Hajítás – összefoglalás

A testre állandó erő hat, így a gyorsulása állandó: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = \text{konst.}$; mivel $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, ezért $\mathbf{a} = \mathbf{g}$

$\rightarrow$ a sebesség $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{g}\,t$ $\rightarrow$ a helyvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\,t + ½\,\mathbf{g}\,t^2$.

Írjuk fel ezeket a vektorokat Descartes-féle koordináta-rendszerben!

A koordináta-rendszerünk z tengelye mutasson az erővel ellentétes irányba (azaz függőlegesen felfelé): $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{k}$, így ha a test a t=0 -ban az $\mathbf{r_0}$ pontból indul $\mathbf{v_0}$ sebességgel:

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{k} = \dot{\mathbf{v}} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v_0} - g\,t\,\mathbf{k} = \dot{\mathbf{r}} \quad\rightarrow\quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\,t - ½\,g\,t^2\,\mathbf{k}\,.$$

Forgassuk a koordináta-rendszerünket a z tengely körül úgy, hogy a $\mathbf{v_0}$ kezdősebességnek csak x és z irányú komponense legyen:

$$\mathbf{v_0} = v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{0z}\,\mathbf{k} = v_0\cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0\sin\alpha\,\mathbf{k}$$

ahol α a kezdősebességnek a vízszintessel bezárt szöge;

ezzel a test sebessége:

$$\mathbf{v}(t) = v_0\cos\alpha\,\mathbf{i} + (v_0\sin\alpha - g\,t)\,\mathbf{k}\,,$$

vagyis $v_x = v_0\cos\alpha$, $v_y = 0$, $v_z(t) = v_0\sin\alpha - g\,t$.

A test helyvektora, ha az $\mathbf{r_0} = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ pontból indult:

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + (v_0\cos\alpha)\,t)\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + (z_0 + (v_0\sin\alpha)\,t - ½\,g\,t^2)\,\mathbf{k}\,,$$

vagyis $x(t) = x_0 + (v_0\cos\alpha)\,t$, $y(t) = y_0$, $z(t) = z_0 + (v_0\sin\alpha)\,t - ½\,g\,t^2$.

Ha lehetséges, akkor érdemes úgy választani, hogy legyen $\mathbf{r_0} = \mathbf{0}$, ezzel

$$\mathbf{r}(t) = (v_0\cos\alpha)\,t\,\mathbf{i} + ((v_0\sin\alpha)\,t - ½\,g\,t^2)\,\mathbf{k}\,.$$

A hajítás pályája:

$x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t \quad\rightarrow\quad t = x\,/\,(v_0\cos\alpha)$,

$z(t) = (v_0\sin\alpha)\,t - ½\,g\,t^2$, amibe t-t behelyettesítve

$z(x) = \mathrm{tg}\alpha\;x - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}\,x^2$, a pálya tehát parabola.

A hajítás magassága: $h = z_{max}$.

A pálya legfelső pontján $dz/dt = v_z = 0$:

$v_0\sin\alpha - g t_h = 0 \;\rightarrow\; t_h = v_0\sin\alpha/g$ időben éri el a pálya legfelső pontját

$$\rightarrow\quad h = z(t_h) = v_0\sin\alpha\,\frac{v_0\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g}.$$

(Vagy kiszámolható a pálya egyenletéből, a $dz/dx=0$ feltételből.)

A hajítás távolsága: $d = x(t_d)$, ahol $z(t_d) = z_0$, azaz: az elhajítás helyétől milyen távol érkezik vissza a test az elhajítás magasságára (ha a földről hajítottunk vízszintes terepen, akkor a földre).

$z_0 + (v_0\sin\alpha)\,t - ½\,g\,t^2 = z_0 \quad\rightarrow\quad t_d = 2\,\frac{v_0\sin\alpha}{g} = 2\,t_h$ (mivel a pálya szimmetrikus)

$$\rightarrow\quad d = x(t_d) = v_0\cos\alpha\;2\,\frac{v_0\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}\,.$$

(Vagy kiszámolható a pálya egyenletéből: $z(x) = z_0$.)

3/1. Egy függőlegesen feldobott kő sebessége 2 s múlva 4 m/s …
a) … felfelé,
b) … lefelé.
Mekkora volt a kezdősebesség, és milyen maximális magasságot ért el?

Megoldás
A függőlegesen felfelé mutató irányt vesszük pozitívnak,
a gyorsulás tehát negatív: $a_z = -g$;
a sebesség: $v_z(t) = v_{0z} - g\,t$.
Nem kell két szakaszra bontani a mozgást (külön a felfelé, ill. a lefelé haladó mozgásra)!
Az emelkedő szakaszon v_z pozitív, zuhanás közben negatív.
v_{0z} előjele attól függ, hogy felfelé vagy lefelé dobtuk el a testet.
A feladatban $v_z(t)$ értéke van megadva t = 2 s-ra.

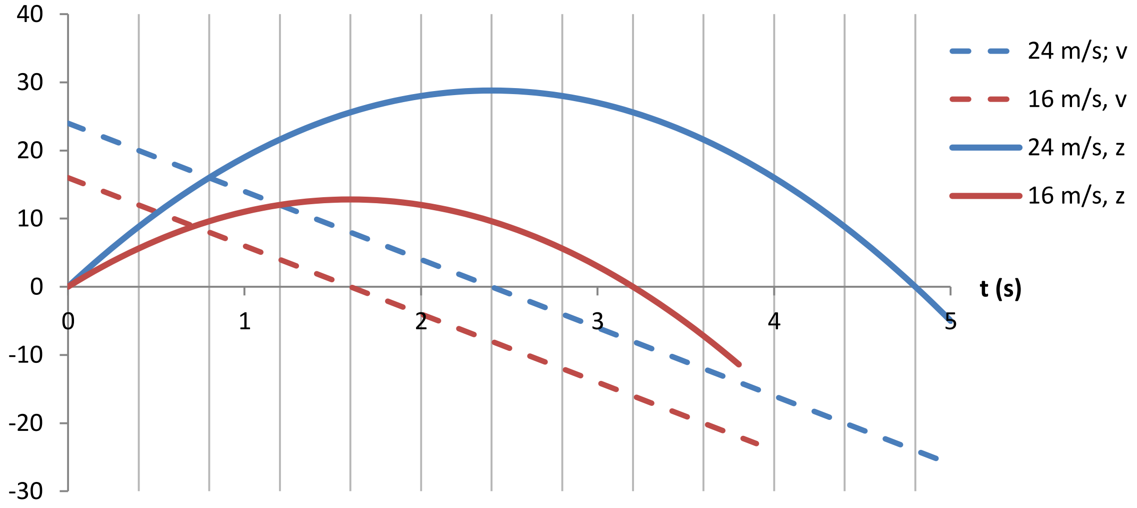
$$v_z(2) = v_{0z} - g\,t = v_{0z} - 10 \cdot 2 = v_{0z} - 20 \ \ [\text{m/s}],$$

ebből ki tudjuk fejezni a kezdősebesség értékét:

$$v_{0z} = v_z(2) + g \cdot 2 = v_z(2) + 20 \ \ [\text{m/s}].$$

a) A test még felfelé mozog, vagyis $v_z(2) > 0$: $v_z(2) = +4$ m/s $\rightarrow$ $v_{0z} = 24$ m/s.
b) A test már lefelé mozog, vagyis $v_z(2) < 0$: $v_z(2) = -4$ m/s $\rightarrow$ $v_{0z} = 16$ m/s.

A maximális magasságot akkor éri el a test, amikor a sebessége zérus: $v_{0z} - g\,t_h = 0 \rightarrow t_h = v_{0z} / g$
a) $t_h = 24/10 = 2{,}4$ s; **b)** $t_h = 16/10 = 1{,}6$ s alatt.
A z koordináta az idő függvényében $z(t) = z_0 + v_{0z}\,t - ½\,g\,t^2$,
A t_h pillanatban, amikor a test a legmagasabban van, a z értéke
$z(t_h) = z_0 + v_{0z}\,t_h - ½\,g\,t_h^2 = z_0 + v_{0z} \cdot (v_{0z}/g) - ½\,g \cdot (v_{0z}/g)^2 = \ldots = z_0 + v_{0z}^2/(2g)$,
az emelkedés z_0-hoz képest $h = v_{0z}^2/(2g)$.
a) $h = 24^2/20 = 28{,}8$ m; **b)** $h = 16^2/20 = 12{,}8$ m.



Az ábrán látható, hogy a folytonos vonallal jelölt z(t) görbének ott van a maximuma, ahol a szaggatott vonallal jelölt v(t) egyenes értéke zérus. Kisebb t értékekre v(t) pozitív és z(t) értéke nő (a test emelkedik); nagyobb értékekre v(t) negatív és z(t) csökken (a test zuhan). A v(t) egyenes a z(t) parabola deriváltja.

3/2. 3,2 m magasról eldobunk egy követ v_0 = 2,8 m/s kezdősebességgel, a vízszinteshez képest felfelé 26°-os szöggel.

a) Hol van a kő 0,1 s múlva?

b) Adjuk meg a test sebességének komponenseit 0,5 s-mal az elhajítás után!

c) Mikor ér a kő vissza ugyanabba a magasságba, amilyen magasról eldobtuk? Mekkora, milyen irányú ekkor a sebessége? Milyen távol van ekkor az eldobás helyétől?

d) Mikor és hol ér földet a kő? Mekkora sebességgel, milyen irányban csapódik be?

Megoldás

Ferde hajításkor a függőleges sebességkomponensre és a z helykoordinátára ugyanolyan összefüggések érvényesek, mint függőleges hajításnál, azaz

$v_z(t) = v_{0z} - g\,t$ és $z(t) = z_0 + v_{0z}\,t - ½\,g\,t^2$,

de közben a test vízszintes irányban is elmozdul. A vízszintes sebességkomponens értéke időben nem változik, mivel vízszintes irányú erő nem hat a testre (a közegellenállást elhanyagolva), így a vízszintes helykoordináta egyenletesen változik:

$a_x = 0$; v_x = konst. = v_{0x} ; $x(t) = x_0 + v_{0x}\,t$.

A kezdősebesség v_0 nagyságából és a vízszintessel bezárt α szögből kifejezve a kezdősebesség komponensei:

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ és $v_{0z} = v_0 \sin\alpha$,

ezeket beírva az előző képletekbe:

$v_x = v_0 \cos\alpha$; $x(t) = x_0 + (v_0 \cos\alpha)\,t$;

$v_z(t) = (v_0 \sin\alpha) - g\,t$; $z(t) = z_0 + (v_0 \sin\alpha)\,t - ½\,g\,t^2$.

A feladatban megadott értékeket behelyettesítve

$v_{0x} = 2{,}8\cdot\cos26° = 2{,}517$ m/s , $v_{0z} = 2{,}8\cdot\sin26° = 1{,}227$ m/s ,

a sebesség komponensei tehát

$v_x = 2{,}517$ m/s és $v_z(t) = 1{,}227 - 10\,t$.

Legyenek a kiindulási pont koordinátái $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 3{,}2$ m,

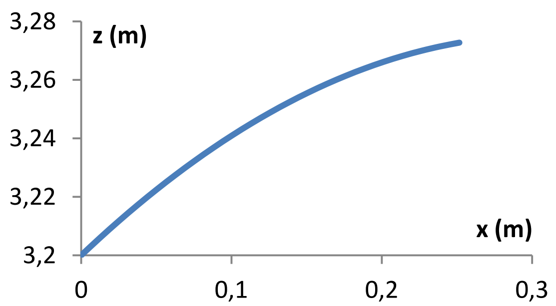
így a helyvektor komponensei

$x(t) = 2{,}517\,t$ és $z(t) = 3{,}2 + 1{,}227\,t - 5\,t^2$.

a) $t_a = 0{,}1$ s behelyettesítésével a helyvektor komponensei

$x(t_a) = (v_0 \cos\alpha)\,t_a$: $x(0{,}1) = 2{,}517\cdot0{,}1 = 0{,}2517$ m ;

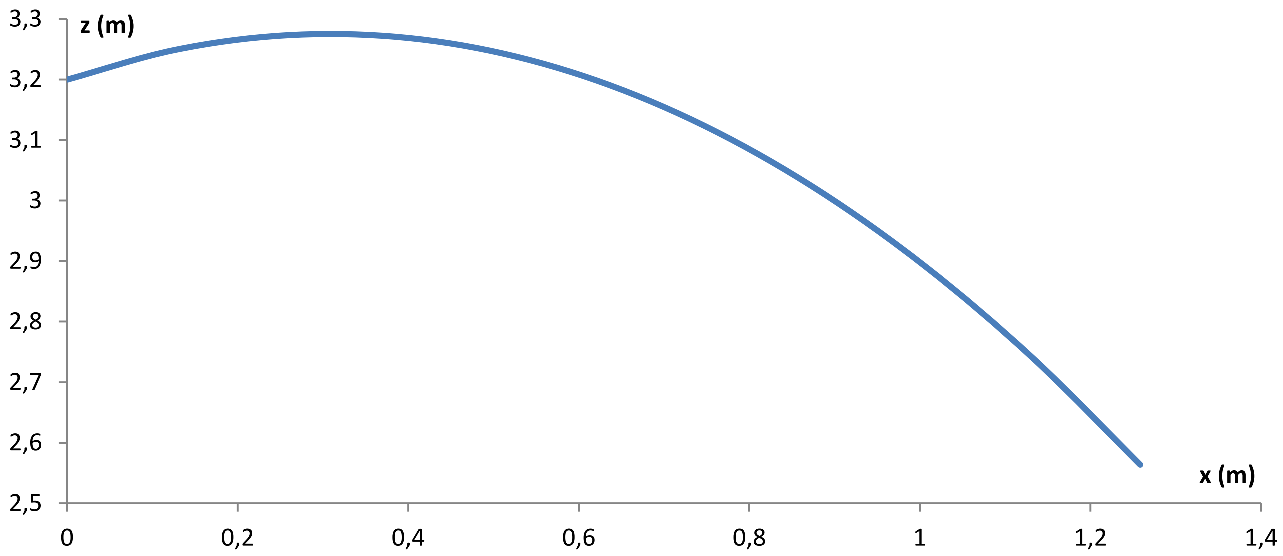
$z(t_a) = z_0 + (v_0 \sin\alpha)\,t_a - ½\,g\,t_a^2$: $z(0{,}1) = 3{,}2+1{,}227\cdot0{,}1-5\cdot0{,}1^2 = 3{,}273$ m (7,3 cm-t emelkedett).



b) $t_b = 0{,}5$ s behelyettesítésével a sebességvektor

$v_x = v_0 \cos\alpha$: $v_x = 2{,}517$ m/s ;

$v_z(t_b) = (v_0 \sin\alpha) - g\, t_b$: $v_z = 1{,}227 - 10\cdot 0{,}5 = -3{,}773$ m/s (negatív, már lefelé megy).



c) Az, hogy visszaér az eredeti magasságra, azt jelenti, hogy a z koordináta értéke ugyanannyi, mint kiinduláskor volt, azaz z_0:

$z(t) = z_0$: $z_0 + v_{0z}\, t_c - \frac{1}{2} g\, t_c^2 = z_0$.

Ebből kifejezhető a t_c idő, ami alatt abba a pontba ér: $t_c = 2v_{0z}/g = 0{,}2455$ s.

Eddigre vízszintesen

$x(t_c) = x_0 + (v_0 \cos\alpha)\, t_c = 2{,}517\cdot 0{,}2455 = 0{,}6178$ m-t tesz meg,

ilyen távol van a kiindulási ponttól (a z koordináta nem változott).

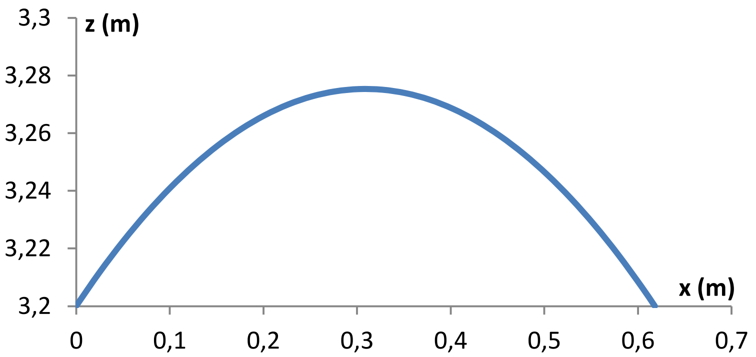
A sebességének a komponensei ekkor

$v_x = v_0x$: $v_x = 2{,}517$ m/s ;

$v_z(t_c) = v_{0z} - g\, t_c = v_{0z} - g\cdot(2v_{0z}/g) = v_{0z} - 2v_{0z} = -v_{0z}$,

vagyis a sebességének függőleges komponense ugyanakkora, mint a kezdősebességé volt, csak most lefelé mutat: $v_z(t_c) = -v_{0z} = -1{,}227$ m/s.

A sebesség nagysága tehát most is 2,8 m/s, és a vízszintessel most is 26°-os szöget zár be, de most ferdén lefelé, azaz –26°-ot. A parabolapálya szimmetriáját kihasználva ezt számolás nélkül is meg tudtuk volna válaszolni.



d) A földet érés azt jelenti, hogy a z koordináta értéke zérus, mivel z_0 értékét úgy választottuk meg, hogy a z = 0 jelentse a földet, és a kiinduló z_0 koordináta az elhajítás magassága. (Választhattuk volna z_0 értékét zérusnak, ebben az esetben a földet éréskor z értéke –3,2 m lenne.)

$z = 0$: $z_0 + v_{0z}\, t_f - ½\, g\, t_f^2 = 0$,

behelyettesítve

$3{,}2 + 1{,}227\, t_f - 5\, t_f^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_f = 0{,}9321$ s alatt ér földet a test.

Eddigre vízszintesen

$x(t_f) = v_{0x}\, t_f = 2{,}517 \cdot 0{,}9321 = 2{,}346$ m-t tesz meg.

(Ha az is kérdés lenne, hogy milyen távol van ez a pont az elhajítás helyétől, akkor azt Püthagorasz-tétellel tudjuk kiszámolni az $x(t_f) - x(0) = 2{,}346$ m és a $z(t_f) - z(0) = -3{,}2$ m értékek behelyettesítésével, amiből D = 3,968 m jön ki.)

A földet érési (becsapódási) sebesség a t_f behelyettesítésével:

$v_x = v_0x$: $\quad v_x = 2{,}517$ m/s ;

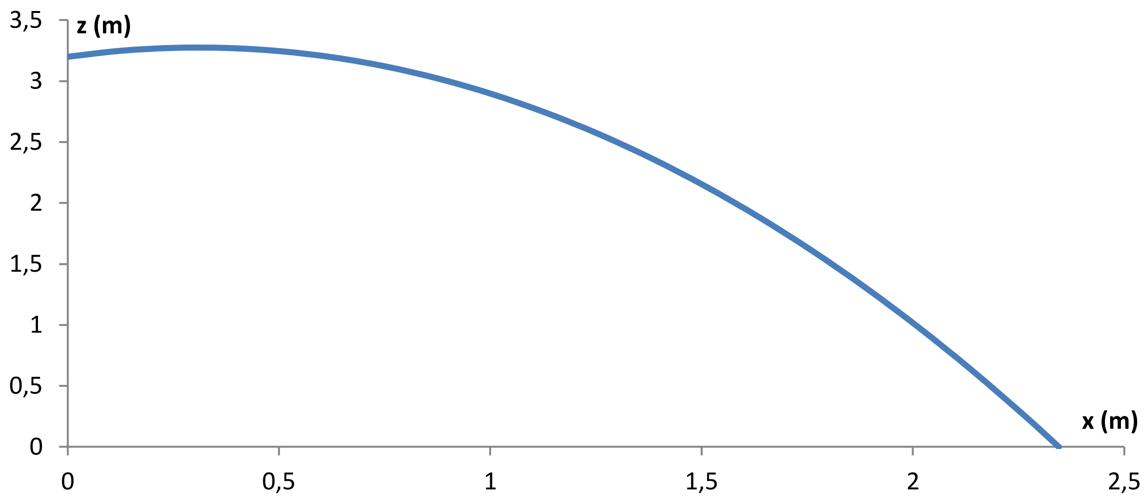
$v_z(t_f) = v_{0z} - g\, t_f = 1{,}227 - 10 \cdot 0{,}9321 = -8{,}094$ m/s.

A sebesség nagysága tehát

$v(t_f) = 8{,}476$ m/s (Püthagorasz-tétellel);

a vízszintessel bezárt szöge

$\text{arc tg}\,(v_z/v_x) = \text{arc tg}\,(-8{,}094/2{,}517) = -72{,}73°$.



3/3. Béni áll az emeleti erkélyen. Abban a pillanatban, amikor Frédi kilép az utcára, Béni $v_0 = 2$ m/s sebességgel elhajít egy hógolyót. Frédi sebessége $v_F = 1$ m/s.

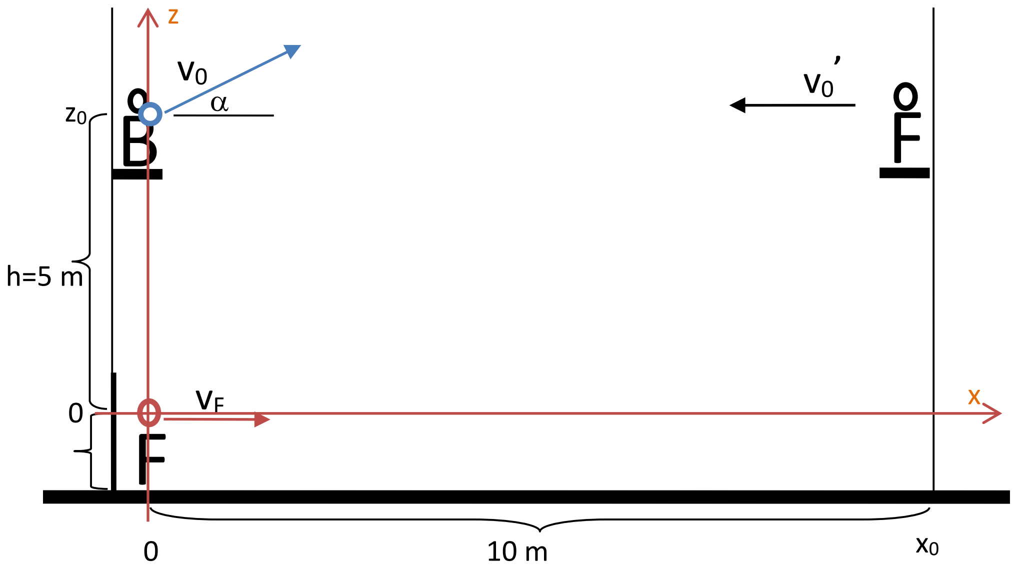
a) Milyen α szögben kell elhajítania, hogy a hógolyó Frédi fejére essék?

b) Mennyi idő múlva találja el?

c) A kaputól milyen távolságra találja el?

d) Frédi felmegy az utca másik oldalán lévő ház erkélyére és megcélozza a vele egy magasságban lévő barátját. Béni megijed, az elhajítás pillanatában leugrik az erkélyről (szabadesésnek vegyük!). Mi történik, ha Frédi $v_0' = 20$ m/s kezdősebességgel vízszintesen hajított?

e) Mekkora minimális v_0^* kezdősebességgel kell Frédinek vízszintesen hajítania, hogy még éppen eltalálja Bénit?



Megoldás

A hógolyó akkor esik Béni fejére, amikor a hógolyó helyvektora és Frédi fejének helyvektora megegyezik. A közös koordináta-rendszert válasszuk pl. úgy, hogy Frédi fejének kiindulási pontja legyen az origó, az x tengely 1,5 m-rel a járda fölött Frédi haladási irányába mutat, a z tengely pedig függőlegesen felfelé.

Frédi feje egyenletes mozgást végez vízszintes irányban a megadott sebességgel, tehát a fejének helyvektora a kijelölt koordináta-rendszerben

$x_F = v_F \cdot t = 1 \cdot t$ és $z_F = 0$.

A hógolyó mozgása ferde hajítás:

$x_h = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t = (2 \cdot \cos\alpha) \cdot t$ és $z_h = z_0 + (v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t - ½ g t^2 = 5 + (2 \cdot \sin\alpha) \cdot t - 5\,t^2$.

a) Keressük azt az t_1 időt, amikor $\mathbf{r_F}(t_1) = \mathbf{r_h}(t_1)$, vagyis amikor $x_F(t_1) = x_h(t_1)$ és $z_F(t_1) = z_h(t_1)$.

A vízszintes komponensek egyenlőségéből

$x_F(t_1) = x_h(t_1)$: $v_F \cdot t_1 = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t_1 \quad \rightarrow \quad (v_0 \cdot \cos\alpha - v_F) \cdot t_1 = 0$

$t_1 = 0$ csak annyit jelent, hogy kiinduláskor megegyeznek az x koordináták, ami a feladat megoldása szempontjából érdektelen információ.

$v_0 \cdot \cos\alpha - v_F = 0 \quad \rightarrow \quad v_0 \cdot \cos\alpha = v_F$

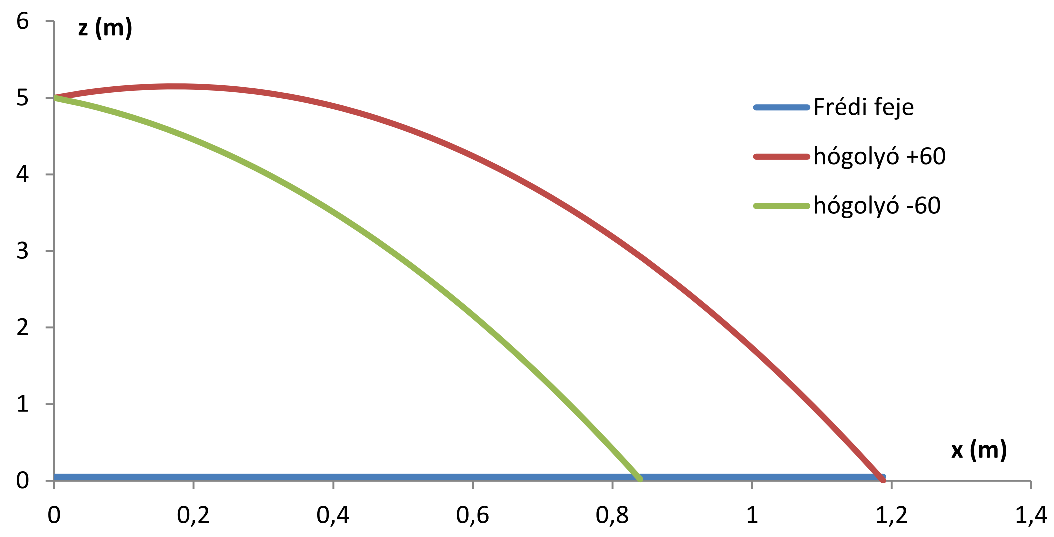
Ez azt jelenti, hogy az x koordináták minden pillanatban megegyeznek, tehát a hógolyó végig Frédi feje fölött van. (Mivel az $x_0 = 0$ koordinátától indul mindkét test és egyik testnek sincs gyorsulása a x tengely mentén, így találkozáskor csak akkor egyezhetnek meg az x koordinátáik, ha minden pillanatban megegyeznek.)

$v_0 \cdot \cos\alpha = v_F \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \cos\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = ½$

A hajítás szöge tehát

$\alpha = \pm 60°$.

A vízszinteshez képest 60°-os szögben kell eldobnia, akár ferdén felfelé, akár ferdén lefelé.



b) A keresett időt a függőleges komponensek egyenlőségéből kapjuk meg:

$z_h(t_1) = z_F(t_1)$: $z_0 + (v_0 \cdot \sin\alpha)\, t - ½\, g\, t^2 = 0$

Ferdén felfelé hajítva

$5 + (2 \cdot \sin(+60°))\, t_{1,fel} - 5\, t_{1,fel}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1,fel} = 1{,}188$ s, ill.

ferdén lefelé hajítva

$5 + (2 \cdot \sin(-60°))\, t_{1,le} - 5\, t_{1,le}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1,le} = 0{,}8417$ s.

c) Bármelyik test vízszintes komponensébe behelyettesítve
ferdén felfelé hajítva

$x_{fel} = x_F = 1 \cdot t_{1,fel}$, vagy $x_{fel} = x_h = (2 \cdot \cos(+60°)) \cdot t_{1,fel} = 1{,}188$ m, ill.

ferdén lefelé hajítva

$x_{le} = x_F = 1 \cdot t_{1,le}$, vagy $x_{le} = x_h = (2 \cdot \cos(-60°)) \cdot t_{1,le} = 0{,}8417$ m.

d) Most Béni fejének és a másik hógolyónak a helyvektorát kell felírni. Ugyanabban a koordináta-rendszerben felírva, mint amit az **a)** feladatban használtunk:

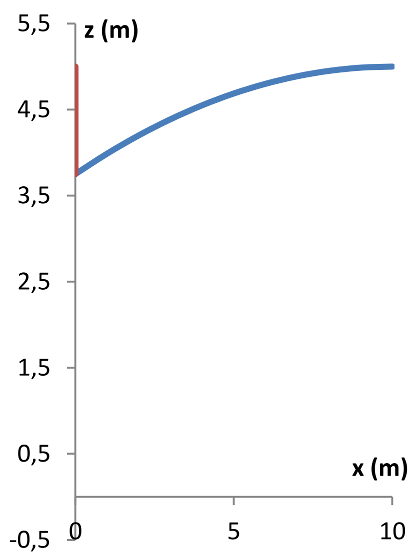
Béni feje szabadesést végez a z tengely mentén ($v_{B0} = 0$):

$x_B = 0$ és $z_B = z_0 - ½\, g\, t^2 = 5 - 5\, t^2$,

Frédi hógolyója vízszintes hajítás végez:

$x_{h2} = x_0 - v_0'\, t = 10 - 20\, t$ és $z_{h2} = z_0 - ½\, g\, t^2 = 5 - 5\, t^2$.

Látható, hogy itt most $z_B(t) = z_{h2}(t)$, ami azt jelenti, hogy Béni feje és a hógolyó mindig egy magasságban van. A kérdés az, hogy földet érés előtt (tehát amíg $z(t)>0$) átér-e a hógolyó az $x_0 = 10$ m koordinátától az $x = 0$ koordinátához, azaz Béni fejéhez.



A függőleges komponensből kiszámolható az esés ideje:

$5 - 5\, t_2^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_2 = 1$ s alatt esnek le.

Hát Frédi hógolyója mennyi idő alatt ér $x = 0$-hoz?

$x_{h2} = 10 - 20 t_3 = 0 \quad \rightarrow \quad t_3 = 0{,}5$ s alatt.

Mivel $t_3 < t_2$, ezért Frédi hógolyója még a levegőben eléri Béni fejét, és

$z_B(t_3) = z_{h2}(t_3) = 5 - 5\, t_3^2 = 3{,}75$ m magasságban eltalálja.

e) Frédi hógolyójának x koordinátája zérus kell legyen:

$x_{h2} = x_0 - v_0^* \, t = 0$,

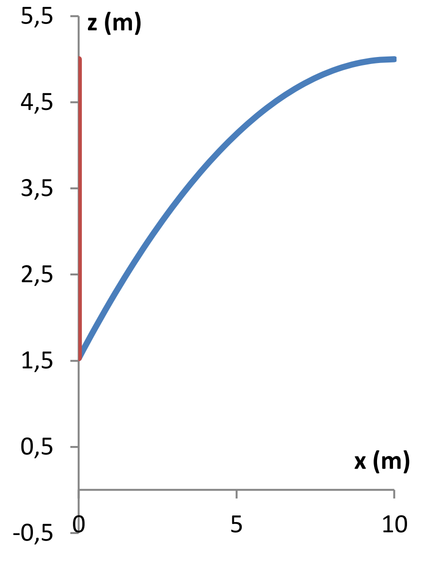
ebből fejezzük ki most a kezdősebességet:

$v_0^* = x_0/t$.

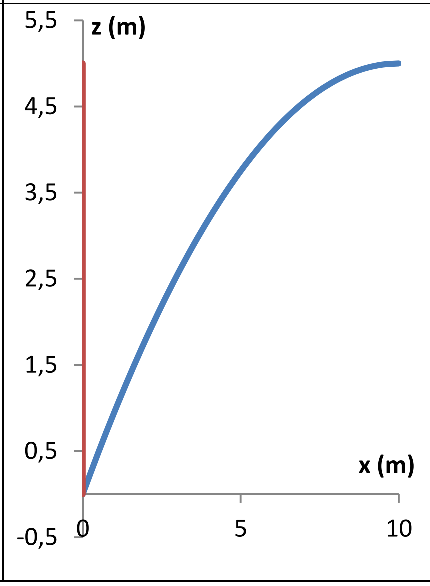
Mivel addig vannak a levegőben, amíg $t \le t_2 = 1$ s (ld. a **d)** részt), ezért

$v_0^* \ge 10$ m/s.

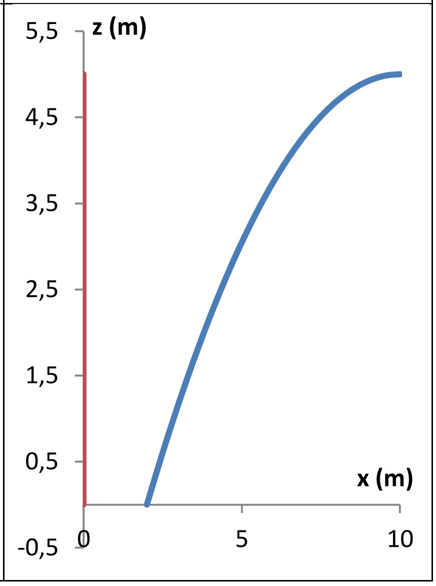
v_0^* = 12 m/s



v_0^* = 10 m/s



v_0^* = 8 m/s



3/4. 360 km/h vízszintes sebességű, magasan repülő repülőgépről kiejtenek egy tárgyat. Milyen kezdősebességgel kell 10 s-mal később egy másik tárgyat utána dobni, hogy az első tárgy kiesése után 14 s-mal találja el a kiejtett tárgyat?

Megoldás

A repülő sebessége v_r = 360 km/h = 100 m/s.

Zuhanás közben a közegellenállást elhanyagoljuk, vízszintes irányú erő nem hat a testekre.

A kiejtett test a gép elhagyása után megtartja azt a vízszintes sebességet, amivel a repülőgéppel együtt utazott, mert a gépből csak kiesik, tehát a géphez képest nincs kezdősebessége. A kiejtett test tehát mindig a repülőgép alatt van. Ez azt jelenti, hogy a második testet **függőleges** kezdősebességgel kell kihajítani a gépről, mivel az is megtartja a vízszintes sebességét, és így mindkét test mindig a repülő alatt lesz, miközben függőlegesen közelednek egymáshoz.

A kezdősebesség nagyságát abból tudjuk kiszámolni, hogy találkozáskor a függőleges helykoordináták egyenlők:

Az első tárgy H magasságból indulva 14 s után

$z_1 = H - \frac{1}{2} g\, t^2 = H - 5 \cdot 14^2 = H - 980$ m magasságban van.

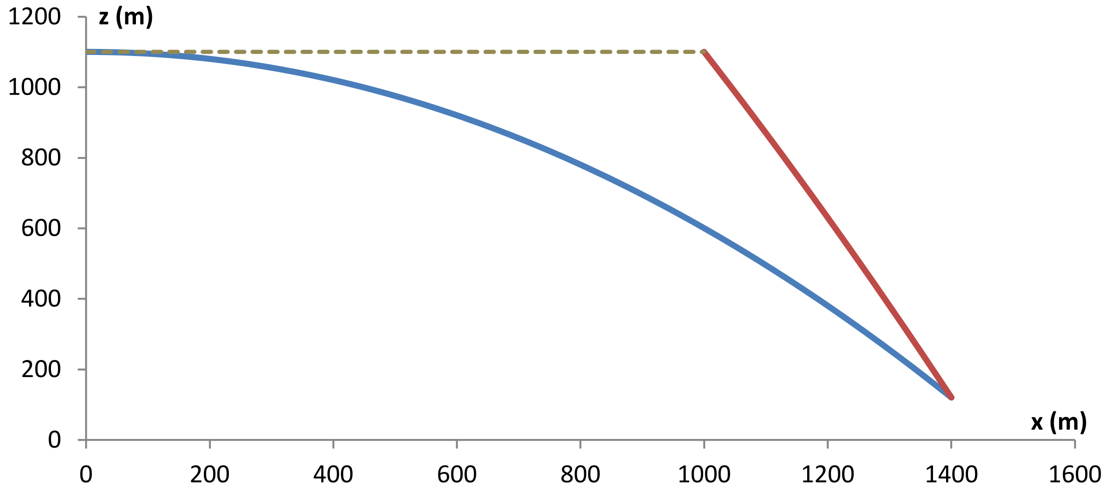
A második tárgy csak 14–10 = 4 s-ig zuhan, szintén H magasságból indulva, de v_0 kezdősebességgel:

$z_2 = H + v_0\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 = H + v_0 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = H + 4v_0 - 80$ m magasságban van.

Találkoznak, tehát $z_1 = z_2$:

$H - 980 = H + 4v_0 - 80 \quad \rightarrow \quad v_0 = -225$ m/s,

azaz 225 m/s sebességgel kell „eldobni” a második testet lefelé.



<u>Általános megoldás:</u>

Vegyük fel az origót oda, ahol az első tárgy kiesik (így $\mathbf{r_0}=\mathbf{0}$), az x tengelyt abba az irányba, amerre a gép repül, a z tengely mutasson felfelé (vagyis a tárgyak z koordinátája esés közben negatív lesz). Az első test idejét jelölje t.

Az első test helyvektora

$\mathbf{r_1}(t) = v_r\, t\, \mathbf{i} - ½\, g\, t^2\, \mathbf{k}$,

komponensenként

$x_1(t) = v_r\, t$ és $z_1(t) = -½\, g\, t^2$.

A második testet Δt-vel később dobják ki, ezért a függőleges komponense csak Δt idővel később kezd változni, az abban szereplő idő t–Δt:

$\mathbf{r_2}(t) = v_r\, t\, \mathbf{i} + [v_0\,(t-\Delta t) - ½\, g\,(t-\Delta t)^2]\, \mathbf{k}$,

komponensenként

$x_2(t) = v_r\, t$ és $z_2(t) = v_0\,(t-\Delta t) - ½\, g\,(t-\Delta t)^2$.

$x_1(t) = x_2(t)$ automatikusan teljesül.

$z_1(t) = z_2(t)$: $-½\, g\, t^2 = v_0\,(t-\Delta t) - ½\, g\,(t-\Delta t)^2$.

A jobb oldalt kifejtve:

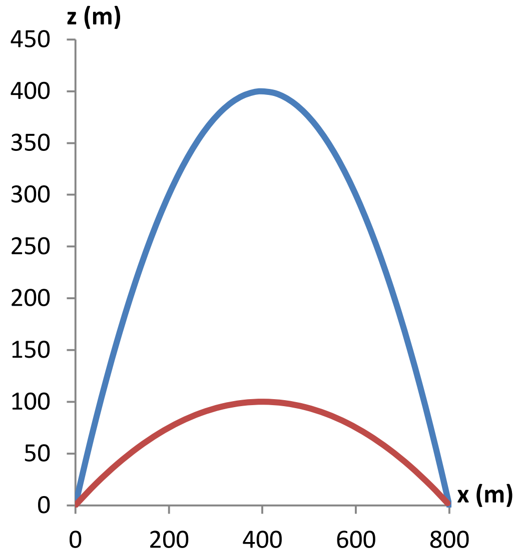
$v_0\,(t-\Delta t) - ½\, g\,(t-\Delta t)^2 = v_0\, t - v_0\,\Delta t - ½\, g\, t^2 + g\, t\,\Delta t - ½\, g\,\Delta t^2$,

majd egyszerűsítve és rendezve:

$v_0 = g\,\Delta t\,(t-½\,\Delta t) / (t-\Delta t)$.

3/5. Két ferde hajítás kezdősebességének nagysága és a hajítás távolsága azonos. Az egyik hajítás maximális magassága a másik négyszerese. Számítsuk ki a hajítási idők arányát!

Megoldás



Az előadáson és a bevezetőben levezetett képletek szerint

a hajítás maximális magassága $h = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$,

a hajítás távolsága $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$,

a hajítás ideje $t_d = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

A kezdősebességek itt megegyeznek: $v_{01} = v_{02}$,
a hajítás szöge α_1 ill. α_2.

A két hajítás távolsága megegyezik:

$d_1 = d_2: \quad \frac{v_{01}^2 \sin(2\alpha_1)}{g} = \frac{v_{02}^2 \sin(2\alpha_2)}{g}$

$\rightarrow \quad \sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2) \quad [1]$

A maximális magasságok aránya 1:4 :

$h_1 = 4\,h_2: \quad \frac{(v_{01} \sin\alpha_1)^2}{2g} = 4\frac{(v_{02} \sin\alpha_2)^2}{2g}$

$\rightarrow \quad \sin^2\alpha_1 = 4\sin^2\alpha_2 \quad \rightarrow \quad \sin\alpha_1 = 2\sin\alpha_2 \quad [2]$

A kérdés: $\frac{t_{d1}}{t_{d2}} = \frac{2\frac{v_{01}\sin\alpha_1}{g}}{2\frac{v_{02}\sin\alpha_2}{g}} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$ (felhasználva, hogy $v_{01} = v_{02}$).

Mivel a [2] egyenlet szerint $\sin\alpha_1 = 2\sin\alpha_2$, ezért

$\frac{t_{d1}}{t_{d2}} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = 2$ a hajítási idők aránya,

azaz a négyszer olyan magasra dobott test kétszer annyi idő alatt ér földet.

Bár nem volt kérdés, de az [1] egyenletből kiindulva meghatározható a két hajítás szöge is:

$\sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2) \quad \rightarrow \quad 2\alpha_1 = 180° - 2\alpha_2 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 90° - \alpha_1$

$\rightarrow \quad \sin\alpha_2 = \sin(90° - \alpha_1) = \cos\alpha_1$.

Felhasználva, hogy

$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = 2: \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \mathrm{tg}\alpha_1 = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 63{,}43°$ és $\alpha_2 = 26{,}57°$.

[Vagy: $\sin 2\alpha_1 = 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 = 2\sin\alpha_2\cos\alpha_2 \quad \rightarrow \quad 2\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \quad \rightarrow$ ...]

Gyakorló feladatok a zárthelyire:

3/6. h = 40 m magas torony tetejéről 45°-os szög alatt (fölfelé) elhajítanak egy testet v_0 = 40 m/s kezdősebességgel. Mekkora a távolság a kiindulási és földre érkezési pont között?

Megoldás
A test helyvektorának
függőleges komponense $z(t) = = 40 - (40 \cdot \sin 45°) \cdot t - 5 \cdot t^2$,
földet éréskor $z(t_f) = 0$: $h + (v_0 \sin\alpha) \cdot t_f - ½ g t_f^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_f = 6{,}83$ s ;
vízszintes komponense: $x(t) = (v_0 \cos\alpha) \cdot t = (40 \cdot \cos 45°) \cdot t$,
földet éréskor $x(t_f) = (40 \cdot \cos 45°) \cdot t_f = 193{,}1$ m .

A távolság a kiindulási és földet érési pont között
$$D = \sqrt{(x(t_f) - x(0))^2 + (z(t_f) - z(0))^2} = \sqrt{(193{,}1 - 0)^2 + (0 - 40)^2} = 197{,}2 \text{ m}$$
(Nem a „hajítás távolsága” képlet alkalmazandó, mivel a kiindulási és a földet érési pont nem azonos magasságon van!)

3/7. Milyen szög alatt kell vízszintes terepen elhajítani egy testet, hogy a hajítási magasság megegyezzen a hajítási távolsággal?

Megoldás
h = d: $v_0^2 \sin^2\alpha/(2g) = v_0^2 \sin(2\alpha)/g \quad \rightarrow \quad 2\sin(2\alpha) = \sin^2\alpha \rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha = 4 \quad \rightarrow \quad \alpha = 75{,}96°$.

3/8. 7920 m magasságban állandó, 960 km/h vízszintes sebességgel haladó repülőgépről leesett az egyik ajtó. Szupermen is azon a repülőgépen utazott, de éppen aludt. 10 s-ig tartott, amíg felébresztették és elmondták neki, mi történt. Ekkor azonnal (0 s alatt) odaszaladt az ajtó helyén tátongó lyukhoz és …

a) … függőlegesen lefelé v_0 kezdősebességgel elrugaszkodva utána ugrott az ajtónak.
Mekkora kezdősebességgel ugrott ki Szupermen, ha 3 s alatt érte utol az ajtót?

b) … zérus kezdősebességgel, de különleges képességeit felhasználva állandó nagyságú, függőleges gyorsulással indult az ajtó után (ez a gyorsulás hozzáadódik a nehézségi erőből eredő gyorsulásához). Legalább mekkorának kellett lenni ennek a gyorsulásnak, hogy még a levegőben elérje az ajtót?

A g értékét vegyük 9,9 m/s^2-nek, a légellenállást hanyagoljuk el.

Megoldás
Ha a légellenállást elhanyagolhatjuk, akkor a leesett ajtóra nem hat vízszintes irányú erő, megtartja a repülőgép sebességével megegyező vízszintes sebességkomponensét, mindig a repülőgép alatt lesz. A feladat megoldásához elég a z koordinátát felírni.

a) 10+3 s alatt az ajtó $s = ½ \cdot 9{,}9 \cdot 13^2 = 836{,}6$ m -t zuhant.
Szupermen $t_{sm} = 3$ s alatt v_0 kezdősebességről indulva tesz meg ekkora utat:
$s = v_0 t_{sm} + ½ g \cdot t_{sm}^2 \rightarrow v_0 = (836{,}55 - ½ \cdot 9{,}9 \cdot 3^2) / 3 = 264$ m/s.

Ezeket az egyenleteket az egyszerűség kedvéért lefelé irányított tengellyel írtuk fel. A szokásos felfelé irányított z tengellyel felírva így néznek ki:

$z_{ajtó}(t_{ajtó}) = H - ½g·t_{ajtó}^2$; $t_{ajtó} = 10+3 = 13$ s, $z_{ajtó}(13) = H - 0{,}5·9{,}9·13^2 = H - 836{,}6$ m.

$z_{sm}(t_{sm}) = H - v_0\, t_{sm} - ½g·t_{sm}^2$; $t_{sm} = 3$ s ; $z_{sm}(3) = H - v_0·3 - 0{,}5·9{,}9·3^2 = H - 3v_0 - 44{,}55$ [m].

$z_{ajtó}(t_{ajtó}) = z_{sm}(t_{sm})$: $H - 836{,}6 = H - 3v_0\, t_{sm} - 44{,}55 \quad\rightarrow\quad v_0 = 264$ m/s.

b) Az ajtó H = 7920 m magasságból $t_{ajtó} = \sqrt{2H/g} = 40$ s alatt ér földet. Ennél 10 s -mal kevesebb idő alatt kell Szupermennek földet érnie, ha még a levegőben el akarja kapni az ajtót.

$s = ½\,(g+a)t^2 \quad\rightarrow\quad a = 2s/t^2 - g = 2·7920/(40-10)^2 - 9{,}9 = 7{,}7$ m/s^2.

A szokásos egyenleteket felírva:

$z_{ajtó}(t_{ajtó}) = 0$: $H - ½g·t_{ajtó}^2 = 0 \quad\rightarrow\quad t_{ajtó} = \sqrt{2H/g} = \sqrt{2·7920/9{,}9} = 40$ s

$z_{sm}(t_{sm}) = H - ½(g+a_{sm})·t_{sm}^2$, $t_{sm} \le 40-10 = 30$ s

$z_{sm}(30) \ge 0$: $7920 - 0{,}5·(9{,}9+a_{sm})·30^2 \ge 0 \quad\rightarrow\quad a_{sm} \ge 7{,}7$ m/s^2.

3/9. 50 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítanak egy tárgyat. Ugyanakkor 50 m magasról szabadeséssel leesik egy másik tárgy. Mikor és milyen magasan találkoznak?

Megoldás

1,0 s múlva, 45 m magasságban

3/10. Mekkora kezdősebességgel kell az origóból a vízszinteshez képest 60°-os szög alatt eldobni egy labdát, hogy az a P (4,3) pontba érkezzen?

Megoldás

$x = (v_0 \cos 60°)\, t = 4$; $z = (v_0 \sin 60°)\, t - ½\, gt^2 = 3 \quad\rightarrow\quad t = 0{,}8864$ s, $v_0 = 9{,}026$ m/s

… és még ld. a kirakott zh-kat!

Egyéb: nem hajítás, de hasonló: konstans erő hatására mozgó test (zh-ban előfordulhat)

3/11. Egy m = 1 g tömegű test a t_1 = 2 s időben az x tengely pozitív felén van az origótól x_1 = 10 cm-re, sebessége a +y tengely irányába mutat és nagysága v_1 = 10 cm/s. A test a t_2 = 5 s időpontban a P_2 (–0,5 cm, 15 cm, 0) pontban van, a sebessége a –x tengely irányába mutat és nagysága v_2 = 7 cm/s. A testre állandó erő hat.
a) Mekkora az erő nagysága?
b) Mekkora a test sebessége a t_3 = 8 s időpontban, és hol lesz a test akkor?

Megoldás

Állandó erő esetén a gyorsulás állandó: $\mathbf{F}/m = \mathbf{a} =$ konst. , azaz $\dot{\mathbf{v}}$ = konst., $\ddot{\mathbf{r}}$ = konst.

→ integrálással a sebességvektor: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}\cdot t + \mathbf{v}(0)$,

és a helyvektor: $\mathbf{r}(t) = ½\, \mathbf{a}\cdot t^2 + \mathbf{v}(0)\cdot t + \mathbf{r}(0)$.

A feladatban adott volt a helyvektor és a sebességvektor 2-2 időben:

t_1 = 2 s: $\mathbf{r}(2) = 0{,}1\,\mathbf{i}$ [m], $\mathbf{v}(2) = 0{,}1\,\mathbf{j}$ [m/s],

t_2 = 5 s: $\mathbf{r}(5) = -0{,}005\,\mathbf{i} + 0{,}15\,\mathbf{j}$ [m], $\mathbf{v}(5) = -0{,}07\,\mathbf{i}$ [m/s].

A fenti általános képletekbe behelyettesítve tehát

$½\,\mathbf{a}\cdot 2^2 + \mathbf{v}(0)\cdot 2 + \mathbf{r}(0) = 0{,}1\,\mathbf{i}$, $\mathbf{a}\cdot 2 + \mathbf{v}(0) = 0{,}1\,\mathbf{j}$

$½\,\mathbf{a}\cdot 5^2 + \mathbf{v}(0)\cdot 5 + \mathbf{r}(0) = -0{,}005\,\mathbf{i} + 0{,}15\,\mathbf{j}$, $\mathbf{a}\cdot 5 + \mathbf{v}(0) = -0{,}07\,\mathbf{i}$

3 ismeretlen vektorunk van: **a**, **v**(0) és **r**(0) és 4 egyenletünk, a feladat túlhatározott; **v**(2) és **v**(5) értékéből megkapjuk **a** és **v**(0) értékét, és bármelyik **r** -ből **r**(0)-at.

a) A gyorsulást megkapjuk a sebességekből:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(5) - \mathbf{v}(2)}{5-2} = -\frac{0{,}07}{3}\mathbf{i} - \frac{0{,}1}{3}\mathbf{j} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

Ennek nagysága $a = \frac{1}{3}\sqrt{0{,}07^2 + 0{,}1^2} = \frac{\sqrt{0{,}0149}}{3} \approx 0{,}04\ \mathrm{m/s^2}$,

a testre ható erő nagysága pedig $F = ma \approx 10^{-3}$ kg · 0,04 m/s² = $4\cdot 10^{-5}$ N.

b) A test kezdősebessége $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(t_1) - \mathbf{a}t_1 = \mathbf{v}(t_2) - \mathbf{a}t_2 = \frac{0{,}14}{3}\mathbf{i} + \frac{0{,}5}{3}\mathbf{j}$,

tehát a test sebessége $\mathbf{v}(t) = \left(-\frac{0{,}07}{3}t + \frac{0{,}14}{3}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{0{,}1}{3}t + \frac{0{,}5}{3}\right)\mathbf{j}$.

t_3 = 8 s-ban $\mathbf{v}(8) = \mathbf{a}\cdot 8 + \mathbf{v}(0) = -0{,}14\,\mathbf{i} - 0{,}1\,\mathbf{j}$, ennek nagysága $v(8) = \sqrt{0{,}14^2 + 0{,}1^2} \approx 0{,}17\ \mathrm{m/s}$.

A test helyvektora t = 0 s-ban

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t_1) - 1/2\,\mathbf{a}t_1^2 - \mathbf{v}(0)\cdot t_1 = \mathbf{r}(t_2) - 1/2\,\mathbf{a}t_2^2 - \mathbf{v}(0)\cdot t_2 = \frac{0{,}16}{3}\mathbf{i} - \frac{0{,}80}{3}\mathbf{j},$$

tehát a test helyvektora

$$\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}07}{3}t^2 + \frac{0{,}14}{3}t + \frac{0{,}16}{3}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}1}{3}t^2 + \frac{0{,}5}{3}t - \frac{0{,}80}{3}\right)\mathbf{j}.$$

t_3 = 8 s-ban $\mathbf{r}(8) = ½\,\mathbf{a}\cdot 8^2 + \mathbf{v}(0)\cdot 8 + \mathbf{r}(0) = \ldots = -0{,}32\,\mathbf{i}$ [m]

<u>Megjegyzés</u>: a fenti képletekbe a t = 0 s-hoz tartozó **v**(0) és **r**(0) értékeket írtuk be, de a **v**(t) és **r**(t) függvényeket felírhatjuk tetszőleges t_0 időhöz tartozó $\mathbf{v}(t_0)$ és $\mathbf{r}(t_0)$ értékekkel:

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}\cdot(t-t_0) + \mathbf{v}(t_0)$, $\mathbf{r}(t) = ½\,\mathbf{a}\cdot(t-t_0)^2 + \mathbf{v}(t_0)\cdot(t-t_0) + \mathbf{r}(t_0)$.

Így kiszámolhatjuk **v**(8)-at és **r**(8)-at úgy is, hogy nem kell számolni **v**(0)-t és **r**(0)-t. Ráadásul esetünkben t_3 és t_2 között ugyanannyi idő telik el, mint t_2 és t_1 között, $\Delta t = 3$ s, és mivel a gyorsulás állandó, ezért ugyanannyit változik a sebesség is ($\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\cdot\Delta t$), azaz

$\mathbf{v}(8) = \mathbf{v}(5) + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(5) + [\,\mathbf{v}(5) - \mathbf{v}(2)\,]$,

vagy az is igaz, hogy $\mathbf{v}(8) = \mathbf{v}(2) + 2\cdot\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(2) + 2\cdot[\,\mathbf{v}(5) - \mathbf{v}(2)\,]$.

A helyvektor számolásánál pedig

$\mathbf{r}(8) = ½\,\mathbf{a}\cdot(8-5)^2 + \mathbf{v}(5)\cdot(8-5) + \mathbf{r}(5)$ vagy $\mathbf{r}(8) = ½\,\mathbf{a}\cdot(8-2)^2 + \mathbf{v}(2)\cdot(8-2) + \mathbf{r}(2)$.

Nehezebb hajításos feladatok, zh-ban nem várhatók ilyenek:

3/12. Egy $\alpha = 30°$ hajlásszögű, $h = 1{,}6$ m magas lejtő tetejéről elengedünk egy ládát. Ugyanebben az időpontban a lejtő tetejéről egy labdát úgy dobunk el, hogy az a lejtő legalján éppen a ládába essen. Mekkora és milyen irányú kezdősebességgel kell a labdát eldobni? A láda és a lejtő közötti súrlódási együttható $\mu = \sqrt{3}/8$.

MO.

A láda súrlódással csúszik lefelé a lejtőn, a mozgásegyenlete

lejtőre merőlegesen: $ma_\perp = 0 = F_{ny} - mg\cos\alpha$

lejtővel párhuzamosan: $ma_\parallel = mg\sin\alpha - \mu F_{ny}$

tehát a gyorsulása a lejtő síkjában

$a = a_\parallel = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,g = (\sin 30° - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 30°)\cdot 10 = (0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot 10 = 3{,}125\ \mathrm{m/s^2}$.

Zérus kezdősebességről indulva $s = h / \sin\alpha = 1{,}6 / \sin 30° = 3{,}2$ m-t tesz meg a láda a fenti gyorsulással:

$s = \frac{a}{2}t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3{,}2}{3{,}125}} \approx 1{,}43\ s$ alatt ér le a láda.

Ennyi idő alatt kell a labdának ugyanabba a pontba érkeznie, azaz ha az origóból indul,

vízszintesen $h / \mathrm{tg}\alpha = 1{,}6 / \mathrm{tg}30° \approx 2{,}77$ m-t tesz meg és az $x \approx 2{,}77$ [m] pontba,

függőlegesen $h = 1{,}6$ m-t tesz meg és a $z = -1{,}6$ [m] pontba érkezik.

azaz $x = (v_0\cos\alpha)\,t = (v_0\cos\alpha)\cdot 1{,}43 = 2{,}77$

$z = (v_0\sin\alpha)\,t - g/2\,t^2 = (v_0\sin\alpha)\cdot 1{,}43 - g/2\cdot 1{,}43^2 = -1{,}6$

$\rightarrow v_0 \approx 6{,}34$ m/s, $\alpha \approx 72{,}2°$.

3/13. Állandó hajlásszögű egyenes lejtőn csúszunk lefelé a szánkónkkal $v_{sz} = 3$ m/s állandó sebességgel. A súrlódási együttható $\mu = 0{,}14$. A szánkó elején van egy csúzli, ami vízszintesen, $v_0 = 16$ m/s kezdősebességgel tud kilőni egy golyót. A lejtő végénél van egy céltábla. Milyen magasságban kell a mozgó szánkóból a csúzlit kilőni, hogy eltaláljuk a céltáblát?

MO.

A lejtő hajlásszögét abból tudjuk kiszámolni, hogy a szánkó – amit gyorsít a nehézségi erőnek a lejtővel párhuzamos komponense és fékez a súrlódási erő – állandó sebességgel csúszik, vagyis a (lejtővel párhuzamos) gyorsulása zérus: $ma_\parallel = mg\sin\alpha - \mu F_{ny} = 0$.

A lejtőre merőleges mozgásegyenletből: $ma_\perp = F_{ny} - mg\cos\alpha$ tudjuk, hogy $F_{ny} = mg\cos\alpha$,

és így a lejtővel párhuzamos mozgásegyenlet $ma_\parallel = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0$

$\rightarrow \mu = 0{,}14 = \mathrm{tg}\alpha \rightarrow \alpha = \mathrm{arc\,tg}\,0{,}14 \approx 8°$.

A szánkó sebességének vízszintes komponense $v_{sz,x} = v_{sz}\cdot\cos\alpha \approx 2{,}971$ m/s ,

függőleges komponense $v_{sz,z} = v_{sz} \cdot \sin\alpha \approx 0{,}416$ m/s.
A kilőtt golyó sebességének vízszintes komponense $v_{g0,x} = v_{sz,x} + v_0 \approx 2{,}971+16 = 18{,}971$ m/s , kezdősebességének függőleges komponense $v_{g0,z} = v_{sz,z} \approx 0{,}416$ m/s.
A koordinátarendszert az ábra szerint választva a golyó az x = 0, z = h pontból indul és az x = h/tgα , z = 0 pontba kell megérkezzen, tehát

x: $(v_{sz,x} + v_0) \cdot t = h / \mathrm{tg}\alpha$

z: $h - v_{sz,z} \cdot t - ½\, g\, t^2 = 0.$

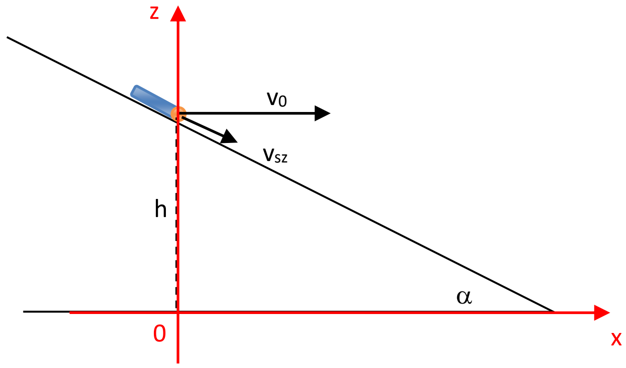
Az elsőből h-t kifejezve és átírva a másodikba

$(v_{sz,x} + v_0) \cdot t \cdot \mathrm{tg}\alpha - v_{sz,z} \cdot t - ½\, g\, t^2 = 0$,

amiből $t = 2\, v_0\, \mathrm{tg}\alpha / g \approx 0{,}448$ s és

visszahelyettesítve

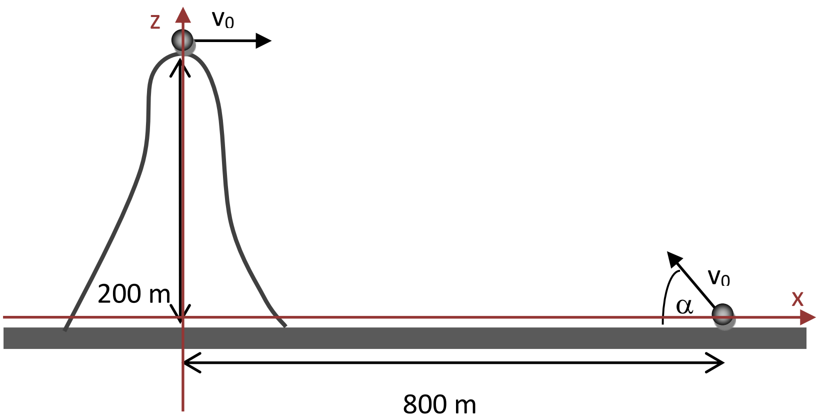
h $= 2\, v_0\, \mathrm{tg}\alpha\, (v_{sz} \sin\alpha + v_0\, \mathrm{tg}\alpha) / g$ **≈ 1,19 m** .



3/14. A 200 m magas hegy talppontjától (a hegycsúcs alatti ponttól) 500 m-re lévő puska irányzékát milyen (legkisebb) szögre kell állítani, hogy átlőjön a hegycsúcs fölött? Mennyi idő telik el, amíg a puskagolyó a hegy csúcsa fölé érkezik? A puskagolyó kezdősebessége 1000 m/s.

MO.
vízszintesen $x = v_0\, t \cos\alpha$: $500 = 1000\, t \cos\alpha \Rightarrow t\cos\alpha = 0{,}5$
függőlegesen $z = v_0\, t \sin\alpha - ½\, g\, t^2$: $200 = 1000\, t \sin\alpha - 5\, t^2 \Rightarrow t\sin\alpha = t^2/200 + 0{,}2$
Felhasználva, hogy $(t\cos\alpha)^2 + (t\sin\alpha)^2 = t^2$, egy t^2-ben másodfokú egyenletet kapunk:
$0{,}25 + t^4 / 40000 + 0{,}002\, t^2 + 0{,}04 = t^2$, amiből $t_1 = 0{,}539$ s és $t_2 = 199{,}8$ s.
A megfelelő szögek: $\alpha_1 = 21{,}93°$ (ez a minimális) és $\alpha_2 = 89{,}86°$ (ezt már veszélyes kipróbálni!)

3/15. A hegyről lövik a síkságon lévő lőállásokat. A hegyen és a síkságon lévő ágyúk egyformák, az ágyúgolyók kezdősebessége $v_0 = 500$ m/s. A hegyen lévő ágyú csöve vízszintesen áll. A síkságon lévő ágyúból a golyót pont 1 s-mal azután lövik ki, hogy meglátták a hegyi ágyú torkolattüzét. Sikerül is az ágyúgolyót még a levegőben eltalálni és eltéríteni a céltól. Hol találja el egymást a két ágyúgolyó? Mekkora a síkságon lévő ágyú csövének a vízszintessel bezárt szöge?



MO. A hegycsúcsról kilőtt ágyúgolyó helyvektora, ha az origó a hegy talppontjában van, az x tengely a síkságon lévő ágyú felé mutat, és az ágyúgolyót t = 0-ban lőtték ki:

$$\mathbf{r}_1(t) = 500t\,\mathbf{i} + (200-10/2t^2)\,\mathbf{k}\,,$$

a síkságon kilőtt ágyúgolyó helyvektora pedig

$$\mathbf{r}_2(t) = [800-500\cdot\cos\alpha(t-1)]\,\mathbf{i} + [500\cdot\sin\alpha(t-1)-10/2(t-1)^2]\,\mathbf{k}$$

A két ágyúgolyó helyvektora egyenlő kell legyen; komponensenként felírva:

x koordináta: $500t = 800-500\cdot\cos\alpha(t-1)$

z koordináta: $200-10/2t^2 = 500\cdot\sin\alpha(t-1)-10/2(t-1)^2$

Az első egyenletből $\cos\alpha(t-1) = (800-500t)/500 = 1{,}6-t$,

a másodikból $\sin\alpha(t-1) = (205-10t)/500 = 0{,}41-0{,}02t$.

Ezeket négyzetre emelve és összeadva egy t-ben másodfokú egyenletet kapunk, aminek a megoldása $t_1 \approx 1{,}42$ s és $t_2 \approx 3040$ s.

A t_1 -ből számolt szög $\alpha_1 \approx 64{,}9°$, és az ágyúgolyók találkozásának helye

$x_1(t_1) = 500\cdot 1{,}42 = x_2(t_1) = 800-500\cdot\cos 64{,}9°\cdot 0{,}42 \approx 711$ m

$z_1(t_1) = 200-5\cdot 1{,}42^2 = z_2(t_1) = 500\cdot\sin 64{,}9°\cdot 0{,}42-5\cdot 0{,}42^2 \approx 190$ m

$\mathbf{r}(t_1) = 711\,\mathbf{i} + 190\,\mathbf{k}$ [m].

A t_2 -ből számolt szög $\alpha_2 \approx 178{,}9°$,

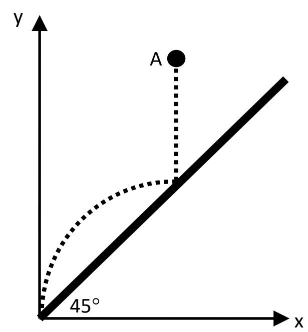
és az ágyúgolyók találkozásának helye

$x_1(t_2) = 500\cdot 3040 = x_2(t_2) = 800-500\cdot\cos 178{,}9°\cdot 3039 \approx 1{,}52\cdot 10^6$ m

$z_1(t_2) = 200-5\cdot 3040^2 = z_2(t_2) = 500\cdot\sin 178{,}9°\cdot 3039-5\cdot 3039^2 \approx -4{,}62\cdot 10^7$ m

ami nem lehetséges, mert a föld felszínét (a $z = 0$-t) előbb elérik az ágyúgolyók.

(Ha a Föld sokkal nagyobb lenne – vagy a Föld lapos lenne -, és a homogén erőtér közelítés érvényes lehetne ekkora távolságon is, és az ágyúgolyók földet érési pontja előtt elkezdődne egy $4{,}62\cdot 10^7$ m mély kráter, akkor lenne csak értelme ennek a megoldásnak.)



3/16. Melyek azok a pontok, amelyekből elejtve az A golyót, az a 45°-os lejtőről rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan?

MO.

A golyó a lejtő fölött h magasságból indul, így a lejtőre érkezéskor v* (függőleges irányú) sebessége lesz:

$z = -h = -\frac{1}{2}gt_1^2 \quad\Rightarrow\quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad\Rightarrow\quad v^* = gt_1 = \sqrt{2gh}$.

A lejtőről való elpattanáskor ez lesz a vízszintes irányú kezdősebessége, mivel a lejtő 45°-os.

Egyenesen a lejtő aljába pattan, így vízszintesen $x = v^*\,t_2$, függőlegesen $z = \frac{1}{2}\,g\,t_2^2$ utat tesz meg, és mivel a lejtő 45°-os, $x = z$, azaz $v^*\,t_2 = \frac{1}{2}\,g\,t_2^2$.

Ebből $t_2 = 2v^*/g$ és $x = z = 2\,v^{*2}\,/\,g$, v*-t beírva $x = z = 4h$,

azaz azok a pontok, ahonnan elejtve a golyót, az a lejtőn rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan, a $z = 5/4\,x$ egyenes pontjai.

EGY IGAZÁN HALADÓ HAJÍTÁSOS FELADAT: (nem zh-ra való)

3/17. A vízszinteshez képest mekkora szög alatt kell adott h magasságból adott v_0 kezdősebességgel elhajítani egy tárgyat, hogy az a lehető legmesszebb érjen földet?

MO.

h magasságból indulva t_d időben 0 legyen a z test koordinátája:

$z(t_d) = 0 = h + (v_0 \sin\alpha)\, t_d - ½\, g\, t_d^2$ → $h = ½\, g\, t_d^2 - (v_0 \sin\alpha)\, t_d$

és eközben vízszintesen megtesz d távolságot:

$x(t_d) = d = (v_0 \cos\alpha)\, t_d$. Ennek keressük a maximumát, ha α változhat (v_0 adott).

Rendezzük az egyenleteket úgy, hogy t_d-t kifejezve az egyikből és áthelyettesítve a másikba felírjuk d-t α függvényében, majd megkeressük a $d(\alpha)$ függvény szélsőértékét (deriváljuk α szerint és megoldjuk a $dd/d\alpha = 0$ egyenletet).

Tehát d-ből $t_d = d/(v_0\cos\alpha)$ →

$h = ½\, g/(v_0\cos\alpha)^2 \cdot d^2 - (v_0 \sin\alpha)/(v_0\cos\alpha) \cdot d$, azaz $d^2 - (v_0^2/g)\cdot\sin2\alpha \cdot d - 2h(v_0^2/g)\cos^2\alpha = 0$

→ $$d(\alpha) = \left(\frac{v_0^2}{2g}\right) sin2\alpha + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 sin^2 2\alpha + 2h\left(\frac{v_0^2}{g}\right) cos^2\alpha}$$ és

$$\frac{dd}{d\alpha} = \left(\frac{v_0^2}{g}\right) cos2\alpha + \frac{\left(\frac{v_0^2}{g}\right) sin2\alpha\, cos2\alpha - 2h\left(\frac{v_0^2}{g}\right) sin2\alpha}{2\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 sin^2 2\alpha + 2h\left(\frac{v_0^2}{g}\right) cos^2\alpha}} = 0$$

Hosszas rendezgetés után ebből megkapjuk, hogy $ctg^2\alpha = 1 + \frac{2gh}{v_0^2}$.