

2/1. Egy tömegpont helyvektora az időtől a következőképpen függ:

$$\mathbf{r}(t) = (At+B) \mathbf{i} + (At-B) \mathbf{j} + (-Ct^2+4At+5B) \mathbf{k} ,$$

$$\text{ahol } A = 3 \text{ m/s}, \quad B = 10 \text{ m}, \quad C = 5 \text{ m/s}^2.$$

- Milyen távol van a tömegpont az origótól a $t_0 = 0$ időpontban?
- Milyen távol van a kiindulási ponttól a $t_1 = 2$ s -ban? A test $t_0 = 0$ -ban indult.
- Határozzuk meg a tömegpont sebességét és gyorsulását!
- Mekkora a sebessége a $t = 0$ időpontban?
- Mely időpontban éri el a tömegpont az x-y síkot?

Megoldás

a) A helyvektor az origóból mutat a tömegpont tartózkodási helyébe. A test origótól vett távolságát úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk a helyvektor abszolút értékét. Most a $t_0 = 0$ időpontra kell számolnunk, tehát először az időfüggő $\mathbf{r}(t)$ függvénybe behelyettesítjük a megadott időpontot (0 s).

A számolások előtt helyettesítsük be a konstansokat a mértékegységükkel együtt. A t időt s-ban értve:

$$\mathbf{r}(t) = (3 \text{ m/s} \cdot t \text{ s} + 10 \text{ m}) \mathbf{i} + (3 \text{ m/s} \cdot t \text{ s} - 10 \text{ m}) \mathbf{j} + (-5 \text{ m/s}^2 \cdot (t \text{ s})^2 + 4 \cdot 3 \text{ m/s} \cdot t \text{ s} + 50 \text{ m}) \mathbf{k} .$$

A mértékegységekből látjuk, hogy 'A' sebesség, 'B' hely, 'C' gyorsulás dimenziójú, és hogy a műveleteket elvégezve minden komponens mértékegysége méter (mivel a függvény helyet ad meg). A továbbiakban nem fogjuk kiírni a mértékegységeket.

$$\mathbf{r}(t) = (3t+10) \mathbf{i} + (3t-10) \mathbf{j} + (-5t^2+12t+50) \mathbf{k} \quad [\text{m}].$$

$t_0 = 0$ -ban az

$$\mathbf{r}(0) = 10 \mathbf{i} - 10 \mathbf{j} + 50 \mathbf{k} \text{ (m) pontban van a test,}$$

aminek a távolsága az origótól

$$d = |\mathbf{r}(0)| = r(0) = \sqrt{10^2+10^2+50^2} = 51,96 \text{ m.}$$

b) Két időpontbeli tartózkodási hely távolságát az $\mathbf{r}(t)$ függvényből úgy tudjuk kiszámolni, hogy annak a vektornak az abszolút értékét számoljuk ki, ami az egyik pontból a másikba mutat. Ezt a vektort elmozdulásvektornak hívjuk, a korábbi helyvektorból mutat a későbbi helyvektorba:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_{\text{vég}}) - \mathbf{r}(t_{\text{kezdő}}).$$

Behelyettesítve $t_1 = 2$ s-ot az $\mathbf{r}(t)$ függvénybe:

$$t_1 = 2 \text{ s-ban az } \mathbf{r}(2) = 16 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} + 54 \mathbf{k} \text{ (m) pontban van a test.}$$

Az elmozdulásvektor a $t_0 = 0 \rightarrow t_1 = 2$ s intervallumban az a vektor, ami az $\mathbf{r}(0)$ vektorból mutat az $\mathbf{r}(2)$ vektorba:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(2) - \mathbf{r}(0) = 6 \mathbf{i} + 6 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k} \text{ (m).}$$

A két pont távolsága ennek az elmozdulásvektornak az abszolút értéke:

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{6^2+6^2+4^2} = 9,381 \text{ m.}$$

(Hibalehetőség: a két vektor abszolút értékének különbsége nem egyenlő a két vektor különbségének abszolút értékével!)

Megjegyzés: Ez nem a test által megtett út (csak akkor egyenlő vele, ha a test egyenes pályán mozog). Görbevonallú mozgás esetén az utat nehezebb kiszámolni, mert a sebességvektort kell integrálni, ezzel nem fogunk foglalkozni a számolási gyakorlaton.

c) A sebesség és a gyorsulás is időfüggő vektormennyiségek.

A sebesség a hely változását adja meg, tehát

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t), \quad \text{a sebességvektor a helyvektor idő szerinti deriváltja;}$$

a gyorsulás a sebesség változását adja meg, tehát

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t), \quad \text{a gyorsulásvektor a sebességvektor idő szerinti deriváltja;}$$

$$\text{illetve a helyvektor idő szerinti második deriváltja: } \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Descartes-koordinátarendszerben felírt vektorokat komponensenként deriválunk, a deriválandó vektor egyes komponenseinek deriváltjai lesznek a deriváltvektor megfelelő komponensei. (Polár-koordinátarendszerben a deriválás bonyolultabb, mivel ott az egységvektorok is függenek az időtől.)

A helyvektor Descartes-komponensei

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k},$$

illetve a rövideg kedvéért nem mindig írjuk ki, hogy az időtől függenek a mennyiségek:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k};$$

a sebességvektor Descartes-komponensei

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k};$$

a gyorsulásvektor Descartes-komponensei

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

A sebességvektor komponensei a helyvektor komponenseinek a deriváltjai:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z},$$

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k};$$

a gyorsulásvektor komponensei a sebességvektor komponenseinek a deriváltjai:

$$a_x = \dot{v}_x, \quad a_y = \dot{v}_y, \quad a_z = \dot{v}_z,$$

$$\mathbf{a} = \dot{v}_x \mathbf{i} + \dot{v}_y \mathbf{j} + \dot{v}_z \mathbf{k}.$$

Nézzük a feladatot:

$$\begin{array}{llll} x = At + B & \rightarrow & \dot{x} = v_x = A & \rightarrow & \dot{v}_x = a_x = 0; \\ y = At - B & \rightarrow & \dot{y} = v_y = A & \rightarrow & \dot{v}_y = a_y = 0; \\ z = -Ct^2 + 4At + 5B & \rightarrow & \dot{z} = v_z = -2Ct + 4A & \rightarrow & \dot{v}_z = a_z = -2C; \end{array}$$

tehát

$$\mathbf{v}(t) = A \mathbf{i} + A \mathbf{j} + (-2Ct+4A) \mathbf{k} \text{ [m/s];}$$

$$\mathbf{a}(t) = -2C \mathbf{k} \text{ [m/s}^2\text{];}$$

a konstansokat behelyettesítve:

$$\mathbf{v}(t) = 3 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + (-10t+12) \mathbf{k} \text{ [m/s];}$$

$$\mathbf{a}(t) = -10 \mathbf{k} \text{ [m/s}^2\text{].}$$

d) A kezdősebességet megkapjuk, ha a $\mathbf{v}(t)$ függvénybe behelyettesítünk $t_0 = 0$ -t:

$$\mathbf{v}(0) = 3 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + 12 \mathbf{k} \text{ [m/s],}$$

és a nagysága:

$$v(0) = \sqrt{3^2+3^2+12^2} = 12,73 \text{ m/s.}$$

e) Az x-y sík egyenlete $z = 0$, tehát a test akkor éri el az x-y síkot, amikor $z(t) = 0$, azaz

$$z(t) = -Ct^2 + 4At + 5B = 0$$

$$-5t^2 + 12t + 50 = 0 \quad \rightarrow \quad t_3 = 4,582 \text{ s (és } t_4 = -2,182 \text{ s -ban is ott lett volna).}$$

Egy plusz kérdés: (ez nem zh-szintű feladat):

f) Bizonyítsuk be, hogy a mozgás síkmozgás! Határozzuk meg a pálya síkját!

Megoldás

A mozgás síkmozgás, ha léteznek olyan p, q, r, s konstansok, hogy

$$p \cdot x(t) + q \cdot y(t) + r \cdot z(t) + s = 0 \quad \text{teljesül minden } t\text{-re.}$$

Most $x = At+B, y = At-B, z = -Ct^2+4At+5B$, tehát

$$p(At+B) + q(At-B) + r(-Ct^2+4At+5B) + s = 0 \quad \text{kell igaz legyen.}$$

Ez akkor teljesül, ha a t -ben négyzetes ill. lineáris tagok szorzói, és a t -től független tag külön-külön mind zérussal egyenlők. Átrendezve:

$$(-rC)t^2 + (pA+qA+4rA)t + (pB-qB+5rB+s) = 0,$$

tehát

$$-rC = 0 \quad \text{és} \quad pA+qA+4rA = 0 \quad \text{és} \quad pB-qB+5rB+s = 0 \quad \text{kell teljesüljön.}$$

Az elsőből

$$-rC = 0 \rightarrow r = 0;$$

ezt behelyettesítve a másodikba ill. harmadikba:

$$\left. \begin{array}{l} pA + qA = 0 \\ pB - qB + s = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q = -p \\ s = -2pB \end{array} \right.$$

A sík egyenlete

$$p x - p y - 2pB = p(x - y - 2B) = 0.$$

$p = 1$ választással:

$$x - y - 2B = 0.$$

2/2. Egy repülőgép mozgását az

$$\mathbf{r}(t) = A \cos\left(\frac{t}{t_0}\right) \mathbf{i} + 2A \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) \mathbf{j} \quad [\text{m}] \quad \text{függvény írja le,}$$

ahol $A = 200 \text{ m}$, $t_0 = 2 \text{ s}$, a t idő s -ban értendő.

a) Milyen pályán mozog a repülőgép?

b) Mekkora szöget zár be a sebességvektor a gyorsulásvektorral a $t_1 = 0$ ill. a $t_2 = 2 \text{ s}$ időben?

Megoldás

a) Látható, hogy a repülőgép az x - y síkban mozog, hiszen a helyvektorának z komponense zérus. A számolási gyakorlaton a z koordináta a függőleges koordinátát fogja jelölni. A $z = 0$ síkot tetszőleges magasságban megválaszthatjuk, jelen esetben a földfelszín fölött van abban a magasságban, ahol a repülőgép repül.

Az $\mathbf{r}(t)$ függvény minden t értékhez megadja, hogy a test hol van, így az idő függvényében leírja, hogy a test milyen pályán mozog (vagyis a pálya paraméteres – idővel paraméterezett – formája). A pálya alakjának szempontjából nem érdekes információ, hogy a test mikor van a pálya egyes pontjaiban, csak az a fontos, hogy mely pontok tartoznak a pályához. A pályagörbét leíró egyenlet az adott görbe típusától függően lehet explicit alakú: $y(x) = 0$ ill. $x(y) = 0$, vagy implicit alakú: $f(x,y) = 0$. A pálya egyenletének felírásához ki kell küszöbölni az időt az $\mathbf{r}(t)$ függvény komponenseiből. Az idő kiküszöbölésére nem adható általános módszer, és nem is mindig írható fel a pálya zárt formában.

Ebben a feladatban a helyvektor koordinátái

$$x(t) = A \cos\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad y(t) = 2A \sin\left(\frac{t}{t_0}\right).$$

Mivel az $x(t)$ -ben a \cos és az $y(t)$ -ben a \sin argumentuma megegyezik, alkalmazhatjuk a $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ azonosságot.

Fejezzük ki az első egyenletből $\cos(t/t_0)$ -t, a másodikból $\sin(t/t_0)$ -t:

$$\cos\left(\frac{t}{t_0}\right) = \frac{x}{A}, \quad \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) = \frac{y}{2A},$$

ezekkel felírhatjuk, hogy

$$\left[\sin\left(\frac{t}{t_0}\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{t}{t_0}\right)\right]^2 = 1,$$

ezért

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{2A}\right)^2 = 1.$$

Ez egy ellipszis egyenlete.

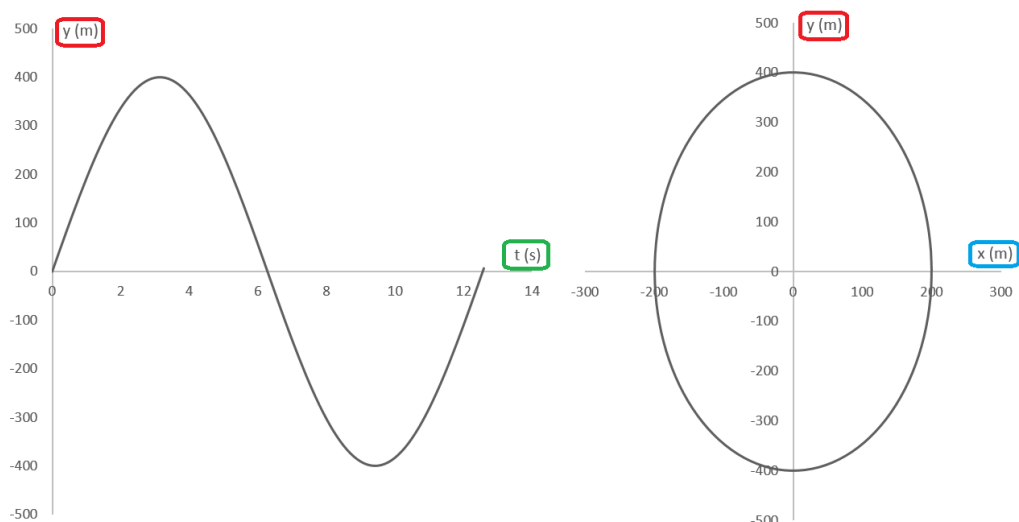
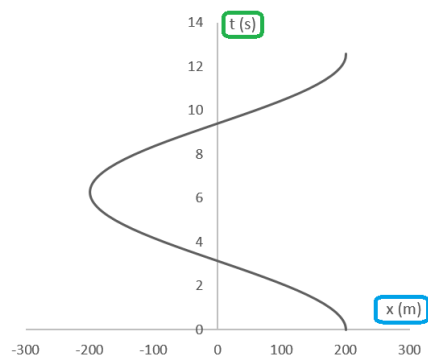
A konstansokat behelyettesítve:

$$\left(\frac{x}{200}\right)^2 + \left(\frac{y}{400}\right)^2 = 1.$$

A repülőgép egy ellipszis mentén mozog.

Kiolvashatjuk azt is, hogy az ellipszis nagytengelye $2 \cdot 400$ m, iránya az y tengely iránya; a kistengelye $2 \cdot 200$ m, iránya az x tengely iránya. Az ellipszist annyi idő alatt járja körbe a repülő, amennyi idő alatt a $\cos(t/t_0)$ ill. $\sin(t/t_0)$ argumentuma 2π -vel nő: $T/t_0 = 2\pi$, tehát a periódusidő $T = 2t_0\pi = 4\pi = 12,57$ s.

A $t_0 = 0$ időpontban a repülőgép az $x(0) = A \cos(0) = 200 \cos(0) = 200$ m, $y(0) = 2A \sin(0) = 400 \sin(0) = 0$ pontból indul, vagyis az x tengelyről (az $x = 200$ m-től). Az y értéke nő, ez azt jelenti, hogy a repülőgép pozitív forgásirányban járja körül az ellipszist.



b) Az adott időpontra vonatkozó sebesség- ill. gyorsulásvektorokat úgy kapjuk meg, hogy az $r(t)$ függvény deriválásával előállítjuk a $v(t)$ és $a(t)$ függvényeket, majd ezekbe behelyettesítjük a megadott időket. **A vektorok által bezárt szög a két vektor skalárszorzatából számolható ki, mivel**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi .$$

A vektorok skaláris szorzata a Descartes-komponenseiből számolva a komponensek szorzatának összegével egyenlő:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

A helyvektor tehát

$$\mathbf{r}(t) = A \cos(t/t_0) \mathbf{i} + 2A \sin(t/t_0) \mathbf{j} = 200 \cos(t/2) \mathbf{i} + 400 \sin(t/2) \mathbf{j} \text{ [m]},$$

ebből a sebességvektor

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = -A/t_0 \sin(t/t_0) \mathbf{i} + 2A/t_0 \cos(t/t_0) \mathbf{j} = -100 \sin(t/2) \mathbf{i} + 200 \cos(t/2) \mathbf{j} \text{ [m/s]},$$

és ebből a gyorsulásvektor

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = -A/t_0^2 \cos(t/t_0) \mathbf{i} - 2A/t_0^2 \sin(t/t_0) \mathbf{j} = -50 \cos(t/2) \mathbf{i} - 100 \sin(t/2) \mathbf{j} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Behelyettesítve $t_1 = 0$ s -ban

$$\mathbf{v}(0) = 200 \mathbf{j} \text{ [m/s]}, \quad \mathbf{a}(0) = -50 \mathbf{i} \text{ [m/s}^2\text{]} .$$

Látható, hogy a két vektor merőleges.

Ezt skalárszorzat kiszámításával is megmutathatjuk: a két vektor skalárszorzata

$$\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{a}(0) = 0 \cdot 200 + (-50) \cdot 0 = 0;$$

$$\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{a}(0) = |\mathbf{v}(0)| \cdot |\mathbf{a}(0)| \cdot \cos\alpha_0 \rightarrow \cos\alpha_0 = 0 \rightarrow \alpha_0 = 90^\circ .$$

$[\mathbf{r}(0) = 200 \mathbf{i} \text{ [m]},$ a test az x tengely +200 (m) pontjában van;

a sebessége \mathbf{j} irányú, azaz előre felé mutat az ellipszis érintőjének irányában;

a gyorsulása az origó felé mutat, pontosan merőleges a sebességre, vagyis ebben a pillanatban a test állandó nagyságú sebességgel kanyarodik.]

Behelyettesítve $t_2 = 2$ s -ban

$$\mathbf{v}(2) = -100 \sin(1) \mathbf{i} + 200 \cos(1) \mathbf{j} = -84,15 \mathbf{i} + 108,1 \mathbf{j} \text{ [m/s]},$$

$$\mathbf{a}(2) = -50 \cos(1) \mathbf{i} - 100 \sin(1) \mathbf{j} = -27,02 \mathbf{i} - 84,15 \mathbf{j} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

A két vektor skalárszorzata:

$$\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{a}(2) = (-84,15) \cdot (-27,02) + 108,1 \cdot (-84,15) = -6819,7 \text{ [m}^2\text{/s}^3\text{]};$$

a vektorok abszolút értéke:

$$|\mathbf{v}(2)| = \sqrt{(-84,15)^2 + (108,1)^2} = 136,96 \text{ [m/s]};$$

$$|\mathbf{a}(2)| = \sqrt{(-27,02)^2 + (-84,15)^2} = 88,377 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

$$\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{a}(2) = |\mathbf{v}(2)| \cdot |\mathbf{a}(2)| \cdot \cos\alpha_2 : \quad -6819,7 = 136,96 \cdot 88,377 \cdot \cos\alpha_2$$

$$\rightarrow \cos\alpha_2 = -0,5634 \rightarrow \alpha_2 = 124,3^\circ = 2,169 \text{ rad}.$$

$[t_2 = 2$ s-ban $\mathbf{r}(2) = 108,1 \mathbf{i} + 336,6 \mathbf{j} \text{ [m]};$

a sebesség érintő irányú;

a gyorsulás az origó felé mutat, ami ebben a pillanatban a sebességre merőleges irányhoz képest „hátrafelé” van ($124,3^\circ > 90^\circ$), vagyis ebben a pillanatban lassulva kanyarodik.]

2/3. Egy kipukkadt lufi sebességét az alábbi függvény adja meg:

$$\mathbf{v}(t) = 0,2 e^{0,1t} \mathbf{i} - 2,8 \sin(4t) \mathbf{j} + (3-4t) \mathbf{k} \quad [\text{m/s}]$$

Az időt másodpercekben, a távolságot méterben mérjük.

Kipukkadásakor, $t_0 = 0$ s-ban a lufi az $\mathbf{r}_0 = 2 \mathbf{i} + 1,4 \mathbf{j} + 1,5 \mathbf{k}$ [m] pontból indult.

a) Hol lesz a lufi fél másodperc múlva?

b) A lufi egy olyan $3 \times 3 \times 3$ m-es szobában van, melynek egyik sarkához illesztettük a koordináta-rendszerünket. Mikor, melyik fal (ill. plafon v. padló) melyik pontjának megy neki először?

Megoldás

a) A $\mathbf{v}(t)$ sebesség és az \mathbf{r}_0 kiindulási koordináta ismeretében fel kell írunk az $\mathbf{r}(t)$ helyvektor függvényt, amibe majd be tudjuk helyettesíteni a megadott időpontot.

Keressük azt az $\mathbf{r}(t)$ függvényt, amire teljesül, hogy

– deriváltja a megadott $\mathbf{v}(t)$ függvény: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$ és

– helyettesítési értéke megfelel a megadott $\mathbf{r}(t^*) = \mathbf{r}^*$ feltételnek (azaz az előállítandó $\mathbf{r}(t)$ függvénybe behelyettesítve a t^* időt, meg kell kapjuk a megadott \mathbf{r}^* helyvektort). Sokszor (de nem mindig) a $t_0 = 0$ -hoz tartozó \mathbf{r}_0 van megadva, tehát $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ kell teljesülnön.

Esetünkben $t_0 = 0$ -ban $\mathbf{r}_0 = 2 \mathbf{i} + 1,4 \mathbf{j} + 1,5 \mathbf{k}$ [m], tehát

$$v_x = 0,2 e^{0,1t} \text{ (m/s)}, \quad x(t_0) = x(0) = x_0 = 2 \text{ (m)};$$

$$v_y = -2,8 \sin(4t) \text{ (m/s)}, \quad y(t_0) = y(0) = y_0 = 1,4 \text{ (m)};$$

$$v_z = (3-4t) \text{ (m/s)}, \quad z(t_0) = z(0) = z_0 = 1,5 \text{ (m)}.$$

A keresett függvényt határozott vagy határozatlan integrállal is előállíthatjuk.

Határozott integrállal:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t^*) + \int_{t^*}^t \mathbf{v}(\tau) d\tau,$$

illetve $t^* = t_0 = 0$ esetén

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau) d\tau,$$

koordinátánként

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(\tau) d\tau; \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(\tau) d\tau; \quad z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(\tau) d\tau.$$

Jelen esetben

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(\tau) d\tau = 2 + \int_0^t 0,2 e^{0,1\tau} d\tau = 2 + 0,2 \left[\frac{e^{0,1\tau}}{0,1} \right]_0^t = 2 + 2(e^{0,1t} - 1) = 2e^{0,1t};$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(\tau) d\tau = 1,4 + \int_0^t -2,8 \sin(4\tau) d\tau = 1,4 - 2,8 \left[-\frac{\cos(4\tau)}{4} \right]_0^t = \\ = 1,4 + 0,7 (\cos(4t) - 1) = 0,7 (1 + \cos(4t));$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(\tau) d\tau = 1,5 + \int_0^t (3 - 4\tau) d\tau = 1,5 + [3\tau - 2\tau^2]_0^t = 1,5 + 3t - 2t^2;$$

vektorként felírva

$$\mathbf{r}(t) = 2e^{0,1t} \mathbf{i} + 0,7(1 + \cos(4t)) \mathbf{j} + (1,5 + 3t - 2t^2) \mathbf{k} \text{ [m]}.$$

Határozatlan integrállal:

$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t) dt + \mathbf{k}$, ahol \mathbf{k} értékét abból tudjuk meghatározni, hogy

$\mathbf{r}(t^*) = \int \mathbf{v}(t) dt + \mathbf{k} = \mathbf{r}^*$ kell teljesüljön.

illetve $t^* = t_0 = 0$ esetén

$\mathbf{r}(t_0) = \int \mathbf{v}(t) dt + \mathbf{k} = \mathbf{r}_0$ kell teljesüljön.

Jelen esetben

$$x(t) = \int v_x dt + k_x = \int 0,2e^{0,1t} dt + k_x = \frac{0,2}{0,1} e^{0,1t} + k_x = 2e^{0,1t} + k_x.$$

A kezdeti feltételből tudjuk, hogy $t_0 = 0$ -ban $x(0) = x_0 = 2$ (m) kell legyen.

A függvény helyettesítési értéke $t_0 = 0$ -ban:

$$x(0) = 2e^{0,1 \cdot 0} + k_x = 2 + k_x,$$

és $x(0) = x_0 = 2$ kell legyen:

$$2 + k_x = 2 \rightarrow k_x = 0, \text{ tehát}$$

$$x(t) = 2e^{0,1t} \text{ [m].}$$

$$y(t) = \int v_y dt + k_y = \int -2,8 \sin(4t) dt + k_y = -\frac{-2,8}{4} \cos(4t) + k_y = 0,7 \cos(4t) + k_y;$$

$t_0 = 0$ -ban $y(0) = y_0 = 1,4$ (m):

$$0,7 \cos(0) + k_y = 0,7 + k_y = 1,4 \rightarrow k_y = 0,7 \text{ (m), tehát}$$

$$y(t) = 0,7 (1 + \cos(4t)) \text{ [m].}$$

$$z(t) = \int v_z dt + k_z = \int (3 - 4t) dt + k_z = (3t - 2t^2) + k_z;$$

$t_0 = 0$ -ban $z(0) = z_0 = 1,5$ (m):

$$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 + k_z = k_z = 1,5 \rightarrow k_z = 1,5 \text{ (m), tehát}$$

$$z(t) = 3t - 2t^2 + 1,5 \text{ [m].}$$

a) A kérdés az volt, hogy fél másodperc múlva hol lesz a lufi, tehát $t = 0,5$ s behelyettesítésével

$$x(0,5) = 2e^{0,05} = 2,103 \text{ (m),}$$

$$y(0,5) = 0,7 (1 + \cos(4 \cdot 0,5)) = 0,4087 \text{ (m),}$$

$$z(0,5) = 3 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,5^2 + 1,5 = 2,5 \text{ (m),}$$

a lufi az

$$\mathbf{r}(0,5) = 2,103 \mathbf{i} + 0,4087 \mathbf{j} + 2,5 \mathbf{k} \text{ (m) pontban lesz.}$$

b) A szobát határoló síkok az $x = 0$, $x = 3$ (m), $y = 0$, $y = 3$ (m), $z = 0$ és $z = 3$ (m) síkok; azt kell megvizsgálni, melyik feltétel mikor teljesül, és a legkisebb időt kiválasztani.

$$x(t_1) = 2e^{0,1t} = 0 : \text{ soha}$$

$$x(t_2) = 2e^{0,1t} = 3 : t_2 = 4,055 \text{ s}$$

$$y(t_3) = 0,7(1 + \cos(4t_3)) = 0 : t_3 = 0,7854 \text{ s}$$

$$y(t_4) = 0,7(1 + \cos(4t_4)) = 3 : \text{ soha}$$

$$z(t_5) = 3t_5 - 2t_5^2 + 1,5 = 0 : t_5 = 1,896 \text{ s}$$

$$z(t_6) = 3t_6 - 2t_6^2 + 1,5 = 3 : \text{ soha}$$

A legkisebb idő t_3 , tehát a lufi $t_3 = 0,7854$ s-ban nekimegy az $y = 0$ egyenletű falnak, mégpedig az

$$x(0,7854) = 2,163 \text{ m, } z(0,7854) = 2,622 \text{ m} \text{ koordinátájú pontjának.}$$

2/4. Egy test gyorsulása $\mathbf{a}(t) = (2t + 1) \mathbf{i} + \pi^2 \cos(3\pi t) \mathbf{j}$ [m/s²].

A $t_0 = 0$ s -ban a test sebessége $\mathbf{v}_0 = 2 \mathbf{i} + 22 \mathbf{j}$ (m/s).

Mennyi lesz $t_1 = 4$ s -ban

a) a sebesség nagysága?

b) a sebességvektornak az x tengellyel bezárt szöge?

c) Hol lesz a test $t_1 = 4$ s -ban, ha $t^* = 1$ s-ban $\mathbf{r}(1) = 22 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$ (m) ?

Megoldás

Keressük azt a $\mathbf{v}(t)$ függvényt, amire teljesül, hogy

– deriváltja a megadott $\mathbf{a}(t)$ függvény: $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t)$ és

– helyettesítési értéke megfelel a megadott $\mathbf{v}(t^*) = \mathbf{v}^*$ feltételnek (azaz az előállítandó $\mathbf{v}(t)$ függvénybe behelyettesítve a t^* időt, meg kell kapjuk a megadott \mathbf{v}^* helyvektort; speciálisan a $t_0 = 0$ -hoz tartozó \mathbf{r}_0 vektort).

$$a_x = 2t + 1 \text{ [m/s}^2\text{]} \quad t_0 = 0\text{-ban} \quad v_x = 2 \text{ (m/s);}$$

$$a_y = \pi^2 \cos(3\pi t) \text{ [m/s}^2\text{]} \quad v_y = 22 \text{ (m/s);}$$

Határozott integrállal megoldva a feladatot:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(\tau) d\tau = 2 + \int_0^t (2\tau + 1) d\tau = 2 + [\tau^2 + \tau]_0^t = 2 + t^2 + t \text{ [m/s];}$$

$$v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(\tau) d\tau = 22 + \int_0^t \pi^2 \cos(3\pi\tau) d\tau = 22 + \pi^2 \left[\frac{\sin(3\pi\tau)}{3\pi} \right]_0^t = 22 + \frac{\pi}{3} \sin(3\pi t) \text{ [m/s].}$$

Határozatlan integrállal:

$$a_x = \dot{v}_x = 2t + 1 \rightarrow v_x(t) = t^2 + t + k_{vx};$$

mivel $v_x(0) = 2$, így $0^2 + 0 + k_{vx} = 2 \rightarrow k_{vx} = 2$, tehát

$$v_x = t^2 + t + 2 \text{ [m/s].}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \pi^2 \cos(3\pi t) \rightarrow v_y(t) = \pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + k_{vy};$$

mivel $v_y(0) = 22$, így $\pi/3 \cdot \sin(0) + k_{vy} = 22 \rightarrow k_{vy} = 22$, tehát

$$v_y = \pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + 22 \text{ [m/s].}$$

A sebességvektor tehát

$$\mathbf{v}(t) = (t^2 + t + 2) \mathbf{i} + (\pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + 22) \mathbf{j} \text{ [m/s].}$$

$t_1 = 4$ s-ban a test sebessége

$$\mathbf{v}(4) = (4^2 + 4 + 2) \mathbf{i} + (\pi/3 \cdot \sin(12\pi) + 22) \mathbf{j} = 22 \mathbf{i} + 22 \mathbf{j} \text{ [m/s].}$$

Ennek

a) nagysága $|\mathbf{v}(4)| = 22 \cdot \sqrt{2} = 31,11$ (m/s);

b) az x tengellyel bezárt szöge könnyen látható, hogy 45° . Számoljuk ki ezt a szöget skalárszorozattal is!

Az x tengellyel bezárt szöget az x tengely irányát megadó \mathbf{i} egységvektorral vett skalárszorozatból számolhatjuk. \mathbf{i} egységvektor, tehát az abszolút értéke 1. (Az \mathbf{i} vektor y komponense zérus.)

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathbf{v}(4) \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{v}(4)| \cdot 1} = \frac{22 \cdot 1 + 22 \cdot 0}{22\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi = 45^\circ = \pi/4 \text{ rad.}$$

c) Az integrálásnál két részletre kell figyelni: egyrészt a megadott helyvektor most nem $t_0 = 0$ -hoz, hanem $t^* = 1$ s-hoz tartozik; másrészt a gyorsulás- és sebességvektornak csak x és y komponense volt, de a megadott helyvektornak y és z komponense van.

$$\begin{aligned} v_x &= t^2 + t + 2 \text{ [m/s]} & t^* &= 1 \text{ s-ban} & x &= 0; \\ v_y &= \pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + 22 \text{ [m/s]} & & & y &= 22 \text{ (m)}; \\ v_z &= 0 & & & z &= 2 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

Határozott integrállal:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(1) + \int_1^t v_x(\tau) d\tau = 0 + \int_1^t (\tau^2 + \tau + 2) d\tau = \\ &= \left[\frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^2}{2} + 2\tau \right]_1^t = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t \right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 2 \right) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t - \frac{17}{6} \text{ [m]}; \\ y(t) &= y(1) + \int_1^t v_y(\tau) d\tau = 22 + \int_1^t \left(22 + \frac{\pi}{3} \sin(3\pi\tau) \right) d\tau = 22 + \left[22\tau + \frac{\pi}{3} \frac{(-\cos(3\pi\tau))}{3\pi} \right]_1^t = \\ &= 22 + \left(22t - \frac{1}{9} \cos(3\pi t) \right) - \left(22 + \frac{1}{9} \right) = 22t - \frac{1}{9} \cos(3\pi t) - \frac{1}{9} \text{ [m]}; \\ z(t) &= z(1) + \int_1^t v_z(\tau) d\tau = 2 + \int_1^t 0 d\tau = 2 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Határozatlan integrállal:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^3/3 + t^2/2 + 2t + k_x; \\ t^* &= 1 \text{ s-ban } x(1) = 0: \\ x(1) &= 1^3/3 + 1^2/2 + 2 \cdot 1 + k_x = 17/6 + k_x = 0 \quad \rightarrow \quad k_x = -17/6, \text{ tehát} \\ x(t) &= t^3/3 + t^2/2 + 2t - 17/6 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= -1/9 \cdot \cos(3\pi t) + 22t + k_y; \\ t^* &= 1 \text{ s-ban } y(1) = 22 \text{ (m)}: \\ y(1) &= -1/9 \cos(3\pi \cdot 1) + 22 \cdot 1 + k_y = 1/9 + 22 + k_y = 22 \quad \rightarrow \quad k_y = -1/9, \text{ tehát} \\ y(t) &= (-1/9 \cos(3\pi t) + 22t - 1/9) \text{ [m]}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= 0 + k_z; \\ t^* &= 1 \text{ s-ban } z(1) = 2 \text{ (m)}: \\ z(0) &= k_z = 2 \quad \rightarrow \quad k_z = 2, \text{ tehát} \\ z(t) &= 2 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

A helyvektor

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^3/3 + t^2/2 + 2t - 17/6 \right) \mathbf{i} + \left(-1/9 \cos(3\pi t) + 22t - 1/9 \right) \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \text{ [m]}.$$

$t_1 = 4$ s -ban a test helyvektora

$$\mathbf{r}(4) = 34,5 \mathbf{i} + 790/9 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} = 34,5 \mathbf{i} + 87,78 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \text{ [m]}.$$

Gyakorló feladatok a zárthelyire

2/5. Ágyúgolyó röppályájának egyenlete

$$\mathbf{r}(t) = (at + b) \mathbf{i} + (ct^2 + dt + e) \mathbf{k},$$

ahol $a = 5 \text{ m/s}$, $b = 100 \text{ m}$, $c = -5 \text{ m/s}^2$, $d = 10 \text{ m/s}$, $e = 200 \text{ m}$.

- Honnan lőtték ki az ágyúgolyót? A kilövés $t = 0 \text{ s}$ -ban történt.
- Mekkora volt a kezdősebessége?
- Mekkora volt a gyorsulása?
- Mikor és hol ér földet az ágyúgolyó? A koordináta-rendszer origója a földön van.
- Mikor és hol lesz merőleges a sebesség a gyorsulásra?

Megoldás

a) $t = 0 \text{ s}$ -ban $\mathbf{r}(0) = b \mathbf{i} + e \mathbf{k} = 100 \mathbf{i} + 200 \mathbf{k} \text{ [m]}$.

b) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = a \mathbf{i} + (2ct + d) \mathbf{k} = 5 \mathbf{i} + (-10t + 10) \mathbf{k}$,

$$\mathbf{v}(0) = 5 \mathbf{i} + 10 \mathbf{k} \text{ (m/s)}, \quad v_0 = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11,18 \text{ m/s}.$$

c) $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = 2c \mathbf{k} = -10 \mathbf{k} \text{ (m/s}^2\text{)}$.

A feladat szövege szerint egy ágyúgolyó mozgásáról van szó, vagyis egy ferde hajításról. A helyvektor z komponensében a t^2 együtthatójának mégse $-g/2$ volt írva, viszont itt látjuk, hogy a test gyorsulása konstans, lefelé mutat, nagysága 10 m/s^2 , ami a szokásos közelítő érték a nehézségi gyorsulásra, csak most a képletben $-g/2$ értéke c -vel volt jelölve.

d) Vagyis: mikor éri el a $z = 0$ síkot:

$$z(t) = ct^2 + dt + e = -5t^2 + 10t + 200 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 7,403 \text{ s} \quad (\text{a másik gyök negatív lenne, } -5,403 \text{ s}).$$

e) A két vektor ott merőleges, ahol a skalárszorzatuk nulla:

$$\mathbf{v} = 5 \mathbf{i} + (-10t + 10) \mathbf{k} \quad \text{és} \quad \mathbf{a} = -10 \mathbf{k} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-10t + 10) \cdot (-10) = 100(t-1) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 1 \text{ s},$$

$$\mathbf{r}(1) = 105 \mathbf{i} + 205 \mathbf{k} \text{ [m]}.$$

Ez a pont éppen a pálya csúcspontja. Tudva azt, hogy hajításnál a gyorsulás függőleges, a kérdést úgy is átfogalmazhatjuk, hogy mikor lesz a sebességvektor éppen vízszintes, azaz mikor lesz a sebességvektor függőleges komponense zérus:

$$v_z = -10t + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 1 \text{ s}.$$

2/6. Egy test gyorsulása

$$\mathbf{a}(t) = 4a \sin(\omega t + \varphi_0) \mathbf{i} + 4b \sin \omega t \mathbf{j}, \quad \text{ahol } \omega = 2 \text{ s}^{-1}, \quad \varphi_0 = \pi/2.$$

$$t_1 = \pi/4 \text{ s-ban a test az } \mathbf{r}_1 = a \mathbf{i} - b \mathbf{j} \text{ [m]} \text{ pontban van és sebessége } \mathbf{v}_1 = 2a \mathbf{i} \text{ [m/s]}.$$

- Adjuk meg a test helyvektorát és sebességét $t_2 = 3\pi \text{ s}$ -ban!
- Milyen pályán mozog a test?
- Mely időpontokban van legközelebb a test az origóhoz?

Megoldás

a) Behelyettesítjük a konstansokat, majd integrálunk, figyelembe véve a t_1 időhöz tartozó v_1 és r_1 értékeket:

$$a_x = 4a \sin(2t + \pi/2) = 4a \cos(2t) = \dot{v}_x$$

$$\rightarrow v_x = 2a \sin(2t) + k_{vx};$$

$$t_1 = \pi/4 \text{ s-ban } v_{1x} = 2a \rightarrow k_{vx} = 0$$

$$\rightarrow v_x = 2a \sin(2t) \text{ [m/s]; } v_x = \dot{x}$$

$$\rightarrow x = -a \cos(2t) + k_x;$$

$$t_1 = \pi/4 \text{ s-ban } x_1 = a \rightarrow k_x = a$$

$$\rightarrow x = -a \cos(2t) + a \text{ [m].}$$

$$a_y = 4b \sin(2t) = \dot{v}_y$$

$$\rightarrow v_y = -2b \cos(2t) + k_{vy}$$

$$t_1 = \pi/4 \text{ s-ban } v_{1y} = 0 \rightarrow k_{vy} = 0$$

$$\rightarrow v_y = -2b \cos(2t) \text{ [m/s]; } v_y = \dot{y}$$

$$\rightarrow y = -b \sin(2t) + k_y$$

$$t_1 = \pi/4 \text{ s-ban } y_1 = -b \rightarrow k_y = 0$$

$$\rightarrow y = -b \sin(2t) \text{ [m].}$$

A sebesség

$$\mathbf{v}(t) = 2a \sin(2t) \mathbf{i} - 2b \cos(2t) \mathbf{j} \text{ [m/s],}$$

a helyvektor

$$\mathbf{r}(t) = (a - a \cos(2t)) \mathbf{i} - (b \sin(2t)) \mathbf{j} \text{ [m].}$$

a) Behelyettesítéssel $t_2 = 3\pi$ s-ban a test helyvektora

$$\mathbf{r}(3\pi) = (-a \cos(6\pi) + a) \mathbf{i} - b \sin(6\pi) \mathbf{j} = \mathbf{0} \text{ [m],}$$

sebessége

$$\mathbf{v}(3\pi) = 2a \sin 6\pi \mathbf{i} - 2b \cos 6\pi \mathbf{j} = -2b \mathbf{j} \text{ [m/s],}$$

vagyis az origóban van, és az y tengely negatív irányába mozog.

b) $x(t) = a - a \cos(2t) \rightarrow \cos(2t) = (a-x)/a$

$$y(t) = -b \sin(2t) \rightarrow \sin(2t) = -y/b$$

Felhasználva, hogy $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$: a pálya $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, ellipszis.

c) $x(t) = 0$, ha $t = k \cdot \pi$; $y(t) = 0$, ha $t = k \cdot \pi/2$;

azaz $t = k \cdot \pi$ esetén a test távolsága az origótól zérus.

2/7. Egy $m = 5$ kg tömegű test sebességét az alábbi függvény írja le:

$$\mathbf{v} = a \sin(bt) \mathbf{i} + c \sin(dt) \mathbf{j},$$

$$\text{ahol } a = -12 \text{ m/s, } b = 2 \text{ s}^{-1}, c = -2 \text{ m/s, } d = 1 \text{ s}^{-1}.$$

A test a $t = 0$ s-ban az $\mathbf{r}_0 = 9 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$ [m] pontban volt.

a) Adjuk meg a testre ható erőt az idő függvényében! (Vektorként és a nagyságát is.)

b) Adjuk meg a test helyvektorát az idő függvényében!

c) Milyen pályán mozog a test? Rajzoljuk is meg!

d) Mekkora szög zár be a sebességvektor és a gyorsulásvektor $t = \pi/2$ s-ban?

Megoldás

$$\mathbf{v} = a \sin(bt) \mathbf{i} + c \sin(dt) \mathbf{j} = -12 \sin(2t) \mathbf{i} - 2 \sin(t) \mathbf{j} \text{ [m/s]}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = ab \cos(bt) \mathbf{i} + cd \cos(dt) \mathbf{j} = -24 \cos(2t) \mathbf{i} - 2 \cos(t) \mathbf{j} \text{ [m/s}^2\text{]}; m = 5 \text{ kg}$$

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = -120 \cos(2t) \mathbf{i} - 10 \cos(t) \mathbf{j} \text{ [N]}, \text{ az abszolút értéke}$$

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{(-120 \cos(2t))^2 + (-10 \cos(t))^2} = 10 \sqrt{144 \cos^2(2t) + \cos^2(t)} \text{ [N]}$$

$$\mathbf{b) } \mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt$$

$$x(t) = \int v_x dt = \int (-12 \sin(2t)) dt = 6 \cos(2t) + k_1; \quad x_0 = 9 \text{ m};$$

$$x(0) = 6 \cos(0) + k_1 = 6 + k_1 = x_0 = 9 \quad \rightarrow \quad k_1 = 3$$

$$x(t) = 6 \cos(2t) + 3$$

$$y(t) = \int v_y dt = \int (-2 \sin(t)) dt = 2 \cos(t) + k_2; \quad y_0 = 3 \text{ m};$$

$$y(0) = 2 \cos(0) + k_2 = 2 + k_2 = y_0 = 3 \quad \rightarrow \quad k_2 = 1$$

$$y(t) = 2 \cos(t) + 1$$

tehát a test helyvektora:

$$\mathbf{r}(t) = [6 \cos(2t) + 3] \mathbf{i} + [2 \cos(t) + 1] \mathbf{j} \text{ [m]}$$

c) Az $\mathbf{r}(t)$ függvény a pálya paraméteres alakja. Jelen esetben az időt úgy tudjuk kiküszöbölni belőle, hogy

$$\text{az } x(t)\text{-ből kifejezzük } \cos(2t)\text{-t: } \cos(2t) = (x-3)/6,$$

$$\text{az } y(t)\text{-ből pedig kifejezzük } \cos(t)\text{-t: } \cos(t) = (y-1)/2,$$

és $\cos(2t)$ -t kifejezzük $\cos(t)$ -vel:

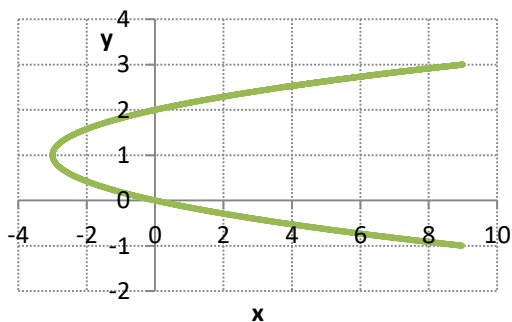
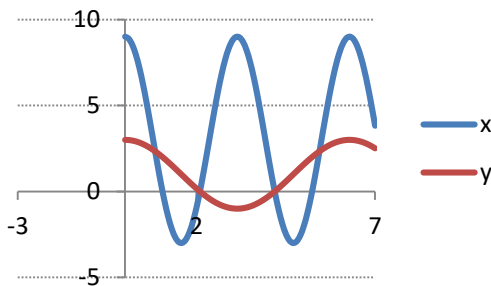
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - [1 - \cos^2(t)] = 2\cos^2(t) - 1$$

$$\text{vagyis } (x-3)/6 = 2 \cdot [(y-1)/2]^2 - 1.$$

Ebből átrendezés után kapjuk, hogy $x = 3y(y-2)$.

A pálya ennek a parabolának az a része, amire

$$-3 \leq x \leq 9 \text{ (és } -1 \leq y \leq 3 \text{)}.$$



d)

$$\mathbf{v} = a \sin(bt) \mathbf{i} + c \sin(dt) \mathbf{j} = -12 \sin(2t) \mathbf{i} - 2 \sin(t) \mathbf{j} \text{ [m/s]}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = ab \cos(bt) \mathbf{i} + cd \cos(dt) \mathbf{j} = -24 \cos(2t) \mathbf{i} - 2 \cos(t) \mathbf{j} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$\mathbf{v}(\pi/2) = -12 \sin(\pi) \mathbf{i} - 2 \sin(\pi/2) \mathbf{j} = -2 \mathbf{j} \text{ [m/s]}$$

$$\mathbf{a}(\pi/2) = -24 \cos(\pi) \mathbf{i} - 2 \cos(\pi/2) \mathbf{j} = 24 \mathbf{i} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$\mathbf{v}(\pi/2) \cdot \mathbf{a}(\pi/2) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{merőlegesek}$$

2/8. Két légy mozgásának pályafüggvénye

$$\mathbf{r}_1(t) = a t^2 \mathbf{i} + b t \mathbf{j} + c \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{i} + d t \mathbf{j} + e t^2 \mathbf{k}$$

ahol $a = 5 \text{ m/s}^2$, $b = 2 \text{ m/s}$, $c = 5 \text{ m}$, $d = -3 \text{ m/s}$, $e = 2 \text{ m/s}^2$.

a) Írjuk fel egymástól való távolságukat az idő függvényében!

b) Számítsuk ki a $t = 10 \text{ s}$ -ban a két légy sebességvektorát és sebességük nagyságát!

Megoldás

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad d(t) &= \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{(1 - at^2)^2 + (dt - bt)^2 + (et^2 - c)^2} = \sqrt{(1 - 5t^2)^2 + (-5t)^2 + (2t^2 - 5)^2} = \\ &= \sqrt{26 - 30t^2 + 54t^4} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b)} \quad \mathbf{v}_1(t) = 2at \mathbf{i} + b \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} = 10t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} \text{ [m/s];}$$

$$\mathbf{v}_1(10) = 100 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} \text{ [m/s];} \quad |\mathbf{v}_1(10)| = \sqrt{100^2 + 2^2} = 100,02 \text{ m/s.}$$

$$\mathbf{v}_2(t) = 0 \mathbf{i} + d \mathbf{j} + 2et \mathbf{k} = -3 \mathbf{j} + 4t \mathbf{k} \text{ [m/s];}$$

$$\mathbf{v}_2(10) = -3 \mathbf{j} + 40 \mathbf{k} \text{ [m/s];} \quad |\mathbf{v}_2(10)| = \sqrt{(-3)^2 + 40^2} = 40,11 \text{ m/s.}$$

2/9. Műrepülés közben két repülőgép pályája a következő pályafüggvényekkel adható meg:

$$\mathbf{r}_1(t) = a \cos 3\omega t \mathbf{j} + a \sin 3\omega t \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = 3a \cos (5\omega t + \pi) \mathbf{i} + 3a \sin (5\omega t + \pi) \mathbf{j}$$

ahol $a = 100 \text{ m}$, $\omega = 0,1 \text{ s}^{-1}$.

a) Milyen pályákon repülnek a repülőgépek?

b) Mekkora a távolság a két repülőgép között $t = 0 \text{ s}$ -ban?

Megoldás

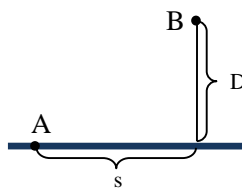
$$\mathbf{a)} \quad x_1^2 + y_1^2 = 100^2 : 100 \text{ m sugarú kör;}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = -3a \cos(5\omega t) \mathbf{i} - 3a \sin(5\omega t) \mathbf{j}; \quad x_2^2 + y_2^2 = 300^2 : 300 \text{ m sugarú kör.}$$

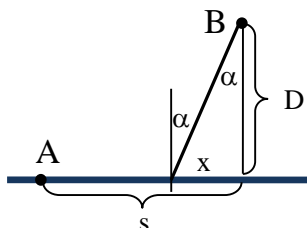
$$\mathbf{b)} \quad \mathbf{r}_1(0) = 100 \mathbf{i}; \quad \mathbf{r}_2(0) = -300 \mathbf{i}, \quad d = 400 \text{ m}$$

Egyéb feladatok (nem zh-feladatok)

2/11. Egy ember a tóparton levő A pontból a legrövidebb idő alatt szeretne a B pontba érni. Milyen útvonalat válasszon, ha a maximális futási sebessége v_f , úszási sebessége pedig v_u ?



Megoldás



Az út két szakaszból áll, először valameddig fut a parton: legyen ez az ábra jelölése szerint $s-x$, majd ott beugrik a vízbe és egyenesen a B pont felé úszik; ez az út $\sqrt{x^2 + D^2}$. A teljes idő tehát

$$t(x) = t_f + t_u = \frac{s-x}{v_f} + \frac{\sqrt{x^2 + D^2}}{v_u}$$

annak függvénye, hogy hol kezdett el úszni.

Azt az x értéket keressük, amelynél t -nek minimuma van (azaz ahol a $t(x)$ függvény deriváltja zérus):

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v_f} + \frac{x}{v_u \sqrt{x^2 + D^2}} = 0, \text{ amiből } x = \frac{v_u}{\sqrt{v_f^2 - v_u^2}} D.$$

Látszik, hogy ez csak akkor megoldás, ha $v_f > v_u$ (vagyis ha valaki gyorsabban úszik, mint ahogy fut, akkor végig csak ússzon).

[A $t(x)$ függvény második deriváltja $d^2t/dx^2 = D^2/(v_u(x^2+D^2)^{3/2}) > 0$, tehát a szélsőérték tényleg minimum.]

Ellenőrizzük még, teljesül-e, hogy $x \leq s$, azaz:

$$\frac{v_u}{\sqrt{v_f^2 - v_u^2}} D \leq s \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v_f}{v_u}\right)^2 \geq 1 + \left(\frac{D}{s}\right)^2$$

Ez automatikusan nem teljesül; ez azt jelenti, hogy ha nem tudunk ennyivel gyorsabban futni, mint úszni, akkor is végig úszni kell.

Analógia a Snellius-Descartes-törvénnyel sűrű beesés esetén: a $dt/dx = 0$ kifejezésből látható,

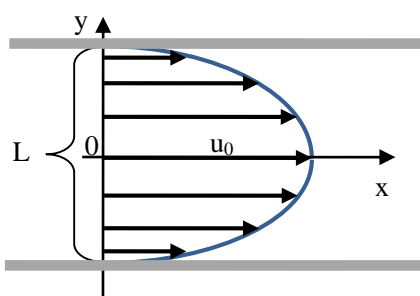
hogy $\frac{v_f}{v_u} = \frac{\sqrt{x^2 + D^2}}{x} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \alpha} = n$ (☐ a teljes visszaverődés határszöge)

2/12. Egy csónak L szélességű folyón halad át a folyóra merőlegesen a vízhez képest állandó v sebességgel. A folyó vízének sebességeloszlása parabolikus:

$$u = u_0 \left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right)$$

a) Határozzuk meg a csónak pályájának egyenletét!

b) Mennyivel viszi le a víz a csónakot, míg az egyik partról a másikra ér?



Megoldás

a) A csónak eredő sebessége mindig a pálya érintőjének irányába mutat.

$$u = dx/dt \text{ és } v = dy/dt \rightarrow (dy/dt) / (dx/dt) = v / u = dy / dx \text{ a pálya érintője.}$$

u függ y -től, tehát az alábbi differenciálegyenletet kell megoldanunk, hogy a pálya egyenletét $y(x)$ avagy $x(y)$ alakban megkapjuk:

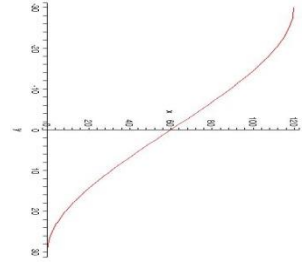
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \frac{1}{1 - \frac{4y^2}{L^2}}.$$

Szeparáljuk és integráljuk:

$$\int_{-L/2}^y \frac{u_0}{v} \left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right) dy = \int_0^x dx \rightarrow$$

$$x = \frac{u_0}{v} \left[y - \frac{4y^3}{3L^2} \right]_{-L/2}^y = \frac{u_0}{v} \left(y - \frac{4y^3}{3L^2} - \left(-\frac{L}{2} - \frac{4\left(-\frac{L}{2}\right)^3}{3L^2} \right) \right) = \frac{u_0}{v} \left(y - \frac{4y^3}{3L^2} + \right.$$

$\left. \frac{L}{3} \right)$ a pálya egyenlete.



$$\text{Vagy: } \int \frac{u_0}{v} \left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right) dy = \int dx \rightarrow x = \frac{u_0}{v} \left(y - \frac{4y^3}{3L^2} \right) + K$$

$$\text{és tudjuk, hogy } x = 0 \text{ -nál } y = -L/2: 0 = \frac{u_0}{v} \left(-\frac{L}{2} - \frac{4\left(-\frac{L}{2}\right)^3}{3L^2} \right) + K = -\frac{u_0 L}{v} + K$$

$$\text{vagyis } K = \frac{u_0 L}{v} \text{ és } x = \frac{u_0}{v} \left(y - \frac{4y^3}{3L^2} + \frac{L}{3} \right).$$

b) A csónak átér, ha $y = L/2$, ezt behelyettesítve $x = \frac{2}{3} \frac{u_0}{v} L$.

2/13. A és B város 84 km-re vannak egymástól. Két biciklis elindul egy időben, az egyikük A-ból B-be 16 km/h, a másik B-ből A-ba 12 km/h sebességgel. Egy fecske is elindul velük egy időben A városból B város felé, de amikor találkozik a B-ből jövő biciklissel, visszafordul A felé, majd amikor találkozik az A-ból jövő biciklissel, visszafordul B felé, és így tovább. Mekkora utat tesz meg a fecske a biciklisták találkozásáig? A fecske sebessége 50 km/h óra, és egy szempillantás alatt meg tud fordulni.

Megoldás

A megoldást nem úgy keressük, hogy a fecske és az egyik ill. másik biciklista találkozásának helyét és idejét számoljuk ki és a fecske által megtett utakat összegezzük, hanem a két biciklista találkozásáig eltelt összes időt számoljuk ki, mert a fecske addig végig repül, így az idő ismeretében az általa megtett út könnyebben kiszámolható.

A találkozásig eltelt idő

- az egyik biciklistához rögzített koordináta-rendszerben: mivel a biciklisták egymással szembe haladnak, a másik biciklista sebessége az origóban lévőhöz képest $16+12 = 28$ km/h, kezdetben a távolság köztük 84 km,

$$\text{tehát } t = 84 / 28 = 3 \text{ h.}$$

- az úthoz rögzített koordináta-rendszerben: az origó A városban van, az onnan induló biciklista koordinátája $x_1 = 16 t$, a B városból indulóé pedig $x_2 = 84 - 12 t$. Találkozáskor $x_1 = x_2$: $16 t = 84 - 12 t \rightarrow t = 3$ h.

A fecske által megtett út $s = 3 \cdot 50 = 150$ km.

2/14. Egy villamosvonalon a villamosok T időközönként járnak c sebességgel. A pálya mellett gépkocsi halad v sebességgel. Mennyi időközönként találkozik a gépkocsi villamosokkal?

Megoldás

Írjuk fel egy villamoshoz rögzített koordináta-rendszerben az autó sebességét:

ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek: $v_{rel} = v + c$

ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és $v > c$: $v_{rel} = v - c$

ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és $v < c$: $v_{rel} = c - v$

A villamosok távolsága egymástól $d = c \cdot T$,

ekkora távolságot kell megtenni az autónak, tehát az ehhez szükséges idő

$\Delta t = c \cdot T / (v + c)$, ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek,

$\Delta t = c \cdot T / (v - c)$, ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és $v > c$, és

$\Delta t = c \cdot T / (c - v)$, ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és $v < c$.

2/15. Lelépjük egy szekér hosszát menet közben: a szekérrel egy irányba menve 'a' lépésnek mérjük, szembe menve pedig 'b' lépésnek mérjük. Milyen hosszú a szekér?

Megoldás

A szekér sebessége v_{sz} , az emberé v_e .

Ha egy irányba mennek, akkor t_1 idő alatt ér el az ember a szekér végétől a szekér elejéig,

ezalatt $v_e t_1 = a$ (1) lépést tesz meg, és $v_e t_1 = v_{sz} t_1 + L$ (2)

Ha szembe mennek, akkor a t_2 idő alatt jut el az ember a szekér elejétől a végéhez,

ezalatt $v_e t_2 = b$ (3) lépést tesz meg, és $(v_e + v_{sz}) t_2 = L$ (4)

Ez 4 egyenlet 5 ismeretlennel, ügyesen kell rendezgetni. Pl. (1)-et behelyettesítve (2)-be

$v_{sz} t_1 = a - L$, másrészt (3)-at behelyettesítve (4)-be $v_{sz} t_2 = L - b$, és a két egyenletet elosztva

$t_1/t_2 = (a-L)/(L-b)$. Ugyanakkor (1)-et elosztva (2)-vel $t_1/t_2 = a/b$. Ezeket összevetve

$(a-L)/(L-b) = a/b$, amiből $L = \frac{2ab}{a+b}$.

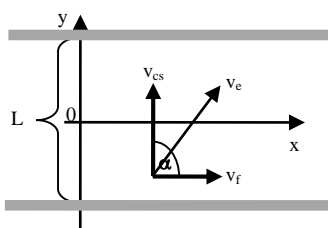
2/16. Folyóvíz sebessége 3 m/s, és van egy csónakunk, ami a vízhez képest 4 m/s sebességgel tud menni. Mekkora legyen a folyó sodrával bezárt szög, ha

a) a legrövidebb idő alatt;

b) a legrövidebb úton szeretnénk átérni a túlpartra?

Megoldás

a) A csónak orra mutasson a túlsó part felé, azaz $\alpha = 90^\circ$.



b) A csónak eredő sebessége legyen merőleges a folyó sodrára, azaz a $\beta = 138,6^\circ$.

