalomban maradjon, de nem lehet nagyobb, mint

$F_{t,max} = \mu_t F_{ny}$,

ahol

F_{ny} a testre ható nyomóerő,
μ_t a tapadási súrlódási együttható;

(ha ennél nagyobb erőre lenne szükség, akkor a test elkezd mozogni a felülethez képest);
iránya: a felülettel párhuzamos; azzal ellentétes irányú, amerre a külső (eredő) erő el akarja mozdítani a testet.

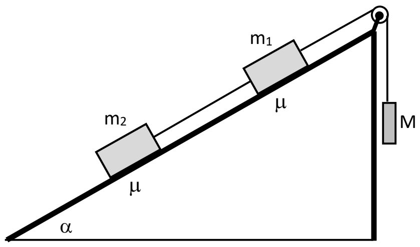
Itt egy látványos bizonyíték arra, hogy a súrlódási erő a nyomóerővel arányos (ebben az esetben a tapadási súrlódási erő a cipő és a fal között): http://www.videoman.gr/106419

4/1. Az ábra szerint elhanyagolható tömegű nyújthatatlan kötéllel egymáshoz kötünk egy $M = 7$ kg, egy $m_1 = 5$ kg, és egy $m_2 = 3$ kg tömegű testet és $\alpha = 38°$-os hajlásszögű lejtőre tesszük. A lejtő tetején egy ideális (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű) csiga van. Az m_1 ill. m_2 tömegű testek és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}08$.

a) Mekkora a testek gyorsulása, és mekkorák a kötélerők?

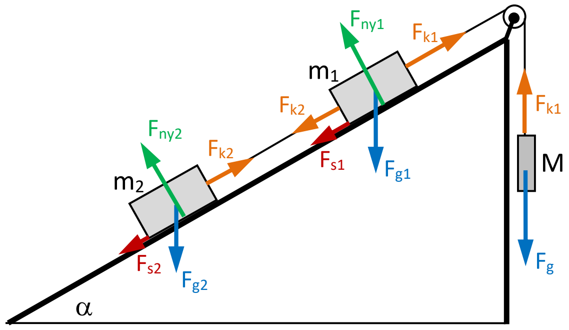
b) Ha az M tömegű testet eltávolítjuk, mekkora erővel kell húzni a kötelet, hogy az m_1 és m_2 tömegű testek gyorsulása ne változzon?

c) Hányszorosára nő a testek gyorsulása, ha az M tömeg kétszeresére nő? (a kötelet nem húzzuk)



Megoldás

a) A testek mozgásegyenletei vektori alakban:



$M\,\mathbf{a}_M = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{k1}$

$m_1\,\mathbf{a}_{m1} = \mathbf{F}_{g1} + \mathbf{F}_{ny1} + \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \mathbf{F}_{s1}$

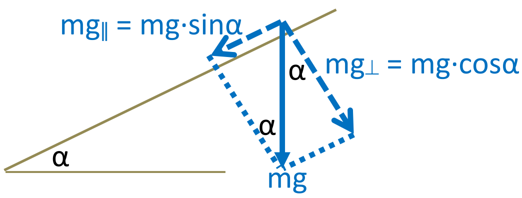
$m_2\,\mathbf{a}_{m2} = \mathbf{F}_{g2} + \mathbf{F}_{ny2} + \mathbf{F}_{k2} + \mathbf{F}_{s2}$

A testek gyorsulásának nagysága megegyezik, mert a kötél nyújthatatlan: $a_M = a_{m1} = a_{m2} = a$.
Ez lesz a kötéllel összekötött rendszer gyorsulása, ami m_1 és m_2 esetén a lejtővel párhuzamos, M esetén pedig függőleges irányú.
Ebben a feladatban nem tudjuk, hogy merre gyorsul a rendszer (jobbra vagy balra).

A kötélerő egy-egy kötélszakasz két végén egyenlő, ami abból következik, hogy a kötelek tömege elhanyagolható (tehát azok gyorsulásához nem kell erőt kifejteni). Ha figyelembe kellene venni a tömegüket, akkor nem lenne igaz, hogy a két végükön ébredő erő megegyezik, hanem a kötelekre is fel kellene írni mozgásegyenletet és abból tudnánk kiszámolni az erőket.

A vektori alakban felírt mozgásegyenletet komponensekre bontjuk. Az egyik komponens a kötél irányát követi (ami a lejtőn levő testek esetében a lejtő síkjával párhuzamos, a kötélen lógó testnél függőleges), a másik komponens a kötélre merőleges (ami a lejtőn levő testek esetében a lejtő síkjára merőleges).

Az m_1-re ill. m_2-re ható gravitációs erőket lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges komponensekre bontjuk:



a lejtőre merőleges komponens $(F_{g1})_\perp = m_1\, g \cos\alpha$ ill. $(F_{g2})_\perp = m_2\, g \cos\alpha$;
a lejtővel párhuzamos komponens $(F_{g1})_\parallel = m_1\, g \sin\alpha$ ill. $(F_{g2})_\parallel = m_2\, g \sin\alpha$.

m_1 ill. m_2 mozgásegyenletének lejtőre merőleges komponensei

$m_1 a_\perp = F_{ny1} - (F_{g1})_\perp = F_{ny1} - m_1\, g \cos\alpha$

$m_2 a_\perp = F_{ny2} - (F_{g2})_\perp = F_{ny2} - m_2\, g \cos\alpha$

Mivel a testek a lejtőn mozognak, ezért $a_\perp = 0$ $\rightarrow$ innen tudjuk a lejtő által kifejtett nyomóerők (kényszererők) nagyságát:

$F_{ny1} = m_1\, g \cos\alpha$, ill. $F_{ny2} = m_2\, g \cos\alpha$.

A mozgásegyenletek kötéllel párhuzamos komponensének felírása előtt ki kell jelölnünk, melyik legyen a pozitív irány.

Tegyük fel, hogy az M tömeg felfelé gyorsul, így

$Ma = F_{k1} - Mg$

$m_1 a = F_{k2} - F_{k1} + (F_{g1})_\parallel - F_{s1} = F_{k2} - F_{k1} + m_1 g \sin\alpha - F_{s1}$

$m_2 a = -F_{k2} + (F_{g2})_\parallel - F_{s2} = -F_{k2} + m_2 g \sin\alpha - F_{s2}$

A csúszási súrlódási erők nagysága:

$F_{s1} = \mu\, F_{ny1} = \mu\, m_1 g \cos\alpha$, $F_{s2} = \mu\, F_{ny2} = \mu\, m_2 g \cos\alpha$;

tehát

$Ma = F_{k1} - Mg$

$m_1 a = F_{k2} - F_{k1} + m_1 g \sin\alpha - \mu\, m_1 g \cos\alpha$

$m_2 a = -F_{k2} + m_2 g \sin\alpha - \mu\, m_2 g \cos\alpha$

Ezekből

$a = \frac{(m_1+m_2)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - M}{M + m_1 + m_2} g = \ldots = -1{,}719\ m/s^2$.

A gyorsulásra negatív érték jött ki, tehát nem ebbe az irányba gyorsulnak a testek!

Írjuk fel most úgy az egyenleteket, hogy az M tömeg lefelé gyorsul:

$Ma = Mg - F_{k1}$

$m_1 a = F_{k1} - F_{k2} - (F_{g1})_\parallel - F_{s1} = F_{k1} - F_{k2} - m_1 g \sin\alpha - \mu\, m_1 g \cos\alpha$

$m_2 a = F_{k2} - (F_{g2})_\parallel - F_{s2} = F_{k2} - m_2 g \sin\alpha - \mu\, m_2 g \cos\alpha$

amiből

$a = \frac{M - (m_1+m_2)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{M + m_1 + m_2} g = \ldots = 1{,}047\ m/s^2$.

A gyorsulásra pozitív érték jött ki, tehát tényleg ebbe az irányba gyorsulnak a testek.

Látható, hogy a két irányba felírt egyenletrendszer megoldása nem csak előjelben tér el, hanem a nagyságuk is különbözik. Ez azért van, mert a pozitívnak választott irány megváltoztatásával a nehézségi erők kötélirányú komponensei és a kötélerők előjelet váltanak, de a súrlódási erők nem, mivel azok előjele a sebesség irányához van kötve. Tehát ha egy bizonyos feltételezéssel negatív gyorsulást kapunk, akkor az egyenletrendszert újra fel kell írni a másik feltételezéssel, és azt újra megoldani.

Érdemes ezért a pozitív irány kiválasztása előtt összehasonlítani azt, hogy a csigánál a nehézségi erők kötél irányú komponensei milyen irányú eredőt adnak. Jelen esetben $Mg = 70{,}00$ N hat jobbra, és $(m_1+m_2)g \sin\alpha = 49{,}25$ N hat balra, vagyis jobbra nagyobb erő hat, az M tömeg lefelé gyorsul. Azonban ha csúszási súrlódási erők is fellépnek, akkor a helyzet bonyolultabb lehet. (Ebben a feladatban tapadással egyelőre nem foglalkozunk.)

A testek tehát jobbra gyorsulnak, $a = 1{,}047\ m/s^2$.

A kötélerők behelyettesítéssel kiszámolhatók:

$$F_{k2} = \frac{Mm_2(1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{M+m_1+m_2} g = 23{,}50\ N;$$

$$F_{k1} = \frac{M(m_1+m_2)(1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{M+m_1+m_2} g = 62{,}67\ N.$$

<u>Megjegyzés:</u> Vegyük észre, hogy az F_{k2} kötélerő kisebb, mint az F_{k1}, mivel F_{k2} csak az m_2 tömegű testet kell gyorsítsa:

$$F_{k2} = m_2a + m_2g \sin\alpha + \mu\, m_2g \cos\alpha,$$

az F_{k1} viszont az m_1 és az m_2 testet is:

$$F_{k1} = m_1a + m_1g \sin\alpha + \mu\, m_1g \cos\alpha + F_{k2} = (m_1+m_2)a + (m_1+m_2)g \sin\alpha + \mu\, (m_1+m_2)g \cos\alpha.$$

b) Akkor lesz m_1 és m_2 gyorsulása változatlan, ha a közvetlenül azokra a testekre ható erők nem változnak, vagyis a kötélerők változatlanok, tehát a kötelet a fent kiszámolt $F_{k1} = 62{,}67$ N nagyságú erővel kell húzni.

<u>Megjegyzés</u>: Azért nem $Mg = 70{,}00$ N nagyságú erővel, mert az az erő ahhoz volt szükséges, hogy mindhárom testet gyorsítsa, de most kisebb az össztömeg. A két erő különbsége az M-re ható erők eredője: $F_{M,eredő} = Mg - F_{k1} = 7{,}33$ N, ez gyorsítja az M tömegű testet, így lesz annak is $a = F_{M,eredő}/M = 7{,}33/7 = 1{,}047\ m/s^2$ nagyságú gyorsulása.

c) A gyorsulás nem kétszeresére nő, mert miközben M, és így Mg értéke kétszeresére nő, az m_1 és m_2 testekre ható erők változatlanok maradnak.

Az **a)** pontban levezetett

$$a = \frac{M-(m_1+m_2)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{M+m_1+m_2} g$$

gyorsulásba $M^* = 14$ kg-ot behelyettesítve

$a^* = 3{,}896\ m/s^2$ jön ki,

tehát a gyorsulás

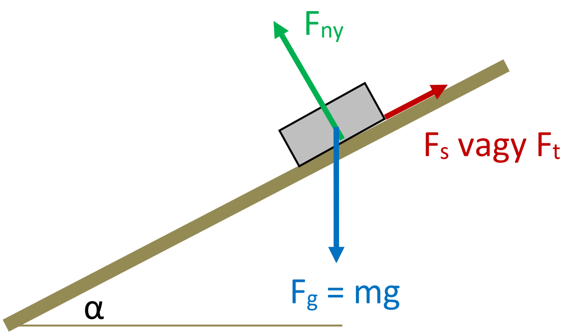
3,896/1,047 = 3,72-szeresére nő.

4/2. $\alpha = 20°$ hajlásszögű lejtőre $m = 0{,}50$ kg tömegű testet helyezünk. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}20$; a tapadási súrlódási együttható $\mu_t = 0{,}40$.

a) Mekkora súrlódási erő hat a testre?

b) α értékét növelve milyen α_{krit} szögnél csúszik meg a test? Mekkora súrlódási erő hat rá onnantól?

Megoldás



a) A test mozgásegyenlete:

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_s}$, ha a test csúszik;

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_t}$, ha a test tapad.

A testre a lejtő által kifejtett nyomóerő $F_{ny} = mg \cos\alpha$, mivel csak mg-nek van a lejtőre merőleges komponense.

A test mozgásegyenletének lejtővel párhuzamos komponense:

$ma = mg \sin\alpha - F_s$, ha a test csúszik; ill.

$ma = mg \sin\alpha - F_t$, ha a test tapad.

Ha a test tapad a lejtőn, akkor a gyorsulása zérus: $a = 0$ $\rightarrow$

$mg \sin\alpha - F_t = 0$

$\rightarrow$ $F_t = mg \sin\alpha = 0{,}50 \cdot 10 \cdot \sin 20° = 1{,}710$ N tapadási súrlódási erő kell hasson a testre.

Ellenőrizni kell, hogy ez kisebb-e, mint a tapadási súrlódási erő maximális lehetséges értéke, ami

$F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = \mu_t mg \cos\alpha = 0{,}4 \cdot 0{,}50 \cdot 10 \cdot \cos 20° = 1{,}879$ N.

$\alpha = 20°$ hajlásszögű lejtőn tehát a test nem csúszik meg, mert max. 1,879 N tapadási súrlódási erő léphetne fel a test és a lejtő között, de csak $mg \sin\alpha = 1{,}710$ N erő gyorsítaná.

A test és a lejtő között fellépő tapadási súrlódási erő tehát $F_t = 1{,}710$ N.

(A tapadási súrlódási erő nem az F_t maximális lehetséges értékével egyenlő, hanem azzal az erővel, ami gyorsítani szeretné, így lesz az eredő zérus.)

b) Ahogy növeljük a lejtő hajlásszögét,

– egyrészt nő a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense (mivel sinα nő), ami a testet gyorsítani szeretné,
– másrészt csökken a tapadási súrlódási erő maximális értéke (mivel cosα csökken).

Amíg $mg \sin\alpha < F_{t,max}$, addig $F_t = mg \sin\alpha$.

Határesetben $F_t = mg \sin\alpha$ eléri $F_{t,max}$ értékét, vagyis

$mg \sin\alpha_{krit} = F_{t,max} = \mu_t mg \cos\alpha_{krit}$.

Ez az a legnagyobb hajlásszög, amivel még teljesül, hogy

$ma = mg \sin\alpha_{krit} - F_{t,max} = mg \sin\alpha_{krit} - \mu_t mg \cos\alpha_{krit} = 0$.

Ebből

$\sin\alpha_{krit} = \mu_t \cos\alpha_{krit}$ $\rightarrow$ $\mu_t = \mathrm{tg}\alpha_{krit}$,

és meg van adva, hogy $\mu_t = 0{,}4$, tehát

$\alpha_{krit} = 21{,}80°$.

Ekkor $F_{t,max} = \mu_t mg \cos\alpha_{krit} = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 10 \cdot \cos 21{,}80º = 1{,}857$ N.

A lejtő hajlásszögét tovább növelve a test csúszni fog lefelé a lejtőn, és a lecsúszó testet csúszási súrlódási erő fékezi, aminek a nagysága

$F_s = \mu$ mg $\cos\alpha = 0{,}2\cdot 0{,}5\cdot 10\cdot\cos\alpha$.

Ez az erő is függ a lejtő hajlásszögétől (α_{krit} esetén 0,9285 N, α további növelésével csökken).

Összefoglalva:

α_{krit} = 21,80° alatt a test tapad, és F_t = mg sinα tapadási súrlódási erő lép fel;

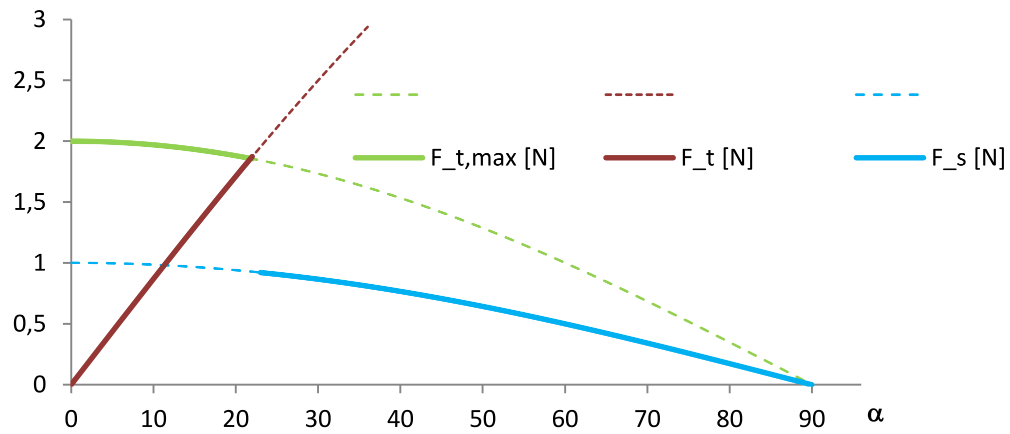
α_{krit} = 21,80° fölött a test csúszik, és $F_s = \mu$ mg cosα csúszási súrlódási erő lép fel.

Az ábrán a lejtő hajlásszögének függvényében látható

zölddel a tapadási súrlódási erő maximális értéke: $F_{t,max} = \mu_t$ mg cosα;

pirossal a fellépő tapadási súrlódási erő értéke: F_t = mg sinα;

kékkel a csúszási súrlódási erő értéke: $F_s = \mu$ mg cosα.



4/3. Egy kamionos a következőt mesélte a híres-nevezetes 2013. márciusi hóesésben átélt kalandjairól az M1-es autópályáról.

a) Egyszercsak egy 7°-os emelkedő aljához érkezett, ami úgy el volt jegesedve, hogy a súrlódás egészen zérusra csökkent. Szerencsére viszont a szél éppen hátulról fújt és nagyon erős volt, így a meglazult ponyváját vitorlaként kifeszítette és úgy jutott fel az emelkedőn. A szél állandó erővel vízszintesen fújt, és őt állandó, v = 18 km/h sebességgel vitte fel a lejtőn. Mekkora erőt fejtett ki a szél a kamionra? A kamion tömege M = 20 t.

b) A domb teteje után a túloldalon 5°-os lejtővel folytatódott az út, ami szélárnyékban volt, megszűnt a szél ereje; viszont nagyon havas volt, így a kamionra μ_g = 0,12 gördülési súrlódási együtthatóval most már gördülési ellenállási erő hatott (az üzemanyaga már elfogyott, nem tudott motorral menni, csak gurult). Ekkor kapta meg a kamionos a Belügyminisztériumtól az sms-t, és azt rögtön el is olvasta, ami 30 s-ig tartott. (Az sms szövege ez volt: „Segítünk! Ne hagyja el a gépjárművét! Ha elfogy az üzemanyaga, üljön át másik gépjárműbe!")

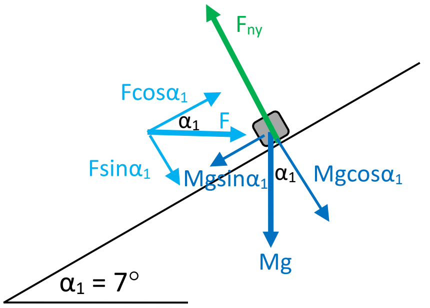
Mekkora lett a sebessége és mekkora utat tett meg ezalatt a 30 s alatt? (A kamion a lejtő tetejéről v = 18 km/h sebességről indult, amikor elkezdte olvasni az sms-t.)

Megoldás

a) A mozgásegyenlet vektori alakban:

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{Mg} + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F} \qquad \text{(F szél által kifejtett erő);} \quad \alpha_1 = 7°.$$

Mivel a szél által a kamionra kifejtett erő vízszintes, ezért azt is fel kell bontani a lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos komponensekre:



A szél által kifejtett erő lejtőre merőleges komponense miatt F_{ny} (az út által a kamionra kifejtett nyomóerő) most nem $Mg \cos\alpha_1$, mivel nem csak a nehézségi erő lejtőre merőleges komponensével kell egyensúlyt tartania. A mozgásegyenlet lejtőre merőleges komponense

$$Ma_{\perp} = – Mg \cos\alpha_1 + F_{ny} – F \sin\alpha_1 .$$

A lejtőre merőlegesen $a_{\perp} = 0$, tehát

$$F_{ny} = Mg \cos\alpha_1 + F \sin\alpha_1 .$$

Ezt figyelembe kéne venni a csúszási / gördülési súrlódási erő számításánál, de ennek most nincs jelentősége, mivel a súrlódás itt elhanyagolható.

A mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponense (felfelé felvéve a pozitív irányt, mivel arra halad a kamion):

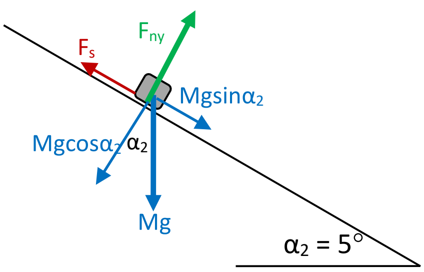
$$Ma = – Mg \cdot \sin\alpha_1 + F \cos\alpha_1 .$$

A kamion az emelkedőn állandó sebességgel halad, tehát a gyorsulása zérus.

$$a = 0 \quad \rightarrow \quad F = 20 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot \text{tg}7° = 24{,}56 \text{ kN}$$ a szél által kifejtett erő.

b) A mozgásegyenlet vektori alakban:

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{Mg} + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F}_s , \qquad \alpha_2 = 5°.$$



Most csak a nehézségi erő az, aminek van a lejtőre merőleges komponense, ezért

$$F_{ny} = Mg \cos\alpha_2.$$

A kamiont a lejtőn a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense gyorsítja, és a gördülési súrlódási erő fékezi. A mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponense (lefelé felvéve a pozitív irányt, mivel arra halad a kamion):

$Ma = Mg\sin\alpha_2 - F_s$

A gördülési súrlódási erő nagysága

$F_s = \mu_g \cdot F_{ny} = \mu_g\, Mg\cos\alpha_2$.

Tehát

$Ma = Mg\sin\alpha_2 - \mu_g\, Mg\cos\alpha_2 = Mg\,(\sin\alpha_2 - \mu_g \cos\alpha_2)$,

amiből a kamion gyorsulása

$a = g\,(\sin\alpha_2 - \mu_g \cos\alpha_2) = g\,(\sin 5° - 0{,}12\cdot\cos 5°) = -0{,}3239\ m/s^2$,

vagyis a kamion lassulni fog, a sebessége az idő függvényében csökken:

$v = v_0 + a\cdot t = (18/3{,}6) - 0{,}3239\,t = 5 - 0{,}3239\,t$ [m/s].

Ha behelyettesítünk t = 30 s-ot, akkor

$v = 5 - 0{,}3239\cdot 30 = -4{,}716$ m/s.

Mit jelent ez az eredmény? Azt, hogy a kamion a felvett pozitív iránnyal ellentétes irányba halad, vagyis felfelé a lejtőn – ami nem történhet meg. Miért kaptunk lehetetlen eredményt? Mert a mozgásegyenletben negatív előjellel szereplő súrlódási erő csak addig lép fel, amíg a kamion lefelé mozgásban van a lejtőn. Ha a kamion megáll, akkor a gördülési súrlódási erő eltűnik. Ha a kamion meg tudna indulni felfelé a lejtőn, akkor a gördülési súrlódási erő irányt váltana, lefelé mutatna. A kamion sebességére felírt képlet tehát csak addig érvényes, amíg a sebesség zérusra csökken:

$v = 5 - 0{,}3239\, t^* = 0$

$\rightarrow$ $t^* = 5/0{,}3239 = 15{,}44$ s alatt a kamion megáll, tehát t = 30 s esetén a sebessége nulla.

A megtett út ezalatt

$s = v_0 t^* + ½\, a\, t^{*2} = 5\cdot 15{,}44 - ½\cdot 0{,}3239\cdot 15{,}44^2 = 38{,}59$ m.

Megjegyzések:

1. Ha a sebességet nem számoljuk ki, hanem rögtön az $s = v_0 t + ½ a t^2$ képletbe helyettesítjük be a 30 s-ot, akkor $s = 5\cdot 30 - ½\cdot 0{,}3239\cdot 30^2 = 4{,}256$ m-t kapnánk. Ebből nem látnánk, hogy a kiszámolt eredmény irreális, de a másikkal összehasonlítva látjuk, hogy ez kisebb, mint az előbb kiszámolt 38,59 m, mintha visszafele indult volna a kamion a lejtő teteje irányába.

t = 30,87 s-ot behelyettesítve s = 0 lenne, ennél nagyobb időkre pedig s értéke negatív lenne.

2. A $v = v_0 + a\cdot t = 5 - 0{,}3239\,t$ képlet formailag analóg a hajításnál felírt $v_z = v_{0z} - gt$ képlettel, de ott a negatív gyorsulást okozó erő (a nehézségi erő) független attól, hogy a test merre mozog, és van fizikai értelme a negatív sebességeknek is.

4/4. Egy kettős lejtő egyik oldala $\alpha = 50°$-ot, a másik $\beta = 58°$-ot zár be a vízszintessel. Két testet összekötünk egy nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű kötéllel. Az 50°-os oldalra tesszük az m_1 = 14 dkg-os testet, az 58°-os oldalra az m_2 = 10 dkg-os testet.

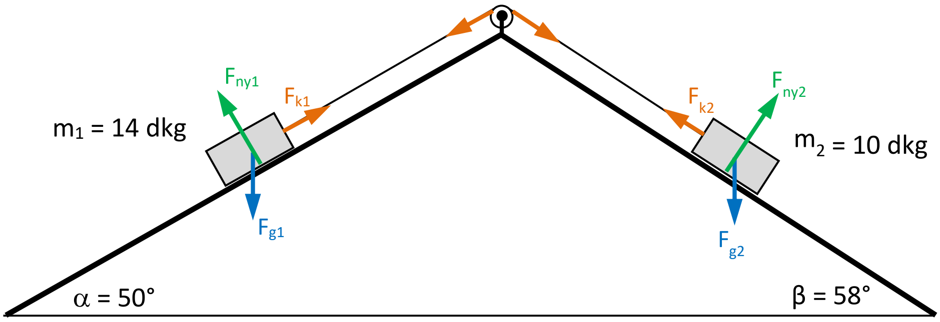
A testek és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható 0,12, a tapadási súrlódási együttható 0,15. Mekkora, milyen irányú a testek gyorsulása, ha

a) a 14 dkg-os testet meglökjük lefelé;

b) a 10 dkg-os testet meglökjük lefelé;

c) a testeket kezdősebesség nélkül tesszük a lejtőre?

Megoldás



A mozgásegyenletek vektori alakban:

$m_1\,\mathbf{a_1} = \mathbf{F_{g1}} + \mathbf{F_{ny1}} + \mathbf{F_{k1}} + \mathbf{F_{s1}}$

$m_2\,\mathbf{a_2} = \mathbf{F_{g2}} + \mathbf{F_{ny2}} + \mathbf{F_{k2}} + \mathbf{F_{s2}}$

A testek $\mathbf{a_1}$ ill. $\mathbf{a_2}$ gyorsulásának iránya eltérő, de a nagysága megegyezik, $a_1 = a_2 = a$.

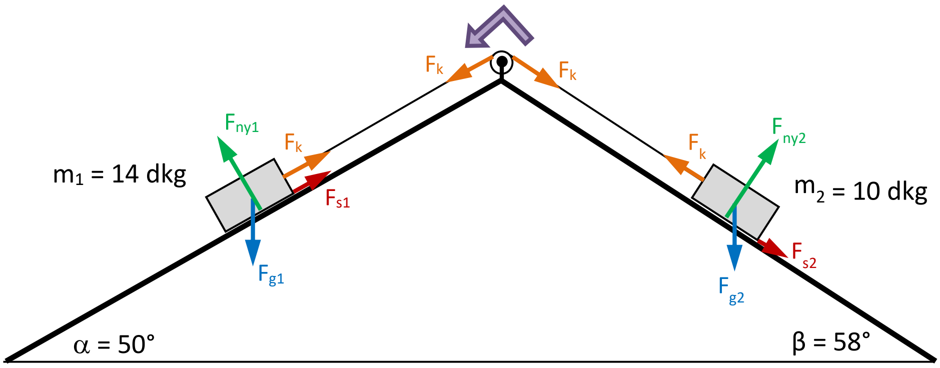
Az $\mathbf{F_{k1}}$ ill. $\mathbf{F_{k2}}$ kötélerők iránya eltérő, de a nagyságuk megegyezik, $F_{k1} = F_{k2} = F_k$.

Az előző feladatok mintájára tudjuk, hogy $F_{ny1} = m_1 g \cos\alpha$, ill. $F_{ny2} = m_2 g \cos\beta$.

A csúszási súrlódási erők nagysága $F_{s1} = \mu\, F_{ny1} = \mu\, m_1 g \cos\alpha$, ill. $F_{s2} = \mu\, F_{ny2} = \mu\, m_2 g \cos\beta$.

A lejtővel párhuzamos komponenseket írjuk fel úgy, hogy pozitív iránynak a kezdősebesség irányát vesszük fel (ahol meg van adva).

a)



$m_1 a_a = m_1 g \sin\alpha - F_k - F_{s1} = m_1 g \sin\alpha - F_k - \mu\, m_1 g \cos\alpha$

$m_2 a_a = -\, m_2 g \sin\beta + F_k - F_{s2} = -\, m_2 g \sin\beta + F_k - \mu\, m_2 g \cos\beta$

A két egyenletet összeadva az F_k kötélerő kiesik:

$(m_1+m_2)\, a_a = m_1 g \sin\alpha - \mu\, m_1 g \cos\alpha - m_2 g \sin\beta - \mu\, m_2 g \cos\beta =$

$= g\, (\, m_1 (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) - m_2 (\sin\beta + \mu \cos\beta)\,)\,,$

amiből a gyorsulás

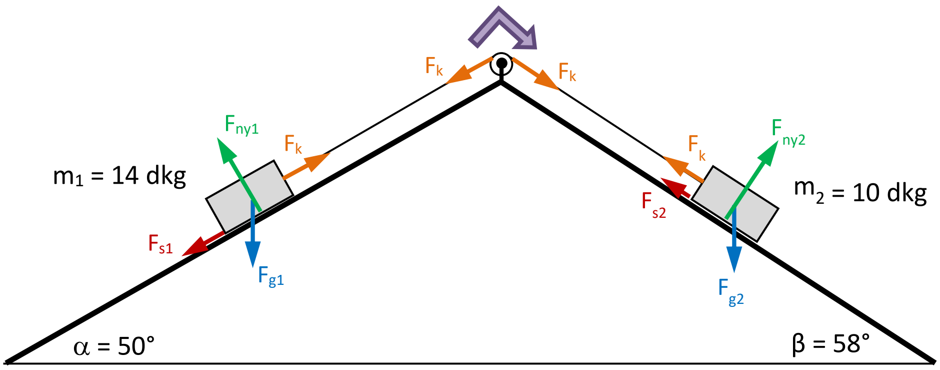
$a_a = g\, (\, m_1 (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) - m_2 (\sin\beta + \mu \cos\beta)\,) \,/\, (m_1+m_2)\,.$

Behelyettesítve

$a_a = 0{,}2201\ \mathrm{m/s^2}\,.$

A kapott eredmény pozitív, tehát a testek gyorsulnak a kezdősebesség irányába.

b)



$m_1a_b = -\,m_1g \sin\alpha + F_k - F_{s1} = -\,m_1g \sin\alpha + F_k - \mu\, m_1g \cos\alpha$

$m_2a_b = m_2g \sin\beta - F_k - F_{s2} = m_2g \sin\beta - F_k - \mu\, m_2g \cos\beta$

A gyorsulás ebben az esetben

$a_b = g\,(-m_1 (\sin\alpha + \mu \cos\alpha) + m_2 (\sin\beta - \mu \cos\beta)\,) / (m_1+m_2) = -1{,}650\ m/s^2$.

A kapott eredmény negatív, tehát ebbe az irányba elindítva a testek lassulnak.

c) Meg kell vizsgálni, hogy a testek elindulnak, vagy tapadnak.

Kiszámoljuk a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponensét a két testre:

$m_1g \sin\alpha = 1{,}072$ N; $m_2g \sin\beta = 0{,}8480$ N.

Mivel $m_1g \sin\alpha > m_2g \sin\beta$, ezért az m_1 = 14 dkg-os test indulna lefelé.

Ha nem lenne súrlódás, akkor

$m_1g \sin\alpha - m_2g \sin\beta = 0{,}2244$ N gyorsítaná a testeket (balra).

Kérdés, hogy a tapadási súrlódási erő tudja-e ezt ellensúlyozni.

$F_{t1,max} = \mu_t F_{ny1} = \mu_t m_1g\cos\alpha = 0{,}1350$ N,

$F_{t2,max} = \mu_t F_{ny2} = \mu_t m_2g\cos\beta = 0{,}0795$ N,

$F_{t1,max} + F_{t2,max} = 0{,}2145$ N .

$F_{t1,max} + F_{t2,max} < m_1g\sin\alpha - m_2g\sin\beta$, a tapadási súrlódási erő maximális értéke kisebb, mint az az erő, ami gyorsítaná a testeket, tehát a testek elkezdenek csúszni, mégpedig a_a = 0,2201 m/s^2 gyorsulással (a 14 dkg-os lefelé, a 10 dkg-os test felfelé).

Megjegyzés:

Ha $F_{t1,max} + F_{t2,max} > m_1g\sin\alpha - m_2g\sin\beta$ lenne, akkor azt írhatjuk fel, hogy

$F_{t1} \le F_{t1,max}$ és $F_{t2} \le F_{t2,max}$ és $F_{t1} + F_{t2} = m_1g\sin\alpha - m_2g\sin\beta$.

Két test esetén a helyzet bonyolult, de egyetlen test esetén F_t értéke meghatározható.

Az órai feladatban nem volt kérdés, de kiszámolhatjuk azt is, hogy mennyi idő alatt ér fel valamelyik test a csigához. Tegyük fel, hogy a kötél hossza L = 2 m, és a testeket úgy helyezzük el, hogy a kötél felénél van a csiga, vagyis a testek távolsága a lejtő tetejétől 1–1 m; a kezdősebesség pedig az **a**) ill. **b)** esetben v_0 = 1 m/s.

Az **a)** esetben a kezdősebesség irányában gyorsulnak is a testek:

$v = v_0 + a_a t = 1 + 0{,}2201\, t$; $s = v_0\, t + ½\, a_a t^2 = 1\cdot t + ½\cdot 0{,}2201\cdot t^2$

A kötél felének megfelelő utat, azaz 1 m-t kell megtennie a 10 dkg-os testnek, hogy felérjen:

$s = L/2 = 1 = v_0 t_a + ½ a_a t_a^2 = 1\cdot t_a + ½\cdot 0{,}2201\cdot t_a^2 \rightarrow t_a = 0{,}9090$ s alatt ér fel a 10 dkg-os test.

A **b)** esetben a testek lassulnak:

$v = v_0 + a_b t = 1 - 1{,}650\, t \quad \rightarrow \quad t^* = 1/1{,}650 = 0{,}6061$ s alatt megállnak, ezalatt

$s^* = v_0\, t^* + ½\, a_b t^{*2} = 1 \cdot t^* - ½ \cdot 1{,}650 \cdot t^{*2} = 1 \cdot 0{,}6061 - ½ \cdot 1{,}650 \cdot 0{,}6061^2 = 0{,}3030$ m-t tesznek meg, vagyis nem ér fel a 14 dkg-os test, hanem az **a)** részben kiszámolt gyorsulással indulnak el a testek ebből a helyzetből (zérus kezdősebességgel), és a 10 dkg-os test fog felérkezni

$s = ½\, a_a t'^2 = ½ \cdot 0{,}2201 \cdot t'^2 = L/2 + s^* = 1{,}303 \quad \rightarrow \quad t' = 3{,}441$ s, összesen $t_b = 4{,}047$ s alatt.

A **c)** esetben álló helyzetből ($v_0 = 0$) indul a 10 dkg-os test felfelé $a_a = 0{,}2201\ m/s^2$ gyorsulással, és

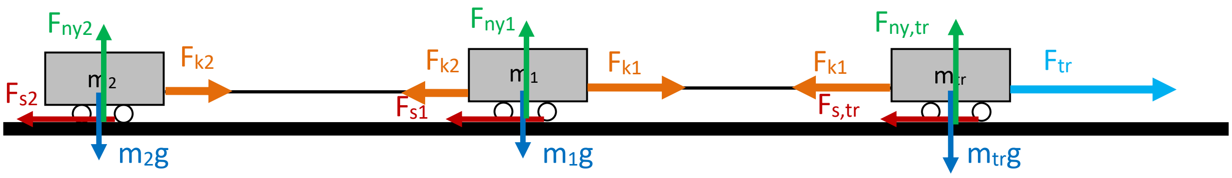
$t_c = \sqrt{\frac{2s}{a_a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (L/2)}{a_a}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}2201}} = 3{,}014$ s kell ahhoz, hogy a 10 dkg-os test felérjen.

Gyakorló feladatok a zárthelyire

4/5. Egy traktor két pótkocsit vontat nyújthatatlan drótkötelekkel. Mekkora erő feszíti a köteleket, ha indításnál a traktor 1 perc alatt gyorsít fel 40 km/h sebességre?
A traktor tömege 3 t, a pótkocsik tömege 2-2 t, a gördülő ellenállási együttható 0,1; g = 9,81 m/s².

Megoldás Jelölje

- $\mathbf{F}_{tr}$ az út által az traktorra a mozgás irányába kifejtett erőt;
- $\mathbf{F}_{k1}$ ill. $\mathbf{F}_{k2}$ a kötélerőket;
- $\mathbf{F}_{ny,tr}$, $\mathbf{F}_{ny1}$ és $\mathbf{F}_{ny2}$ a talaj által a traktorra, ill. pótkocsikra kifejtett nyomóerőket;
- $\mathbf{F}_{s,tr}$, $\mathbf{F}_{s1}$ és $\mathbf{F}_{s2}$ a gördülési súrlódási erőket.



A mozgásegyenletek vektori alakban:

$$m_{tr}\, \mathbf{a}_{tr} = m_{tr}\, \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny,tr} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{s,tr}$$
$$m_1\, \mathbf{a}_1 = m_1\, \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny1} + \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \mathbf{F}_{s1}$$
$$m_2\, \mathbf{a}_2 = m_2\, \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny2} + \mathbf{F}_{k2} + \mathbf{F}_{s2}$$

A mozgásegyenletek függőleges komponensei (a pozitív irányt felfelé választva):

$$m_{tr}\, a_{tr,z} = -m_{tr}\, g + F_{ny,tr}$$
$$m_1\, a_{1,z} = -m_1\, g + F_{ny1}$$
$$m_2\, a_{2,z} = -m_2\, g + F_{ny2}$$

Mivel a testek a felületen mozognak, a függőleges gyorsuláskomponensek nullák
→ ebből tudjuk a nyomóerőket:

$$F_{ny,tr} = m_{tr}\, g\,,\ F_{ny1} = m_1\, g\,,\ F_{ny2} = m_2\, g\,.$$

A mozgásegyenletek vízszintes komponensei (a haladási irányt választva pozitívnak):

$$m_{tr}\, a_{tr,x} = F_{tr} - F_{k1} - F_{s,tr}$$
$$m_1\, a_{1,x} = F_{k1} - F_{k2} - F_{s1}$$
$$m_2\, a_{2,x} = F_{k2} - F_{s2}$$

A kötél nyújthatatlan, ezért a gyorsulások megegyeznek: $a_{tr,x} = a_{1,x} = a_{2,x} = a$.
A súrlódási erők nagysága $F_s = \mu F_{ny} = \mu mg$.
Ezeket behelyettesítve:

$m_{tr} a = F_{tr} - F_{k1} - \mu m_{tr}g$
$m_1 a = F_{k1} - F_{k2} - \mu m_1 g$
$m_2 a = F_{k2} - \mu m_2 g$

Ezekből sorra kiszámolhatók a kérdéses erők, ha ismerjük a gyorsulást.
Mivel 1 perc alatt gyorsít a traktor 40 km/h sebességre állandó gyorsulással:

$a = \Delta v / \Delta t = (40/3{,}6 - 0) / 60 \approx 0{,}1852\ m/s^2$.

A kötélerők

$F_{k2} = m_2(a+\mu g) = 2000\cdot(0{,}1852+0{,}1\cdot 9{,}81) = 2332\ N$,
$F_{k1} = F_{k2} + m_1(a+\mu g) = (m_1+m_2)(a+\mu g) = 4665\ N$;

a traktor által kifejtett erő pedig

$F_{tr} = F_{k1} + m_{tr}(a+\mu g) = (m_1+m_2+m_{tr})(a+\mu g) = 8163\ N$.

MEGJEGYZÉSEK:

➢ Vegyük észre, hogy a fenti feladatban a gyorsulás az egyes testek mozgásegyenletéből kifejezve

$$a = \frac{F_{tr} - (F_{k1} + F_{s,tr})}{m_{tr}} = \frac{F_{k1} - (F_{k2} + F_{s1})}{m_1} = \frac{F_{k2} - F_{s2}}{m_2},$$

vagyis az egyes testekre előre- ill. hátrafelé ható erők különbsége arányos a tömegükkel (ugyanez igaz kötelekre is).

➢ Tekintsük a 3 testet egy rendszernek és adjuk össze a 3 testre felírt mozgásegyenletet:

$(m_{tr}+m_1+m_2)a = F_{tr} -(F_{s,tr} + F_{s1} + F_{s2})$

Ekkor az F_{k1} és F_{k2} kötélerők kiesnek, mivel ők a 3 testből álló rendszerben belső erők. A 3 testből álló rendszer gyorsulását a külső erők eredője határozza meg:

$$a = \frac{F_{tr} - (F_{s,tr} + F_{s1} + F_{s2})}{m_{tr}+m_1+m_2}.$$

4/6. Mekkora lejtővel párhuzamos erő szükséges ahhoz, hogy állandó gyorsulással 2 s alatt nyugalmi helyzetből indulva felhúzzunk egy 6 kg tömegű testet egy 30°-os, 1 m magas lejtőn, ha a súrlódási együttható 0,2?

Megoldás

A mozgásegyenlet vektori alakban:

$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_s}$ **F** az általunk kifejtett lejtővel párhuzamos húzóerő

A lejtőre merőleges komponens (kifelé pozitív):

$ma_{\perp} = - mg\cdot\cos\alpha + F_{ny}$

Mivel a testek a felületen mozognak, a lejtőre merőleges gyorsuláskomponens nulla
$\rightarrow$ ebből tudjuk a nyomóerőt: $F_{ny} = mg\cdot\cos\alpha$;
a súrlódási erő nagysága pedig $F_s = \mu F_{ny} = \mu mg\cdot\cos\alpha$.
A lejtővel párhuzamos komponens (felfelé pozitív):

$ma_{\|} = F - mg\cdot\sin\alpha - F_s = F - mg\cdot\sin\alpha - \mu mg\cdot\cos\alpha$.

A gyorsulás kiszámolható az időből, kezdősebességből és a megtett útból:
a lejtő hossza, azaz a megtett út

$s = h/\sin\alpha = 2$ m; $v_0 = 0 \rightarrow s = ½ a t^2 \rightarrow a = 2s/t^2 = 2\cdot 2/2^2 = 1$ m/s^2.

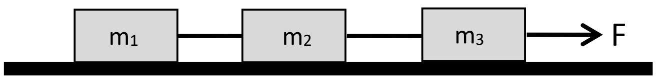
A mozgásegyenletből

$F = m (a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha) = 6\cdot(1 + 10\cdot\sin30° + 0{,}2\cdot 10\cdot\cos30°) = 46{,}39$ N.

MEGJEGYZÉSEK:

- Általánosan a lejtővel párhuzamosan a pozitív irányt választhatjuk felfelé vagy lefelé is. Azt az irányt célszerű pozitívnak választani, amerre a test mozog; ekkor a súrlódási erő negatív előjelű lesz (fékez), a gravitációs erő $mg\cdot\sin\alpha$ komponensének előjele pedig a sebesség irányától függ (pozitív, vagyis gyorsít, ha a test lefelé mozog, ill. negatív, vagyis fékez, ha a test felfelé mozog).
- Ha a gyorsulás negatívra jön ki, akkor a test lassul. Ha lefelé haladva lassul v=0 -ra, akkor ott a test megáll és a tapadási súrlódási erő miatt ott is marad (ha egyéb erő nem hat rá). Ha felfelé haladva lassul v=0 -ra, akkor a tapadási súrlódási együttható értékétől függ, hogy egy helyben marad vagy elkezd visszacsúszni lefelé. Ha visszacsúszik, akkor a csúszási súrlódási erő iránya megváltozik (mivel azt a sebesség iránya szabja meg).
- Ha van olyan erő (m$\mathbf{g}$ -n és $\mathbf{F_{ny}}$ -n kívül, pl. egy külső húzó/tolóerő), aminek van a lejtőre merőleges komponense, akkor módosul a mozgásegyenletnek a lejtőre merőleges komponense és emiatt változik F_{ny} nagysága, és azzal együtt F_s nagysága is. Ha a külső erő „belenyomja” a testet a lejtőbe, akkor F_{ny} (és F_s) nagysága nő, ha „elemeli”, akkor csökken.

4/7. (DRS 3.11) Vízszintes súrlódásmentes felületen $m_1 = 3$ kg tömegű test, kötéllel hozzákötve $m_2 = 7$ kg tömegű test, kötéllel hozzákötve $m_3 = 10$ kg tömegű test, és azt húzzuk $F = 100$ N erővel vízszintesen. A kötelek nyújthatatlanok, a tömegük elhanyagolható. Mekkora a testek gyorsulása és mekkorák a kötélerők?

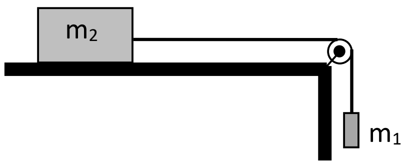


Eredmények: $a = 5$ m/s^2; m_1 és m_2 között $F_{k1} = 15$ N; m_2 és m_3 között $F_{k2} = 50$ N.

4/8. (DRS 3.5) Vízszintes asztalon $m_2 = 2$ kg tömegű test, az asztal szélén lévő csigán átvetett kötéllel hozzákötve $m_1 = 0{,}5$ kg tömegű test lóg függőlegesen. Mekkora a kötéllel egymáshoz kötött testek gyorsulása és a kötelet feszítő erő, ha az m_2 tömegű test

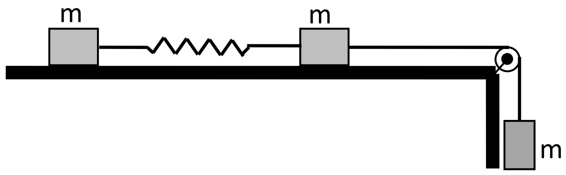
a) a vízszintes felületen súrlódás nélkül csúszhat;

b) és a vízszintes felület közötti súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$?

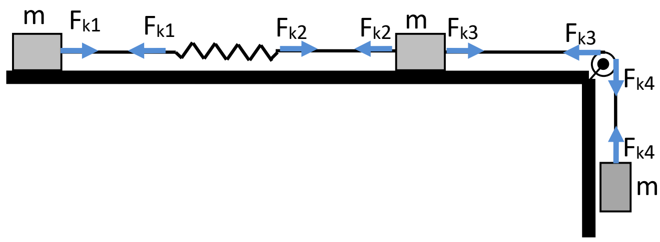


Eredmények: **a)** $a = 2$ m/s^2; $F_k = 4$ N ; **b)** $a = 0{,}4$ m/s^2; $F_k = 4{,}8$ N.

4/9. (DRS 3.12) Mennyivel nyúlik meg a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? Mindhárom test tömege m = 1 kg, a súrlódási együttható μ = 0,2, a rugóállandó k = 4 N/cm, a csiga, a rugó és a kötelek tömege elhanyagolható, a csiga súrlódásmentes, a kötelek nyújthatatlanok.



Megoldás



Kötélerők: egy-egy kötélszakasz két végén azonos nagyságú az erő, mert a kötelek tömege elhanyagolható.
$F_{k1} = F_{k2}$, mert a rugó tömege elhanyagolható (ha lenne tömege, a két kötélerő különbsége gyorsítaná a rugót).
Ez a kötélerő lesz egyenlő a rugóerővel: $F_{k1} = F_{k2} = F_r$.
Tudjuk, hogy a rugóerő a rugó megnyúlásával arányos: $F_r = k\cdot\Delta l$, ebből kiszámolható majd Δl.
$F_{k3} = F_{k4}$, mert a csiga tömege elhanyagolható és súrlódásmentes.
A mozgásegyenletek (F_{k1} helyett is F_{k2}-t, F_{k4} helyett is F_{k3}-at írva):
a lógó testre $ma = mg - F_{k3}$,
a középső testre $ma = F_{k3} - F_{k2} - F_s = F_{k3} - F_{k2} - \mu mg$,
a bal oldali testre $ma = F_{k2} - F_s = F_{k2} - \mu mg$.
Ezekből

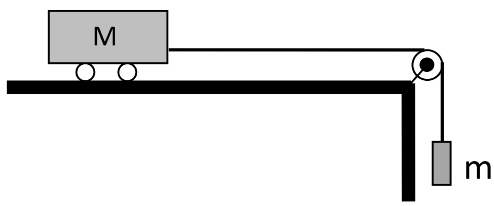
$$a = \frac{mg-2\mu mg}{3m} = \frac{1-2\mu}{3}g = \frac{1-2\cdot 0{,}2}{3}\cdot 10 = 2\ \mathrm{m/s^2}.$$

A rugó megnyúlását F_2-ből számoljuk, azt pedig a bal oldali test egyenletéből kapjuk meg:

$F_{k2} = ma + \mu mg = 1\cdot(2+0{,}2\cdot 10) = 4$ N ,

$\Delta l = F_{k2} / k = 1$ cm .

4/10 . Vízszintes asztallapon kiskocsi mozog. A kiskocsit egy csigán átvetett kötélre akasztott súly mozgatja.
m = 100 g esetén a kiskocsi 3 s alatt,
m = 200 g esetén a kiskocsi 1 s alatt
teszi meg az 1 m-es utat nyugalmi helyzetből kiindulva. Mekkora a kocsi tömege, és mekkora a súrlódási együttható? $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$



Megoldás

A mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} Ma &= F_k - \mu Mg \\ ma &= mg - F_k \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad M(a+\mu g) = m(g-a)$$

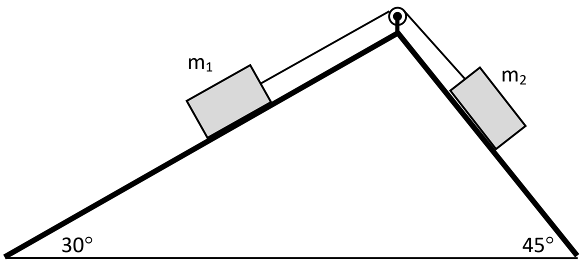
$m_1 = 0{,}1$ kg esetén $a_1 = 2s / t_1^2 = 2\cdot 1 / 3^2 = 2/9$ m/s^2 : $M(2/9+10\mu) = 0{,}1(10-2/9)$

$m_2 = 0{,}2$ kg esetén $a_2 = 2s / t_2^2 = 2\cdot 1 / 1^2 = 2$ m/s^2 : $M(2+10\mu) = 0{,}2(10-2)$

$\rightarrow$ M = 0,35 kg, $\mu = 0{,}257$.

4/11. A kettős lejtő

30° hajlásszögű oldalán $m_1 = 2$ kg tömegű, 45° hajlásszögű oldalán $m_2 = 1$ kg tömegű test fekszik, a két test össze van kötve egy csigán átvetett kötéllel. A súrlódás elhanyagolható. Mekkora a testek gyorsulása?



Eredmény: m_1 gyorsul lefelé, a = 0,9763 m/s^2.

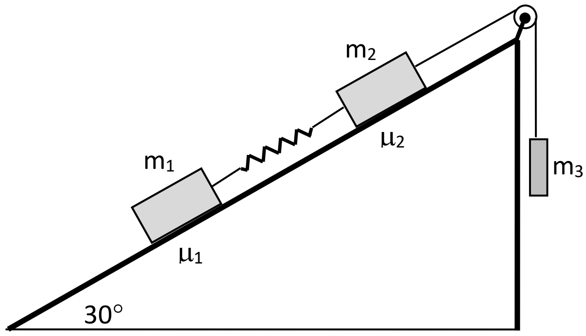
4/12. Mennyivel nyúlik meg a rugó?

$m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg, $m_3 = 5$ kg,

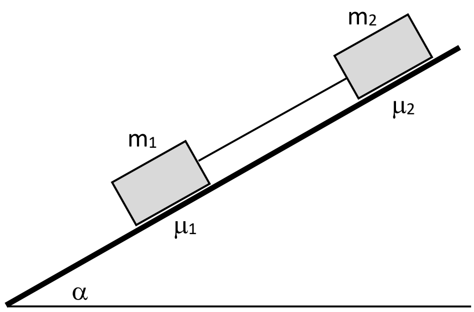
$\mu_1 = 0{,}2$; $\mu_2 = 0{,}06$; k = 0,5 N/cm.

A kötelek súlytalanok és nyújthatatlanok, a csiga súlytalan és súrlódásmentes, a lejtő nem tud elmozdulni.

Eredmény: a = 2 m/s^2; $F_k = 15$ N; Δl = 30 cm.



4/13. α hajlásszögű lejtőre kötéllel összekötött két testet teszünk. A lejtő és az m_1 tömegű test közötti csúszási súrlódási együttható μ_1, az m_2 tömegű testé pedig μ_2. Mi a feltétele annak, hogy a két test között a kötél feszes legyen? Mekkora a kötélerő?



Megoldás

$m_1a = m_1g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha - F_k$

$m_2a = m_2g \sin\alpha - \mu_2 m_2 g \cos\alpha + F_k$

$\rightarrow \quad a = \left[\sin\alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1+m_2}\cos\alpha\right] g \quad \rightarrow \quad F_k = \frac{m_1 m_2(\mu_2-\mu_1)}{m_1+m_2}\cos\alpha\, g$.

A kötél feszes, ha $F_k \geq 0$, azaz ha $\mu_2 \geq \mu_1$ (az egyenlőség esetén feszes kötéllel kell letenni).

VAGY:

Gyorsabb megoldás, ha a mozgásegyenleteket felírjuk a kötélerő nélkül, és azt mondjuk, hogy ha az alsó test gyorsulása legalább akkora, mint a felső test gyorsulása, akkor a kötél feszes marad.

$m_1a_1 = m_1g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha \quad \rightarrow \quad a_1 = (\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)\, g$,

hasonlóan

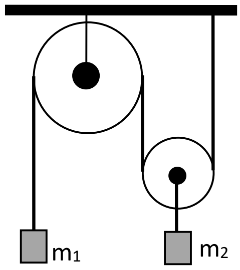
$a_2 = (\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)\, g$.

$a_1 \geq a_2$:

$\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha \geq \sin\alpha - \mu_2\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \mu_2 \geq \mu_1$.

ÉRDEKLŐDŐKNEK: FELADATOK IDEÁLIS CSIGÁVAL

4/14. (DRS 3.8) Az ábrán látható elrendezésben a csigák és a kötél tömege elhanyagolható, a kötél nyújthatatlan, a csigák súrlódásmentesek.
Mekkora az egyes tömegek gyorsulása és az egyes köteleket feszítő erő, ha m_1 = 0,6 kg és m_2 = 0,8 kg?

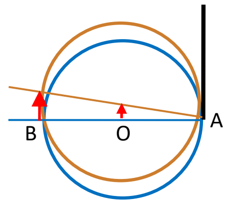


Megoldás
Mivel a kötél és a csiga tömege elhanyagolható és a csiga súrlódásmentes, ezért a csigákon átvetett kötélben az F_{k1} kötélerő nagysága a kötél mentén állandó; az m_2 tömeget a mozgócsigához rögzítő kötélben lévő erő nagysága pedig F_{k2}.
Kötéllel összekötött testek esetén az egyes erők előjelét nem a függőlegesen felvett z tengelyhez szokás viszonyítani, hanem a kötél mentén szokás felvenni egy pozitív irányt.
Tételezzük fel, hogy m_1 fog lefelé gyorsulni. Ezzel a feltételezéssel a mozgásegyenletek:

$m_1 a_1 = m_1 g - F_{k1}$

$m_2 a_2 = F_{k2} - m_2 g$

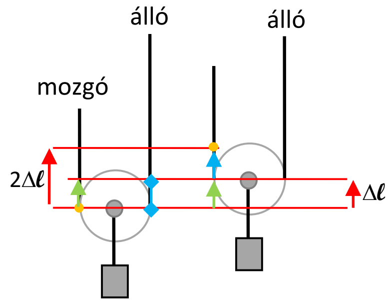
A két test gyorsulása most nem egyenlő. Látható, hogy ha az A pontot fixnek képzeljük el, ami körül a csiga elfordul, akkor amíg az O pont Δl-nyit emelkedik, addig a B pont 2Δl-nyit emelkedik. Másrészt, mivel a kötél hossza állandó, a csiga emelkedésekor „áttevődik” Δl -nyi a jobb oldali álló kötélrészről a túloldalra. (A csiga peremén futó kötél hossza változatlan, így a csiga mérete nem számít.)
Mivel $a = \ddot{x}$ $\rightarrow$ $a_2 = a_1/2$.



Az F_{k1} és F_{k2} kötélerőkre felírjuk a mozgócsiga mozgásegyenletét:

$m_{cs} a_{cs} = 2 F_{k1} - F_{k2}$,

amiből $F_{k2} = 2 F_{k1}$, mivel $m_{cs} = 0$.



Ezeket behelyettesítve

$m_1 a_1 = m_1 g - F_{k1}$

$m_2 a_1/2 = 2 F_{k1} - m_2 g$

amiből

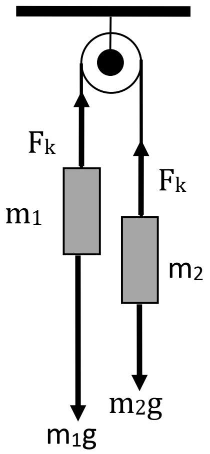
$a_1 = \frac{2m_1 - m_2}{2m_1 + \frac{m_2}{2}} g = 2{,}50 \text{ m/s}^2$ (pozitív, tehát tényleg lefelé gyorsul),

$a_2 = 1{,}25 \text{ m/s}^2$ (tényleg felfelé),

$F_{k1} = m_1 (g - a_1) = 4{,}5$ N ,

$F_{k2} = 2 F_{k1} = m_2 (g + a_2) = 9{,}0$ N .

4/15. (DRS 3.3) Csigán átvetett nyújthatatlan kötél egyik végén m_1 = 2 kg, másik végén m_2 = 1 kg tömegű test lóg. A kötél súrlódásmentesen mozoghat. Írjuk fel az egyes testek mozgásegyenleteit! Határozzuk meg a kötélben fellépő feszítőerőt, és az egyes testek gyorsulását! (A csiga tömege elhanyagolható.)



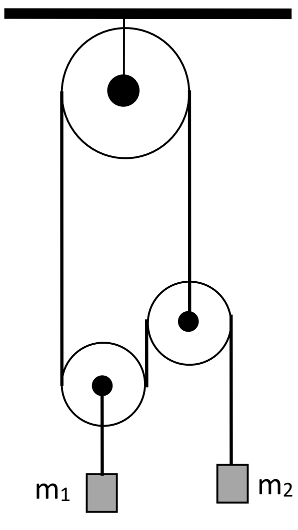
MO.
Itt most látszik, hogy m_1 fog lefelé gyorsulni:

$m_1 a = m_1 g - F_k$
$m_2 a = F_k - m_2 g$
Ebből

$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{g}{3} = 3{,}27\ \mathrm{m/s^2}$ és

$F = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{4g}{3} = 13{,}08\ \mathrm{N}$

4/16. Egy gondolkodtató csigás feladat:



A kötél nyújthatatlan, a kötél és a csigák tömege elhanyagolható, a csigák súrlódásmentesek. Határozzuk meg az m_1 és az m_2 tömeg gyorsulását és a kötélerőt!