2/1. Egy tömegpont helyvektora az időtől a következőképpen függ:

$\mathbf{r}(t) = (At+B)\,\mathbf{i} + (At-B)\,\mathbf{j} + (-Ct^2+4At+5B)\,\mathbf{k}$,

ahol $A = 3$ m/s, $B = 10$ m, $C = 5$ m/s^2.

a) Milyen távol van a tömegpont az origótól a $t_0 = 0$ időpontban?

b) Milyen távol van a kiindulási ponttól a $t_1 = 2$ s -ban? A test $t_0 = 0$ -ban indult.

c) Határozzuk meg a tömegpont sebességét és gyorsulását!

d) Mekkora a sebessége a $t = 0$ időpontban?

e) Mely időpontban éri el a tömegpont az x–y síkot?

Megoldás

a) A helyvektor az origóból mutat a tömegpont tartózkodási helyébe. A test origótól vett távolságát úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk a helyvektor abszolút értékét. Most a $t_0 = 0$ időpontra kell számolnunk, tehát először az időfüggő $\mathbf{r}(t)$ függvénybe behelyettesítjük a megadott időpontot (0 s).

A számolások előtt helyettesítsük be a konstansokat a mértékegységükkel együtt. A t időt s-ban értve:

$\mathbf{r}(t) = (3\,\text{m/s} \cdot t\,\text{s} + 10\,\text{m})\,\mathbf{i} + (3\,\text{m/s} \cdot t\,\text{s} - 10\,\text{m})\,\mathbf{j} + (-5\,\text{m/s}^2 \cdot (t\,\text{s})^2 + 4 \cdot 3\,\text{m/s} \cdot t\,\text{s} + 5 \cdot 10\,\text{m})\,\mathbf{k}$.

A mértékegységekből látjuk, hogy ‚A‘ sebesség, ’B’ hely, ’C’ gyorsulás dimenziójú, és hogy a műveleteket elvégezve minden komponens mértékegysége méter (mivel a függvény helyet ad meg). A továbbiakban nem fogjuk kiírni a mértékegységeket.

$\mathbf{r}(t) = (3t+10)\,\mathbf{i} + (3t-10)\,\mathbf{j} + (-5t^2+12t+50)\,\mathbf{k}$ [m].

$t_0 = 0$ -ban az

$\mathbf{r}(0) = 10\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{j} + 50\,\mathbf{k}$ (m) pontban van a test,

és a távolsága az origótól

$d = |\mathbf{r}(0)| = \sqrt{10^2+(-10)^2+50^2} = 51{,}96$ m.

b) Két időpontbéli tartózkodási hely távolságát az $\mathbf{r}(t)$ függvényből úgy tudjuk kiszámolni, hogy annak a vektornak az abszolút értékét számoljuk ki, amelyik az egyik pontból a másikba mutat. Ezt a $\Delta\mathbf{r}$ vektort elmozdulásvektornak hívjuk, a korábbi helyvektorból mutat a későbbi helyvektorba:

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_{vég}) - \mathbf{r}(t_{kezdő})$.

Tudjuk, hogy a $t_{kezdő} = t_0 = 0$ s időpontban az $\mathbf{r}(0) = 10\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{j} + 50\,\mathbf{k}$ (m) pontban van a test,

és behelyettesítve az $\mathbf{r}(t)$ függvénybe a $t_{vég} = t_1 = 2$ s-ot megkapjuk, hogy az

$\mathbf{r}(2) = (3\cdot2+10)\,\mathbf{i} + (3\cdot2-10)\,\mathbf{j} + (-5\cdot2^2+12\cdot2+50)\,\mathbf{k} = 16\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 54\,\mathbf{k}$ (m) pontban lesz a test.

Az elmozdulásvektor a $t_{kezdő} = t_0 = 0 \rightarrow t_{vég} = t_1 = 2$ s intervallumban az a vektor, ami az $\mathbf{r}(0)$ vektorból mutat az $\mathbf{r}(2)$ vektorba:

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(2) - \mathbf{r}(0) = (16\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 54\,\mathbf{k}) - (10\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{j} + 50\,\mathbf{k}) = 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ (m).

A két pont távolsága ennek az elmozdulásvektornak az abszolút értéke:

$|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{6^2+6^2+4^2} = 9{,}381$ m.

(Figyelem: a két vektor abszolút értékének különbsége nem egyenlő a két vektor különbségének abszolút értékével!)

Megjegyzés: Ez nem a test által megtett út (csak akkor egyenlő vele, ha a test egyenes pályán mozog). Görbevonalú mozgás esetén az utat nehezebb kiszámolni, mert a sebességvektort kell integrálni. Ezzel nem fogunk foglalkozni a számolási gyakorlaton.

c) A sebesség és a gyorsulás is időfüggő vektormennyiségek.

A sebesség a hely változását adja meg, tehát

$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$, a sebességvektor a helyvektor idő szerinti deriváltja;

a gyorsulás a sebesség változását adja meg, tehát

$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$, a gyorsulásvektor a sebességvektor idő szerinti deriváltja;

illetve a helyvektor idő szerinti második deriváltja: $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$.

Descartes-koordinátarendszerben felírt vektorokat komponensenként deriválunk, a deriválandó vektor egyes komponenseinek deriváltjai lesznek a deriváltvektor megfelelő komponensei. (Polárkoordináta-rendszerben a deriválás bonyolultabb, mivel ott az egységvektorok is függenek az időtől.)

A helyvektor Descartes-komponensei

$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$,

illetve a rövidség kedvéért nem mindig írjuk ki, hogy az időtől függnek a mennyiségek:

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$;

a sebességvektor Descartes-komponensei

$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$;

a gyorsulásvektor Descartes-komponensei

$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$.

A sebességvektor komponensei a helyvektor komponenseinek a deriváltjai:

$v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$,

$\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k}$;

a gyorsulásvektor komponensei a sebességvektor komponenseinek a deriváltjai:

$a_x = \dot{v}_x$, $a_y = \dot{v}_y$, $a_z = \dot{v}_z$,

$\mathbf{a} = \dot{v}_x\,\mathbf{i} + \dot{v}_y\,\mathbf{j} + \dot{v}_z\,\mathbf{k}$ **.**

Nézzük a feladatot:

$x = At + B \quad\rightarrow\quad \dot{x} = v_x = A \quad\rightarrow\quad \dot{v}_x = a_x = 0;$

$y = At - B \quad\rightarrow\quad \dot{y} = v_y = A \quad\rightarrow\quad \dot{v}_y = a_y = 0;$

$z = -Ct^2 + 4At + 5B \quad\rightarrow\quad \dot{z} = v_z = -2Ct + 4A \quad\rightarrow\quad \dot{v}_z = a_z = -2C;$

tehát

$\mathbf{v}(t) = A\,\mathbf{i} + A\,\mathbf{j} + (-2C\,t + 4A)\,\mathbf{k}$ [m/s];

$\mathbf{a}(t) = -2C\,\mathbf{k}$ [m/s²];

a konstansokat behelyettesítve:

$\mathbf{v}(t) = 3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + (-10t+12)\,\mathbf{k}$ [m/s];

$\mathbf{a}(t) = -10\,\mathbf{k}$ [m/s²].

d) A kezdősebességet megkapjuk, ha a $\mathbf{v}(t)$ függvénybe behelyettesítünk $t_0 = 0$-t:

$\mathbf{v}(0) = 3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k}$ [m/s];

ennek a nagysága:

$v(0) = \sqrt{3^2+3^2+12^2} = 12{,}73$ m/s.

e) Az x–y sík egyenlete z = 0, tehát a test akkor éri el az x–y síkot, amikor z(t) = 0, azaz

$z(t) = -Ct^2 + 4At + 5B = 0$

$-5\,t^2 + 12\,t + 50 = 0 \quad\rightarrow\quad t_3 = 4{,}582$ s (és $t_4 = -2{,}182$ s -ban is ott lett volna).

Egy plusz kérdés: (ez nem zh-szintű feladat):

f) Bizonyítsuk be, hogy a mozgás síkmozgás! Határozzuk meg a pálya síkját!

Megoldás

A mozgás síkmozgás, ha léteznek olyan p, q, r, s konstansok, hogy

$p\cdot x(t) + q\cdot y(t) + r\cdot z(t) + s = 0$ teljesül minden t-re.

Most $x = At+B$, $y = At-B$, $z = -Ct^2+4At+5B$, tehát

$p\,(At+B) + q\,(At-B) + r\,(-Ct^2+4At+5B) + s = 0$ kell igaz legyen.

Ez akkor teljesül, ha a t-ben négyzetes ill. lineáris tagok szorzói, és a t-től független tag külön-külön mind zérussal egyenlők. Átrendezve:

$(-rC)\,t^2 + (pA+qA+4rA)\,t + (pB-qB+5rB+s) = 0,$

tehát

$-rC = 0$ és $pA+qA+4rA = 0$ és $pB-qB+5rB+s=0$ kell teljesüljön.

Az elsőből

$-rC = 0 \;\rightarrow\; r = 0;$

ezt behelyettesítve a másodikba ill. harmadikba:

$$\left.\begin{aligned} pA + qA &= 0 \\ pB - qB + s &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} q &= -p \\ s &= -2pB \end{aligned}\right.$$

A sík egyenlete

$p\,x - p\,y - 2pB = p\,(x - y - 2B) = 0.$

$p = 1$ választással:

$x - y - 2B = 0.$

2/2. Egy repülőgép mozgását az

$$\mathbf{r}(t) = A\cos\left(\frac{t}{t_0}\right)\mathbf{i} + 2A\sin\left(\frac{t}{t_0}\right)\mathbf{j}\ \ [\mathrm{m}]\quad \text{függvény írja le,}$$

ahol $A = 200$ m, $t_0 = 2$ s, a t idő s-ban értendő.

a) Milyen pályán mozog a repülőgép?

b) Mekkora szöget zár be a sebességvektor a gyorsulásvektorral a $t_1 = 0$ ill. a $t_2 = 2$ s időben?

Megoldás

a) Látható, hogy a repülőgép az x–y síkban mozog, hiszen a helyvektorának z komponense zérus. A számolási gyakorlaton a z koordináta a függőleges koordinátát fogja jelölni. A z = 0 síkot tetszőleges magasságban megválaszthatjuk, jelen esetben a földfelszín fölött van abban a magasságban, ahol a repülőgép repül.

Az **r**(t) függvény minden t értékhez megadja, hogy a test hol van, így az idő függvényében leírja, hogy a test milyen pályán mozog (vagyis a pálya paraméteres – idővel paraméterezett – formája). A pálya alakjának szempontjából nem érdekes információ, hogy a test mikor van a pálya egyes pontjaiban, csak az a fontos, hogy mely pontok tartoznak a pályához. A pályagörbét leíró egyenlet az adott görbe típusától függően lehet explicit alakú: $y(x) = 0$ ill. $x(y) = 0$, vagy implicit alakú: $f(x,y) = 0$. A pálya egyenletének felírásához ki kell küszöbölni az időt az **r**(t) függvény komponenseiből. Az idő kiküszöbölésére nem adható általános módszer, és nem is mindig írható fel a pálya zárt formában.

Ebben a feladatban a helyvektor koordinátái

$$x(t) = A\cos\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad y(t) = 2A\sin\left(\frac{t}{t_0}\right).$$

Mivel az x(t)-ben a cos és az y(t)-ben a sin argumentuma megegyezik, alkalmazhatjuk a

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ azonosságot.

Fejezzük ki az első egyenletből $\cos(t/t_0)$-t, a másodikból $\sin(t/t_0)$-t:

$$\cos\left(\frac{t}{t_0}\right) = \frac{x}{A}, \quad \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) = \frac{y}{2A}.$$

Ezekkel felírhatjuk, hogy

$$\left[\sin\left(\frac{t}{t_0}\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{t}{t_0}\right)\right]^2 = 1,$$

ezért

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{2A}\right)^2 = 1.$$

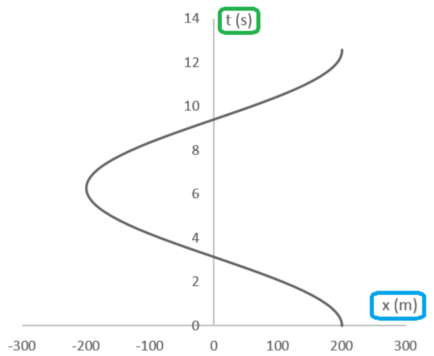
Ez egy ellipszis egyenlete.

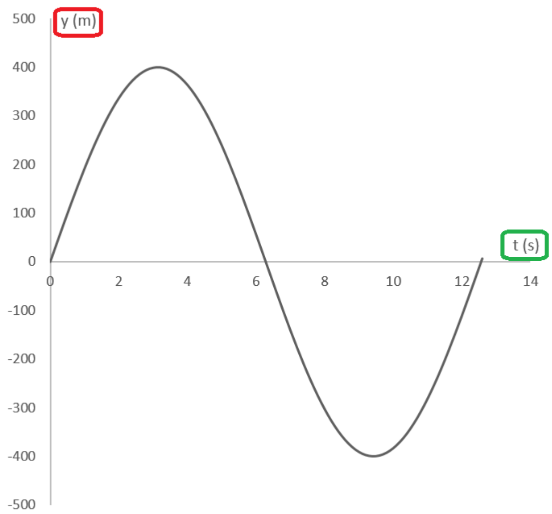
A konstansokat behelyettesítve:

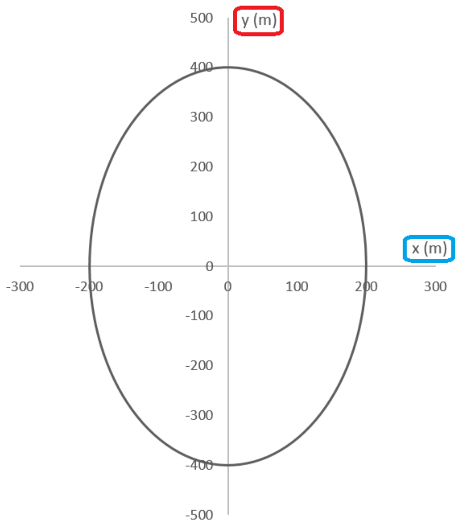
$$\left(\frac{x}{200}\right)^2 + \left(\frac{y}{400}\right)^2 = 1.$$

A repülőgép egy ellipszis mentén mozog.

Kiolvashatjuk azt is, hogy az ellipszis nagytengelye 2·400 m, iránya az y tengely iránya; a kistengelye 2·200 m, iránya az x tengely iránya. Az ellipszist annyi idő alatt járja körbe a repülő, amennyi idő alatt a $\cos(t/t_0)$ ill. $\sin(t/t_0)$ argumentuma 2π-vel nő: $T/t_0 = 2\pi$, tehát a periódusidő $T = 2\pi t_0 = 4\pi = 12{,}57$ s.
A $t_0 = 0$ időpontban a repülőgép az $x(0) = A\cos(0) = 200\cos(0) = 200$ m, $y(0) = 2A\sin(0) = 400\sin(0) = 0$ pontból indul, vagyis az x tengelyről (az x = 200 m-től). Az y értéke nő, ez azt jelenti, hogy a repülőgép pozitív forgásirányban járja körül az ellipszist.







b) Az adott időpontra vonatkozó sebesség- ill. gyorsulásvektorokat úgy kapjuk meg, hogy az **r**(t) függvény deriválásával előállítjuk a **v**(t) és **a**(t) függvényeket, majd ezekbe behelyettesítjük a megadott időket. A vektorok által bezárt szög a két vektor skalárszorzatából számolható ki, mivel

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$.

A vektorok skaláris szorzata a Descartes-komponenseikből számolva a komponensek szorzatának összegével egyenlő:

$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

A helyvektor tehát

$\mathbf{r}(t) = A \cos(t/t_0)\,\mathbf{i} + 2A \sin(t/t_0)\,\mathbf{j} = 200 \cos(t/2)\,\mathbf{i} + 400 \sin(t/2)\,\mathbf{j}$ [m],

ebből a sebességvektor

$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = -(A/t_0) \sin(t/t_0)\,\mathbf{i} + (2A/t_0) \cos(t/t_0)\,\mathbf{j} = -100 \sin(t/2)\,\mathbf{i} + 200 \cos(t/2)\,\mathbf{j}$ [m/s],

és ebből a gyorsulásvektor

$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = -(A/t_0^2) \cos(t/t_0)\,\mathbf{i} - (2A/t_0^2) \sin(t/t_0)\,\mathbf{j} = -50 \cos(t/2)\,\mathbf{i} - 100 \sin(t/2)\,\mathbf{j}$ [m/s^2].

Behelyettesítve $t_1 = 0$ s -ban

$\mathbf{v}(0) = 0\,\mathbf{i} + 200\,\mathbf{j}$ [m/s]; $\quad \mathbf{a}(0) = -50\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j}$ [m/s^2] .

Látható, hogy a két vektor merőleges.

Ezt skalárszorzat kiszámításával is megmutathatjuk: a két vektor skalárszorzata

$\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{a}(0) = 0 \cdot (-50) + 200 \cdot 0 = 0;$

$\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{a}(0) = |\mathbf{v}(0)| \cdot |\mathbf{a}(0)| \cdot \cos\alpha_0 \;\rightarrow\; \cos\alpha_0 = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{a}(0) / (|\mathbf{v}(0)| \cdot |\mathbf{a}(0)|) = 0 \;\rightarrow\; \alpha_0 = 90°.$

[t=0-ban $\mathbf{r}(0) = 200\,\mathbf{i}$ (m), a test az x tengely +200 (m) koordinátájú pontjában van;
a sebessége $\mathbf{v}(0) = 200\,\mathbf{j}$ (m/s), **j** irányú, azaz előrefelé mutat az ellipszis érintőjének irányában;
a gyorsulása $\mathbf{a}(0) = -50\,\mathbf{i}$ (m/s^2), az origó felé mutat, pontosan merőleges a sebességre, vagyis ebben a pillanatban a test állandó nagyságú sebességgel kanyarodik.]

$t_2 = 2$ s -ban behelyettesítéssel a sebesség és a gyorsulás:

$\mathbf{v}(2) = -100 \sin(1)\,\mathbf{i} + 200 \cos(1)\,\mathbf{j} = -84{,}15\,\mathbf{i} + 108{,}1\,\mathbf{j}$ [m/s],

$\mathbf{a}(2) = -50 \cos(1)\,\mathbf{i} - 100 \sin(1)\,\mathbf{j} = -27{,}02\,\mathbf{i} - 84{,}15\,\mathbf{j}$ [m/s^2].

A két vektor skalárszorzata:

$\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{a}(2) = (-84{,}15) \cdot (-27{,}02) + 108{,}1 \cdot (-84{,}15) = -6819{,}7$ [m^2/s^3];

a vektorok abszolút értéke:

$|\mathbf{v}(2)| = \sqrt{(-84{,}15)^2 + (108{,}1)^2} = 136{,}96$ [m/s];

$|\mathbf{a}(2)| = \sqrt{(-27{,}02)^2 + (-84{,}15)^2} = 88{,}377$ [m/s^2].

$\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{a}(2) = |\mathbf{v}(2)| \cdot |\mathbf{a}(2)| \cdot \cos\alpha_2 : \qquad -6819{,}7 = 136{,}96 \cdot 88{,}377 \cdot \cos\alpha_2$

$\rightarrow \quad \cos\alpha_2 = -0{,}5634 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 124{,}3° = 2{,}169$ rad.

[$t_2 = 2$ s-ban $\mathbf{r}(2) = 108{,}1\,\mathbf{i} + 336{,}6\,\mathbf{j}$ [m];
a sebesség érintő irányú;
a gyorsulás az origó felé mutat, ami ebben a pillanatban a sebességre merőleges irányhoz képest „hátrafelé” van (124,3°>90°), vagyis a repülőgép ebben a pillanatban lassulva kanyarodik.]

2/3. Egy kipukkadt lufi sebességét az alábbi függvény adja meg:

$\mathbf{v}(t) = 0{,}2\ e^{0{,}1t}\ \mathbf{i} - 2{,}8\ \sin(4t)\ \mathbf{j} + (3-4t)\ \mathbf{k}$ [m/s]

Az időt másodpercekben, a távolságot méterben mérjük.

Kipukkadásakor, $t_0 = 0$ s-ban a lufi az $\mathbf{r_0} = 2\ \mathbf{i} + 1{,}4\ \mathbf{j} + 1{,}5\ \mathbf{k}$ [m] pontból indult.

a) Hol lesz a lufi fél másodperc múlva?

b) A lufi egy olyan 3×3×3 m-es szobában van, melynek egyik sarkához illesztettük a koordináta-rendszerünket. Mikor, melyik fal (ill. plafon v. padló) melyik pontjának megy neki először?

Megoldás

a) A **v**(t) sebesség és az $\mathbf{r_0}$ kiindulási koordináta ismeretében fel kell írnunk az **r**(t) helyvektor függvényt, amibe majd be tudjuk helyettesíteni a megadott időpontot.

Keressük azt az **r**(t) függvényt, amire teljesül, hogy

– deriváltja a megadott **v**(t) függvény: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$ és

– helyettesítési értéke megfelel a megadott $\mathbf{r}(t^*) = \mathbf{r}^*$ feltételnek (azaz az előállítandó **r**(t) függvénybe behelyettesítve a t* időt, meg kell kapjuk a megadott **r*** helyvektort). Sokszor (de nem mindig) a $t_0 = 0$-hoz tartozó $\mathbf{r_0}$ van megadva, tehát $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ kell teljesüljön.

Esetünkben $t_0 = 0$-ban $\mathbf{r_0} = 2\ \mathbf{i} + 1{,}4\ \mathbf{j} + 1{,}5\ \mathbf{k}$ [m], tehát

$v_x = 0{,}2\ e^{0{,}1t}$ (m/s), $x(t_0) = x(0) = x_0 = 2$ (m);

$v_y = -\ 2{,}8 \sin(4t)$ (m/s), $y(t_0) = y(0) = y_0 = 1{,}4$ (m);

$v_z = (3-4t)$ (m/s), $z(t_0) = z(0) = z_0 = 1{,}5$ (m).

A keresett függvényt határozott vagy határozatlan integrállal is előállíthatjuk.

Határozott integrállal:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t^*) + \int_{t^*}^{t} \mathbf{v}(\tau)\, d\tau\ ,$$

illetve $t^* = t_0 = 0$ esetén

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(\tau)\, d\tau\ ,$$

koordinátánként

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(\tau)\, d\tau\ ; \qquad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(\tau)\, d\tau\ ; \qquad z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(\tau)\, d\tau\ .$$

Jelen esetben

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(\tau)\, d\tau = 2 + \int_0^t 0{,}2e^{0{,}1\tau}\, d\tau = 2 + 0{,}2\left[\frac{e^{0{,}1\tau}}{0{,}1}\right]_0^t = 2 + 2(e^{0{,}1t} - 1) = 2e^{0{,}1t}\ ;$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(\tau)\, d\tau = 1{,}4 + \int_0^t -2{,}8 \sin(4\tau)\, d\tau = 1{,}4 - 2{,}8\left[-\frac{\cos(4\tau)}{4}\right]_0^t =$$

$$= 1{,}4 + 0{,}7\ (\cos(4t) - 1) = 1{,}4 + 0{,}7 \cos(4t) - 0{,}7 = 0{,}7\ (1 + \cos(4t))\ ;$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(\tau)\, d\tau = 1{,}5 + \int_0^t (3 - 4\tau) d\tau = 1{,}5 + [3\tau - 2\tau^2]_0^t = 1{,}5 + 3t - 2t^2\ .$$

Vektorként felírva

$$\mathbf{r}(t) = 2e^{0{,}1t}\ \mathbf{i} + 0{,}7(1+\cos(4t))\ \mathbf{j} + (1{,}5+3t-2t^2)\ \mathbf{k}\ [\mathrm{m}]\ .$$

Határozatlan integrállal:

$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt + \mathbf{k}$, ahol a **k** konstans vektor értékét abból tudjuk meghatározni, hogy

$\mathbf{r}(t^*) = \int \mathbf{v}(t)\,dt + \mathbf{k} = \mathbf{r}^*$ kell teljesüljön,

illetve $t^* = t_0 = 0$ esetén

$\mathbf{r}(t_0) = \int \mathbf{v}(t)\,dt + \mathbf{k} = \mathbf{r_0}$ kell teljesüljön.

Jelen esetben

$x(t) = \int v_x\,dt + k_x = \int 0{,}2e^{0{,}1t}\,dt + k_x = \frac{0{,}2}{0{,}1}e^{0{,}1t} + k_x = 2e^{0{,}1t} + k_x$.

A kezdeti feltételből kiolvasható, hogy $t_0 = 0$-ban $x(0) = x_0 = 2$ (m) kell legyen.

Az $x(t) = 2e^{0{,}1t} + k_x$ függvény helyettesítési értéke $t_0 = 0$-ban:

$x(0) = 2e^{0{,}1\cdot 0} + k_x = 2 + k_x$,

és tudjuk, hogy $x(0) = x_0 = 2$ kell legyen:

$2 + k_x = 2$, amiből $k_x = 0$, tehát

$x(t) = 2e^{0{,}1t}$ [m].

$y(t) = \int v_y\,dt + k_y = \int -2{,}8\sin(4t)\,dt + k_y = -\frac{-2{,}8}{4}\cos(4t) + k_y = 0{,}7\cos(4t) + k_y$;

$t_0 = 0$-ban a kezdeti feltétel szerint $y(0) = y_0 = 1{,}4$ (m):

$0{,}7\cos(0) + k_y = 0{,}7 + k_y = 1{,}4 \quad\rightarrow\quad k_y = 0{,}7$ (m), tehát

$y(t) = 0{,}7\,(1 + \cos(4t))$ [m].

$z(t) = \int v_z\,dt + k_z = \int (3 - 4t)\,dt + k_z = (3t - 2t^2) + k_z$;

$t_0 = 0$-ban a kezdeti feltétel szerint $z(0) = z_0 = 1{,}5$ (m):

$3\cdot 0 - 2\cdot 0^2 + k_z = k_z = 1{,}5 \quad\rightarrow\quad k_3 = 1{,}5$ (m), tehát

$z(t) = 3t - 2t^2 + 1{,}5$ [m].

a) A kérdés az volt, hogy fél másodperc múlva hol lesz a lufi. $t = 0{,}5$ s behelyettesítésével

$x(0{,}5) = 2e^{0{,}05} = 2{,}103$ (m),

$y(0{,}5) = 0{,}7\,(1 + \cos(4\cdot 0{,}5)) = 0{,}4087$ (m),

$z(0{,}5) = 3\cdot 0{,}5 - 2\cdot 0{,}5^2 + 1{,}5 = 2{,}5$ (m);

a lufi az

$\mathbf{r}(0{,}5) = 2{,}103\,\mathbf{i} + 0{,}4087\,\mathbf{j} + 2{,}5\,\mathbf{k}$ (m) pontban lesz.

b) A szobát határoló síkok az $x = 0$, $x = 3$ (m), $y = 0$, $y = 3$ (m), $z = 0$ és $z = 3$ (m) síkok.

Azt kell megvizsgálni, melyik feltétel mikor teljesül, és a legkisebb időt kiválasztani.

$x(t_1) = 2e^{0{,}1t} = 0$: soha — $x(t_2) = 2e^{0{,}1t} = 3$: $t_2 = 4{,}055$ s

$y(t_3) = 0{,}7(1+\cos(4t_3)) = 0$: $t_3 = 0{,}7854$ s — $y(t_4) = 0{,}7(1+\cos(4t_4)) = 3$: soha

$z(t_5) = 3t_5 - 2t_5^2 + 1{,}5 = 0$: $t_5 = 1{,}896$ s — $z(t_6) = 3t_6 - 2t_6^2 + 1{,}5 = 3$: soha

A legkisebb idő t_3, tehát a lufi $t_3 = 0{,}7854$ s-ban nekimegy az $y = 0$ egyenletű falnak, mégpedig az

$x(0{,}7854) = 2{,}163$ m, $z(0{,}7854) = 2{,}622$ m koordinátájú pontjának.

2/4. Egy test gyorsulása **a**(t) = (2t + 1) **i** + π^2 cos (3π t) **j** [m/s^2].
A t_0 = 0 s -ban a test sebessége $\mathbf{v_0}$ = 2 **i** + 22 **j** (m/s).
Mennyi lesz t_1 = 4 s -ban
a) a sebesség nagysága?
b) a sebességvektornak az x tengellyel bezárt szöge?
c) Hol lesz a test t_1 = 4 s -ban, ha t* = 1 s-ban az **r**(1) = 22 **j** + 2 **k** (m) pontban van?

Megoldás

Keressük azt a **v**(t) függvényt, amire teljesül, hogy
– deriváltja a megadott **a**(t) függvény: $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t)$ és
– helyettesítési értéke megfelel a megadott **v**(t*) = **v*** feltételnek (azaz az előállítandó **v**(t) függvénybe behelyettesítve a t* időt meg kell kapjuk a megadott **v*** helyvektort; speciálisan a t_0 = 0-hoz tartozó $\mathbf{r_0}$ vektort).

$a_x = 2t + 1$ [m/s^2] t_0 = 0-ban $v_x = 2$ (m/s);
$a_y = \pi^2 \cos(3\pi t)$ [m/s^2] $v_y = 22$ (m/s).

Határozott integrállal megoldva a feladatot:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(\tau)\,d\tau = 2 + \int_0^t (2\tau+1)\,d\tau = 2 + [\tau^2+\tau]_0^t = 2 + t^2 + t \text{ [m/s]};$$

$$v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(\tau)\,d\tau = 22 + \int_0^t \pi^2\cos(3\pi\tau)\,d\tau = 22 + \pi^2\left[\frac{\sin(3\pi\tau)}{3\pi}\right]_0^t = 22 + \frac{\pi}{3}\sin(3\pi t) \text{ [m/s]}.$$

Határozatlan integrállal:

$a_x = \dot{v}_x = 2t + 1 \;\rightarrow\; v_x(t) = t^2 + t + k_{vx}$;
mivel $v_x(0) = 2$, így $0^2 + 0 + k_{vx} = 2 \;\rightarrow\; k_{vx} = 2$, tehát
$v_x = t^2 + t + 2$ [m/s].

$a_y = \dot{v}_y = \pi^2 \cos(3\pi t) \;\rightarrow\; v_y(t) = (\pi/3)\sin(3\pi t) + k_{vy}$;
mivel $v_y(0) = 22$, így $(\pi/3)\sin(0) + k_{vy} = 22 \;\rightarrow\; k_{vy} = 22$, tehát
$v_y = (\pi/3)\sin(3\pi t) + 22$ [m/s].

A sebességvektor tehát
$\mathbf{v}(t) = (t^2 + t + 2)\,\mathbf{i} + ((\pi/3)\sin(3\pi t) + 22)\,\mathbf{j}$ [m/s] .

t_1 = 4 s-ban a test sebessége
$\mathbf{v}(4) = (4^2+4+2)\,\mathbf{i} + ((\pi/3)\sin(12\pi) + 22)\,\mathbf{j} = 22\,\mathbf{i} + 22\,\mathbf{j}$ [m/s] .

Ennek

a) nagysága $|\mathbf{v}(4)| = \sqrt{22^2+22^2} = 31{,}11$ (m/s) ;
b) Könnyen látható, hogy az x tengellyel bezárt szög 45°. Számoljuk ki ezt a szöget skalárszorzattal is! Az x tengellyel bezárt szöget az x tengely irányát megadó **i** egységvektorral vett skalárszorzatból számolhatjuk. **i** egységvektor, tehát az abszolút értéke 1. (Az **i** vektor y komponense zérus.)

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathbf{v}(4)\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{v}(4)|\cdot 1} = \frac{22\cdot 1 + 22\cdot 0}{22\sqrt{2}\cdot 1} = \frac{22}{22\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\rightarrow\quad \varphi = 45° = \pi/4 \text{ rad}.$$

c) Az integrálásnál két részletre kell figyelni: egyrészt a megadott helyvektor most nem $t_0 = 0$-hoz, hanem $t^* = 1$ s-hoz tartozik; másrészt a gyorsulás- és sebességvektornak x és y komponense volt, de a megadott helyvektornak y és z komponense van.

$v_x = t^2 + t + 2$ [m/s] $\quad$ $t^* = 1$ s-ban $\quad x = 0$;
$v_y = (\pi/3)\sin(3\pi t) + 22$ [m/s] $\quad y = 22$ (m);
$v_z = 0$ $\quad z = 2$ (m).

Határozott integrállal:

$$x(t) = x(1) + \int_1^t v_x(\tau)\,d\tau = 0 + \int_1^t (\tau^2+\tau+2)\,d\tau =$$
$$= \left[\frac{\tau^3}{3}+\frac{\tau^2}{2}+2\tau\right]_1^t = \left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+2t\right) - \left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+2\right) = \frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+2t - \frac{17}{6}\ \text{[m]};$$
$$y(t) = y(1) + \int_1^t v_y(\tau)\,d\tau = 22 + \int_1^t \left(22+\frac{\pi}{3}\sin(3\pi\tau)\right)d\tau = 22 + \left[22\tau+\frac{\pi}{3}\frac{(-\cos(3\pi\tau))}{3\pi}\right]_1^t =$$
$$= 22 + \left(22t - \frac{1}{9}\cos(3\pi t)\right) - \left(22+\frac{1}{9}\right) = 22t - \frac{1}{9}\cos(3\pi t) - \frac{1}{9}\ \text{[m]};$$
$$z(t) = z(1) + \int_1^t v_z(\tau)\,d\tau = 2 + \int_1^t 0\,d\tau = 2\ \text{[m]}.$$

Határozatlan integrállal:

$x(t) = t^3/3 + t^2/2 + 2t + k_x$;
$t^* = 1$ s-ban $x(1) = 0$:
$x(1) = 1^3/3 + 1^2/2 + 2\cdot 1 + k_x = 17/6 + k_x = 0 \quad \rightarrow \quad k_x = -17/6$, tehát
$x(t) = t^3/3 + t^2/2 + 2t - 17/6$ [m].

$y(t) = -(1/9)\cos(3\pi t) + 22t + k_y$;
$t^* = 1$ s-ban $y(1) = 22$ (m):
$y(1) = -(1/9)\cos(3\pi\cdot 1) + 22\cdot 1 + k_y = 1/9 + 22 + k_y = 22 \quad \rightarrow \quad k_y = -1/9$, tehát
$y(t) = -(1/9)\cos(3\pi t) + 22t - 1/9$ [m];

$z(t) = 0 + k_z$;
$t^* = 1$ s-ban $z(1) = 2$ (m):
$z(1) = k_z = 2 \quad \rightarrow \quad k_z = 2$, tehát
$z(t) = 2$ [m].

A helyvektor
$\mathbf{r}(t) = (\,t^3/3 + t^2/2 + 2t - 17/6\,)\,\mathbf{i} + (\,-(1/9)\cos(3\pi t) + 22t - 1/9\,)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ [m].

$t_1 = 4$ s -ban a test helyvektora
$\mathbf{r}(4) = 34{,}5\,\mathbf{i} + 790/9\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k} = 34{,}5\,\mathbf{i} + 87{,}78\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ [m].

Gyakorló feladatok a zárthelyire

2/5. Ágyúgolyó röppályájának egyenlete

$\mathbf{r}(t) = (at + b)\,\mathbf{i} + (ct^2 + dt + e)\,\mathbf{k}$,

ahol $a = 5$ m/s, $b = 100$ m, $c = –5$ m/s^2, $d = 10$ m/s, $e = 200$ m.

a) Honnan lőtték ki az ágyúgolyót? A kilövés t = 0 s-ban történt.

b) Mekkora volt a kezdősebessége?

c) Mekkora volt a gyorsulása?

d) Mikor és hol ér földet az ágyúgolyó? A koordináta-rendszer origója a földön van.

e) Mikor és hol lesz merőleges a sebesség a gyorsulásra?

Megoldás

a) t = 0 s-ban $\mathbf{r}(0) = b\,\mathbf{i} + e\,\mathbf{k} = 100\,\mathbf{i} + 200\,\mathbf{k}$ [m].

b) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = a\,\mathbf{i} + (2ct + d)\,\mathbf{k} = 5\,\mathbf{i} + (–10t + 10)\,\mathbf{k}$,

$\mathbf{v}(0) = 5\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{k}$ (m/s), $v_0 = \sqrt{5^2+10^2} = 11{,}18$ m/s .

c) $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = 2c\,\mathbf{k} = –10\,\mathbf{k}$ (m/s^2).

A feladat szövege szerint egy ágyúgolyó mozgásáról van szó, vagyis egy ferde hajításról. A helyvektor z komponensében a t^2 együtthatójának mégse $–g/2$ volt írva, viszont itt látjuk, hogy a test gyorsulása konstans, lefelé mutat, nagysága 10 m/s^2, ami a szokásos közelítő érték a nehézségi gyorsulásra, csak most a képletben $–g/2$ értéke c-vel volt jelölve.

d) Vagyis: mikor éri el a z = 0 síkot:

$z(t) = ct^2 + dt + e = –5t^2 + 10t + 200 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 7{,}403$ s (a másik gyök negatív lenne, –5,403 s).

e) A két vektor merőleges, ha a skalárszorzatuk nulla:

$\mathbf{v} = 5\,\mathbf{i} + (–10t + 10)\,\mathbf{k}$ és $\mathbf{a} = 0\,\mathbf{i} –10\,\mathbf{k} \;\rightarrow$

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 5\cdot0 + (–10t + 10)\cdot(–10) = 100(t–1) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 1$ s,

$\mathbf{r}(1) = 105\,\mathbf{i} + 205\,\mathbf{k}$ [m].

Ez a pont éppen a pálya csúcspontja. Tudva azt, hogy hajításnál a gyorsulás függőleges, a kérdést úgy is átfogalmazhatjuk, hogy mikor lesz a sebességvektor éppen vízszintes, azaz mikor lesz a sebességvektor függőleges komponense zérus:

$v_z = –10t + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 1$ s.

2/6. Egy test gyorsulása

$\mathbf{a}(t) = 4a\sin(\omega t+\varphi_0)\,\mathbf{i} + 4b\sin\omega t\,\mathbf{j}$, ahol $\omega = 2$ s$^{–1}$, $\varphi_0 = \pi/2$.

$t_1 = \pi/4$ s-ban a test az $\mathbf{r_1} = a\,\mathbf{i} – b\,\mathbf{j}$ [m] pontban van, és sebessége $\mathbf{v_1} = 2a\,\mathbf{i}$ [m/s].

a) Adjuk meg a test helyvektorát és sebességét $t_2 = 3\pi$ s-ban!

b) Milyen pályán mozog a test?

c) Mely időpontokban van legközelebb a test az origóhoz?

Megoldás

a) Behelyettesítjük a konstansokat, majd integrálunk, figyelembe véve a t_1 időhöz tartozó $\mathbf{v_1}$ és $\mathbf{r_1}$ értékeket:

$a_x = 4a \sin(2t + \pi/2) = 4a \cos(2t) = \dot{v}_x$

$\rightarrow \quad v_x = 2a \sin(2t) + k_{vx}$;

$t_1 = \pi/4$ s-ban $\quad v_{1x} = 2a \quad \rightarrow \quad k_{vx} = 0$

$\rightarrow \quad v_x = 2a \sin(2t)$ [m/s]; $\quad v_x = \dot{x}$

$\rightarrow \quad x = -\,a \cos(2t) + k_x$;

$t_1 = \pi/4$ s-ban $\quad x_1 = a \quad \rightarrow \quad k_x = a$

$\rightarrow \quad x = -\,a \cos(2t) + a$ [m].

$a_y = 4b \sin(2t) = \dot{v}_y$

$\rightarrow \quad v_y = -2b \cos(2t) + k_{vy}$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $\quad v_{1y} = 0 \quad \rightarrow \quad k_{vy} = 0$

$\rightarrow \quad v_y = -2b \cos(2t)$ [m/s]; $\quad v_y = \dot{y}$

$\rightarrow \quad y = -\,b \sin(2t) + k_y$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $\quad y_1 = -\,b \quad \rightarrow \quad k_y = 0$

$\rightarrow \quad y = -\,b \sin(2t)$ [m].

A sebesség

$\mathbf{v}(t) = 2a \sin(2t)\,\mathbf{i} - 2b \cos(2t)\,\mathbf{j}$ [m/s],

a helyvektor

$\mathbf{r}(t) = (a - a \cos(2t))\,\mathbf{i} - (b \sin(2t))\,\mathbf{j}$ [m].

a) Behelyettesítéssel $t_2 = 3\pi$ s-ban a test helyvektora

$\mathbf{r}(3\pi) = (-a \cos(6\pi) + a)\,\mathbf{i} - b \sin(6\pi)\,\mathbf{j} = \mathbf{0}$ [m],

sebessége

$\mathbf{v}(3\pi) = 2a \sin 6\pi\,\mathbf{i} - 2b \cos 6\pi\,\mathbf{j} = -\,2b\,\mathbf{j}$ [m/s],

vagyis az origóban van, és az y tengely negatív irányába mozog.

b) $x(t) = a - a \cos(2t) \quad \rightarrow \quad \cos(2t) = (a-x)/a$

$y(t) = -\,b \sin(2t) \quad \rightarrow \quad \sin(2t) = -\,y / b$

Felhasználva, hogy $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$: a pálya $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, ellipszis.

c) $x(t) = 0$, ha $t = k\cdot\pi$; $y(t) = 0$, ha $t = k\cdot\pi/2$;

azaz $t = k\cdot\pi$ esetén a test távolsága az origótól zérus.

2/7. Egy m = 5 kg tömegű test sebességét az alábbi függvény írja le:

$\mathbf{v} = a \sin(bt)\,\mathbf{i} + c \sin(dt)\,\mathbf{j}$,

ahol $a = -12$ m/s, $\quad b = 2\ \mathrm{s}^{-1}$, $\quad c = -2$ m/s, $\quad d = 1\ \mathrm{s}^{-1}$.

A test a t = 0 s-ban az $\mathbf{r_0} = 9\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ [m] pontban volt.

a) Adjuk meg a testre ható erőt az idő függvényében! (Vektorként és a nagyságát is.)

b) Adjuk meg a test helyvektorát az idő függvényében!

c) Milyen pályán mozog a test? Rajzoljuk is meg!

d) Mekkora szöget zár be a sebességvektor és a gyorsulásvektor $t = \pi/2$ s-ban?

Megoldás

$\mathbf{v} = a \sin(bt)\,\mathbf{i} + c \sin(dt)\,\mathbf{j} = -\,12 \sin(2t)\,\mathbf{i} - 2 \sin(t)\,\mathbf{j}$ [m/s]

a) $\mathbf{a} = ab \cos(bt)\,\mathbf{i} + cd \cos(dt)\,\mathbf{j} = -\,24 \cos(2t)\,\mathbf{i} - 2 \cos(t)\,\mathbf{j}$ [m/s^2]; $m = 5$ kg

$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = -\,120 \cos(2t)\,\mathbf{i} - 10 \cos(t)\,\mathbf{j}$ [N] , az abszolút értéke

$|\mathbf{F}| = \sqrt{(-120\cos(2t))^2 + (-10\cos(t))^2} = 10\sqrt{144\cos^2(2t) + \cos^2(t)}$ [N]

b) $\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\, dt$

$x(t) = \int v_x\, dt = \int (-12 \sin(2t))\, dt = 6 \cos(2t) + k_1$; $x_0 = 9$ m;

$x(0) = 6 \cos(0) + k_1 = 6 + k_1 = x_0 = 9 \quad \rightarrow \quad k_1 = 3$

$x(t) = 6 \cos(2t) + 3$

$y(t) = \int v_y\, dt = \int (-2 \sin(t))\, dt = 2 \cos(t) + k_2$; $y_0 = 3$ m;

$y(0) = 2 \cos(0) + k_2 = 2 + k_2 = y_0 = 3 \quad \rightarrow \quad k_2 = 1$

$y(t) = 2 \cos(t) + 1$

tehát a test helyvektora:

$\mathbf{r}(t) = [\,6 \cos(2t) + 3\,]\,\mathbf{i} + [\,2 \cos(t) + 1\,]\,\mathbf{j}$ [m]

c) Az **r**(t) függvény a pálya paraméteres alakja. Jelen esetben az időt úgy tudjuk kiküszöbölni belőle, hogy

az x(t)-ből kifejezzük cos(2t) -t: $\cos(2t) = (x-3)/6$,

az y(t)-ből pedig kifejezzük cos(t) -t: $\cos(t) = (y-1)/2$,

és cos(2t) -t kifejezzük cos(t) -vel:

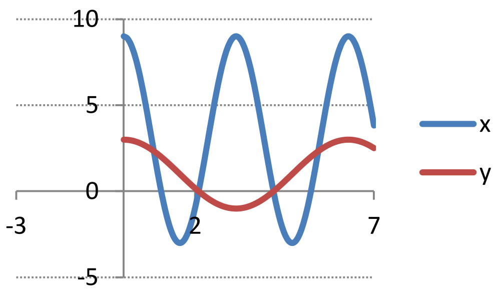
$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - [1-\cos^2(t)] = 2\cos^2(t) - 1$,

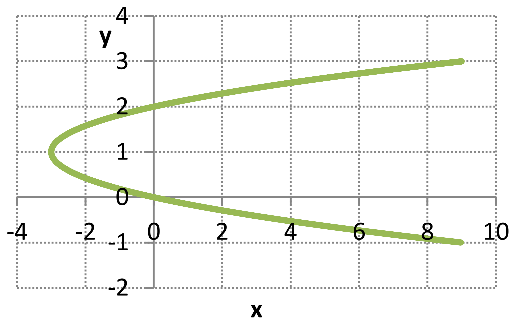
vagyis $(x-3)/6 = 2 \cdot [(y-1)/2]^2 - 1$.

Ebből átrendezés után kapjuk, hogy $x = 3y(y-2)$.

A pálya ennek a parabolának az a része, amire

$-3 \le x \le 9$ (és $-1 \le y \le 3$).





d)

$\mathbf{v} = a \sin(bt)\,\mathbf{i} + c \sin(dt)\,\mathbf{j} = -\,12 \sin(2t)\,\mathbf{i} - 2 \sin(t)\,\mathbf{j}$ [m/s]

$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = ab \cos(bt)\,\mathbf{i} + cd \cos(dt)\,\mathbf{j} = -24 \cos(2t)\,\mathbf{i} - 2 \cos(t)\,\mathbf{j}$ [m/s^2]

$\mathbf{v}(\pi/2) = -\,12 \sin(\pi)\,\mathbf{i} - 2 \sin(\pi/2)\,\mathbf{j} = -\,2\,\mathbf{j}$ [m/s]

$\mathbf{a}(\pi/2) = -24 \cos(\pi)\,\mathbf{i} - 2 \cos(\pi/2)\,\mathbf{j} = 24\,\mathbf{i}$ [m/s^2]

$\mathbf{v}(\pi/2) \cdot \mathbf{a}(\pi/2) = 0 \quad \rightarrow$ merőlegesek

2/8. Két légy mozgásának pályafüggvénye

$\mathbf{r_1}(t) = a\,t^2\,\mathbf{i} + b\,t\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r_2}(t) = \mathbf{i} + d\,t\,\mathbf{j} + e\,t^2\,\mathbf{k}$

ahol $a = 5\ m/s^2$, $b = 2\ m/s$, $c = 5\ m$, $d = -3\ m/s$, $e = 2\ m/s^2$.

a) Írjuk fel egymástól való távolságukat az idő függvényében!

b) Számítsuk ki a t = 10 s-ban a két légy sebességvektorát és sebességük nagyságát!

Megoldás

a) $d(t) = \sqrt{(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1})^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} =$

$= \sqrt{(1-at^2)^2 + (dt-bt)^2 + (et^2-c)^2} = \sqrt{(1-5t^2)^2 + (-5t)^2 + (2t^2-5)^2} =$

$= \sqrt{26-30t^2+54t^4}$

b) $\mathbf{v_1}(t) = 2at\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = 10t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ [m/s];

$\mathbf{v_1}(10) = 100\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ [m/s]; $|\mathbf{v_1}(10)| = \sqrt{100^2+2^2} = 100{,}02$ m/s.

$\mathbf{v_2}(t) = 0\,\mathbf{i} + d\,\mathbf{j} + 2et\,\mathbf{k} = -3\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}$ [m/s];

$\mathbf{v_2}(10) = -3\,\mathbf{j} + 40\,\mathbf{k}$ [m/s]; $|\mathbf{v_2}(10)| = \sqrt{(-3)^2+40^2} = 40{,}11$ m/s.

2/9. Műrepülés közben két repülőgép pályája a következő pályafüggvényekkel adható meg:

$\mathbf{r_1}(t) = a\cos 3\omega t\,\mathbf{j} + a\sin 3\omega t\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r_2}(t) = 3a\cos(5\omega t+\pi)\,\mathbf{i} + 3a\sin(5\omega t+\pi)\,\mathbf{j}$

ahol $a = 100$ m, $\omega = 0{,}1\ s^{-1}$.

a) Milyen pályákon repülnek a repülőgépek?

b) Mekkora a távolság a két repülőgép között t = 0 s-ban?

Megoldás

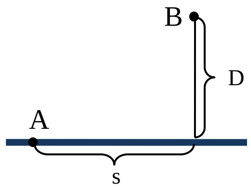
a) $x_1^2 + y_1^2 = 100^2$: 100 m sugarú kör;

$\mathbf{r_2}(t) = -3a\cos(5\omega t)\,\mathbf{i} - 3a\sin(5\omega t)\,\mathbf{j}$; $x_2^2 + y_2^2 = 300^2$: 300 m sugarú kör.

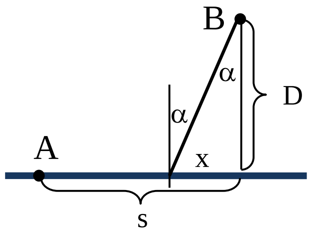
b) $\mathbf{r_1}(0) = 100\,\mathbf{i}$; $\mathbf{r_2}(0) = -300\,\mathbf{i}$, d = 400 m

Egyéb feladatok (nem zh-feladatok)

2/11. Egy ember a tóparton levő A pontból a legrövidebb idő alatt szeretne a B pontba érni. Milyen útvonalat válasszon, ha a maximális futási sebessége v_f, úszási sebessége pedig $v_ú$?



Megoldás



Az út két szakaszból áll, először valameddig fut a parton: legyen ez az ábra jelölése szerint s–x, majd ott beugrik a vízbe és egyenesen a B pont felé úszik; ez az út $\sqrt{x^2+D^2}$.
A teljes idő tehát

$$t(x)=t_f+t_ú=\frac{s-x}{v_f}+\frac{\sqrt{x^2+D^2}}{v_ú}$$

annak függvénye, hogy hol kezdett el úszni.
Azt az x értéket keressük, amelynél t-nek minimuma van (azaz ahol a t(x) függvény deriváltja zérus):

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{v_f}+\frac{x}{v_ú\sqrt{x^2+D^2}}=0 \text{, amiből} \qquad x=\frac{v_ú}{\sqrt{v_f^{\,2}-v_ú^{\,2}}}D\,.$$

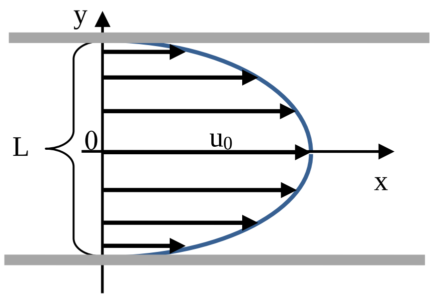
Látszik, hogy ez csak akkor megoldás, ha $v_f > v_ú$ (vagyis ha valaki gyorsabban úszik, mint ahogy fut, akkor végig csak ússzon).
[A t(x) függvény második deriváltja $d^2t/dx^2 = D^2/(v_ú(x^2+D^2)^{3/2}) > 0$, tehát a szélsőérték tényleg minimum.]
Ellenőrizzük még, teljesül-e, hogy $x \le s$, azaz:

$$\frac{v_ú}{\sqrt{v_f^{\,2}-v_ú^{\,2}}}D\le s \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{v_f}{v_ú}\right)^2 \ge 1+\left(\frac{D}{s}\right)^2$$

Ez automatikusan nem teljesül; ez azt jelenti, hogy ha nem tudunk ennyivel gyorsabban futni, mint úszni, akkor is végig úszni kell.
Analógia a Snellius-Descartes-törvénnyel súrló beesés esetén: a $dt/dx = 0$ kifejezésből látható, hogy $\frac{v_f}{v_ú}=\frac{\sqrt{x^2+D^2}}{x}=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sin 90^\circ}{\sin\alpha}=n$ (α a teljes visszaverődés határszöge)

2/12. Egy csónak L szélességű folyón halad át a folyóra merőlegesen a vízhez képest állandó v sebességgel. A folyó vizének sebességeloszlása parabolikus:

$$u=u_0\left(1-\frac{4y^2}{L^2}\right)$$



a) Határozzuk meg a csónak pályájának egyenletét!
b) Mennyivel viszi le a víz a csónakot, míg az egyik partról a másikra ér?

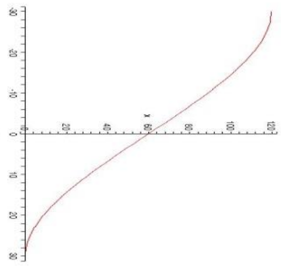
Megoldás

a) A csónak eredő sebessége mindig a pálya érintőjének irányába mutat.

u = dx/dt és v = dy/dt → (dy/dt) / (dx/dt) = v / u = dy / dx a pálya érintője.

u függ y-tól, tehát az alábbi differenciálegyenletet kell megoldanunk, hogy a pálya egyenletét y(x) avagy x(y) alakban megkapjuk:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u_0}\frac{1}{1-\frac{4y^2}{L^2}}.$$



Szeparáljuk és integráljuk:

$$\int_{-L/2}^{y} \frac{u_0}{v}\left(1-\frac{4y^2}{L^2}\right) dy = \int_0^x dx \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{u_0}{v}\left[y-\frac{4y^3}{3L^2}\right]_{-L/2}^{y} = \frac{u_0}{v}\left(y-\frac{4y^3}{3L^2} - \left(-\frac{L}{2} - \frac{4(-\frac{L}{2})^3}{3L^2}\right)\right) = \frac{u_0}{v}\left(y-\frac{4y^3}{3L^2} + \frac{L}{3}\right)$$

a pálya egyenlete.

Vagy: $\int \frac{u_0}{v}\left(1-\frac{4y^2}{L^2}\right) dy = \int dx \quad \rightarrow \quad x = \frac{u_0}{v}\left(y-\frac{4y^3}{3L^2}\right) + K$

és tudjuk, hogy x = 0 –nál y = –L/2: $0 = \frac{u_0}{v}\left(-\frac{L}{2} - \frac{4(-\frac{L}{2})^3}{3L^2}\right) + K = -\frac{u_0}{v}\frac{L}{3} + K$

vagyis $K = \frac{u_0}{v}\frac{L}{3}$ és $x = \frac{u_0}{v}\left(y-\frac{4y^3}{3L^2} + \frac{L}{3}\right)$.

b) A csónak átér, ha y = L/2, ezt behelyettesítve $x = \frac{2}{3}\frac{u_0}{v}L$.

2/13. A és B város 84 km-re vannak egymástól. Két biciklis elindul egy időben, az egyikük A-ból B-be 16 km/h, a másik B-ből A-ba 12 km/h sebességgel. Egy fecske is elindul velük egy időben A városból B város felé, de amikor találkozik a B-ből jövő biciklissel, visszafordul A felé, majd amikor találkozik az A-ból jövő biciklissel, visszafordul B felé, és így tovább. Mekkora utat tesz meg a fecske a biciklisták találkozásáig? A fecske sebessége 50 km/h óra, és egy szempillantás alatt meg tud fordulni.

Megoldás

A megoldást nem úgy keressük, hogy a fecske és az egyik ill. másik biciklista találkozásának helyét és idejét számoljuk ki és a fecske által megtett utakat összegezzük, hanem a két biciklista találkozásáig eltelt összes időt számoljuk ki, mert a fecske addig végig repül, így az idő ismeretében az általa megtett út könnyebben kiszámolható.

A találkozásig eltelt idő

- az egyik biciklistához rögzített koordináta-rendszerben: mivel a biciklisták egymással szembe haladnak, a másik biciklista sebessége az origóban lévőhöz képest 16+12 = 28 km/h, kezdetben a távolság köztük 84 km,

tehát t = 84 / 28 = 3 h.

- az úthoz rögzített koordináta-rendszerben: az origó A városban van, az onnan induló biciklista koordinátája $x_1 = 16$ t , a B városból indulóé pedig $x_2 = 84 - 12$ t. Találkozáskor $x_1 = x_2$: 16 t = 84 – 12 t → t = 3 h.

A fecske által megtett út s = 3 · 50 = 150 km.

2/14. Egy villamosvonalon a villamosok T időközönként járnak c sebességgel. A pálya mellett gépkocsi halad v sebességgel. Mennyi időközönként találkozik a gépkocsi villamosokkal?

Megoldás

Írjuk fel egy villamoshoz rögzített koordináta-rendszerben az autó sebességét:

ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek: $v_{rel} = v + c$

ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v > c: $v_{rel} = v - c$

ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v < c: $v_{rel} = c - v$

A villamosok távolsága egymástól $d = c \cdot T$,

ekkora távolságot kell megtenni az autónak, tehát az ehhez szükséges idő

$\Delta t = c \cdot T / (v + c)$, ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek,

$\Delta t = c \cdot T / (v - c)$, ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v > c, és

$\Delta t = c \cdot T / (c - v)$, ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v < c .

2/15. Lelépjük egy szekér hosszát menet közben: a szekérrel egy irányba menve ’a’ lépésnek mérjük, szembe menve pedig ’b’ lépésnek mérjük. Milyen hosszú a szekér?

Megoldás

A szekér sebessége v_{sz}, az emberé v_e.

Ha egy irányba mennek, akkor t_1 idő alatt ér el az ember a szekér végétől a szekér elejéig,

ezalatt $v_e t_1 = a$ (1) lépést tesz meg, és $v_e t_1 = v_{sz} t_1 + L$ (2)

Ha szembe mennek, akkor a t_2 idő alatt jut el az ember a szekér elejétől a végéhez,

ezalatt $v_e t_2 = b$ (3) lépést tesz meg, és $(v_e + v_{sz})\, t_2 = L$ (4)

Ez 4 egyenlet 5 ismeretlennel, ügyesen kell rendezgetni. Pl. (1)-et behelyettesítve (2)-be $v_{sz} t_1 = a - L$, másrészt (3)-at behelyettesítve (4)-be $v_{sz} t_2 = L - b$, és a két egyenletet elosztva $t_1/t_2 = (a-L)/(L-b)$. Ugyanakkor (1)-et elosztva (2)-vel $t_1/t_2 = a/b$. Ezeket összevetve $(a-L)/(L-b) = a/b$, amiből $L = \frac{2ab}{a+b}$.

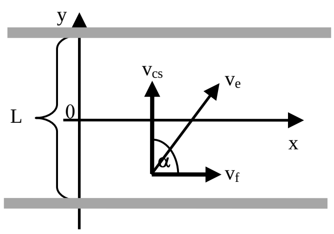
2/16. Folyóvíz sebessége 3 m/s, és van egy csónakunk, ami a vízhez képest 4 m/s sebességgel tud menni. Mekkora legyen a folyó sodrával bezárt szög, ha

a) a legrövidebb idő alatt;

b) a legrövidebb úton szeretnénk átérni a túlpartra?

Megoldás

a) A csónak orra mutasson a túlsó part felé, azaz $\alpha = 90°$.



b) A csónak eredő sebessége legyen merőleges a folyó sodrára, azaz a $\beta = 138{,}6°$.