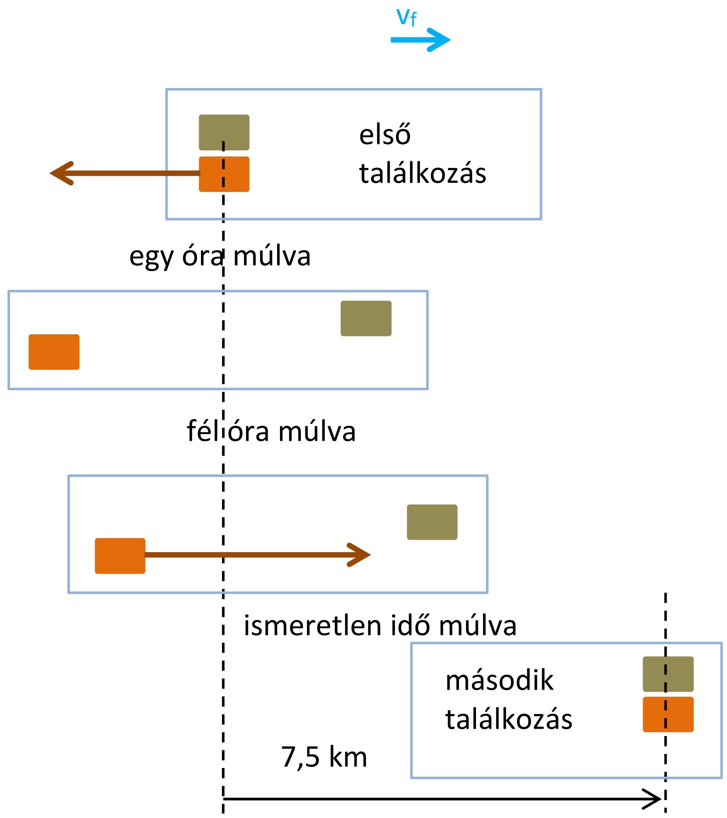
Kinematika

1/1. Egy motorcsónak a folyón felfelé halad. Szembetalálkozik egy tutajjal, majd a találkozás után egy órával elromlik a motor. A motort kikötés nélkül, a folyóval együtt sodródva fél óra alatt megjavítják. Ezután a motorcsónak a folyón – bekapcsolt motorral – lefelé megy, majd az első találkozás helyétől 7,5 km-re utoléri a tutajt.
A folyó sebessége v_f; a tutaj a folyóval együtt mozog v_f sebességgel; a motorcsónak a folyóhoz képest tetszőleges irányba tud haladni állandó v_{cs} sebességgel.
Mennyi a folyó sebessége? Mennyi a csónak sebessége?

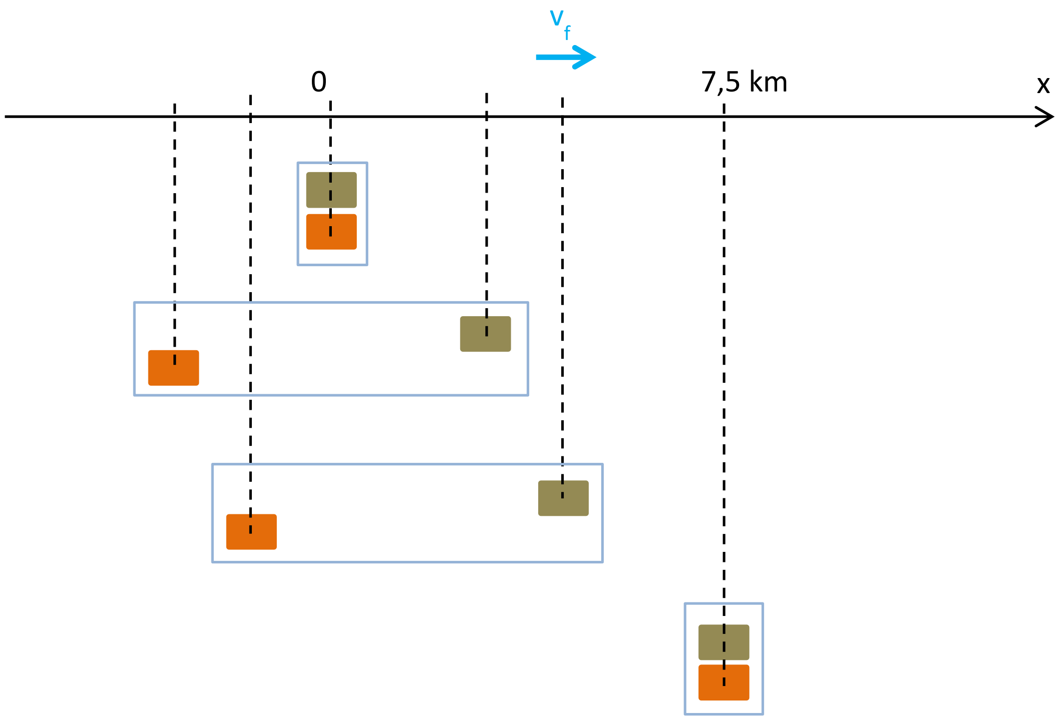


Megoldás
A feladat azt demonstrálja, hogy a **vonatkoztatási rendszer** megfelelő választásával a megoldás menete egyszerűbb is lehet. Oldjuk meg a feladatot **(1)** a parthoz rögzített, **(2)** a tutajhoz rögzített koordinátarendszerben felírva a mozgást.

A testek állandó sebességgel haladnak, az egyes szakaszon egyenletes a mozgás: $s = v\,t$

Az s út helyett az x helykoordinátát fogjuk használni, ami a test helyét adja meg.

(1) A koordinátarendszerünk x tengelyét helyezzük el a parttal párhuzamosan; origója legyen ott, ahol a motorcsónak és a tutaj először találkoznak; az x tengely mutasson arra, amerre a folyó folyik.



A folyó sebessége a <u>parthoz</u> képest v_f.
A tutaj sebessége megegyezik a folyó sebességével, tehát a <u>parthoz</u> képest v_f.
A motorcsónak sebességének nagysága a <u>folyóhoz</u> képest v_{cs}, ezért

amikor a folyón felfelé megy, akkor a <u>parthoz</u> képest $v_{cs} - v_f$ (ld. lejjebb a 2. megjegyzést);
amikor a folyón lefelé megy, akkor a <u>parthoz</u> képest $v_{cs} + v_f$;
és amikor javítják, akkor olyan, mint a tutaj, tehát sebessége a <u>parthoz</u> képest v_f.

Ezekkel a sebességekkel kiszámolhatjuk a megtett utakat. Az x koordináta felírásakor figyelembe kell venni azt is, hogy milyen irányba mozgott a test. Amikor a motorcsónak lefelé megy, akkor az x koordinátája nő, és ezért pozitív lesz az elmozdulása, de amikor felfelé megy, akkor az x tengely negatív irányába mozog, ezért negatív lesz az elmozdulása. Az elmozdulás előjeles mennyiség, az út mindig pozitív (egydimenziós mozgásnál az elmozdulás nagysága).

Írjuk fel a motorcsónak és a tutaj helyének x koordinátáját a második találkozásig:

Motorcsónak:

Az első órában a sebességének nagysága a parthoz képest $v_{cs} - v_f$ (km/h),
$t_1 = 1$ óra alatt $s_1 = (v_{cs} - v_f) \cdot t_1 = (v_{cs} - v_f) \cdot 1$ (km) utat tesz meg;
az x tengely negatív irányába halad, $\Delta x_1 = -s_1$;
az origóból indulva az $x_1 = 0 + \Delta x_1 = -(v_{cs} - v_f) \cdot 1$ (km) koordinátához érkezik.

A következő fél órában a sebességének nagysága a parthoz képest v_f (km/h),
$t_2 = 0{,}5$ óra alatt $s_2 = v_f \cdot t_2 = v_f \cdot 0{,}5$ (km) utat tesz meg;
az x tengely pozitív irányába halad, $\Delta x_2 = s_2$;
tehát az x koordinátája ennyivel nő, $x_2 = x_1 + \Delta x_2 = -(v_{cs} - v_f) \cdot 1 + v_f \cdot 0{,}5$ (km).

Az utolsó szakaszban a sebességének nagysága a parthoz képest $v_{cs} + v_f$ (km/h),
$t_3 = t^*$ óra alatt $s_3 = (v_{cs} + v_f) \cdot t^*$ (km) utat tesz meg;
az x tengely pozitív irányába halad, $\Delta x_3 = s_3$;
tehát az x koordinátája ennyivel nő, $x_3 = x_2 + \Delta x_3 = -(v_{cs} - v_f) \cdot 1 + v_f \cdot 0{,}5 + (v_{cs} + v_f) \cdot t^*$ (km).

A végén 7,5 km-rel lejjebb van a part mentén folyásirányban, tehát $x_3 = 7{,}5$ (km).

A motorcsónakra felírható egyenlet tehát

(I.) $\quad -(v_{cs} - v_f)\cdot 1 + v_f \cdot 0{,}5 + (v_{cs} + v_f)\cdot t^* = 7{,}5$ (km).

Tutaj:

$t_1 + t_2 + t_3 = 1 + 0{,}5 + t^*$ óráig halad v_f sebességgel az x tengely pozitív irányába, így jut el 7,5 km távolságra, a tutajra felírható egyenlet tehát

(II.) $\quad v_f \cdot (1 + 0{,}5 + t^*) = 7{,}5$ (km).

A 3 ismeretlenre csak 2 egyenletünk van.

Az (I.) egyenletben beszorozva, majd v_f-et és v_{cs}-t kiemelve:

$$v_f \cdot (1 + 0{,}5 + t^*) + v_{cs} \cdot (t^* - 1) = 7{,}5\ .$$

Ebből kivonhatjuk a (II.) egyenletet, és marad

$$v_{cs} \cdot (t^* - 1) = 0\ .$$

$v_{cs} = 0$ azt jelentené, hogy a csónak végig a tutaj mellett utazik.

$t^* - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad t^* = 1$ h, ennyi ideig volt lefelé bekapcsolva a csónak motorja.

Ezt visszahelyettesítve a tutajra felírt egyenletbe

$$v_f \cdot (1 + 0{,}5 + 1) = 7{,}5 \quad \rightarrow \quad v_f = 3 \text{ km/h}.$$

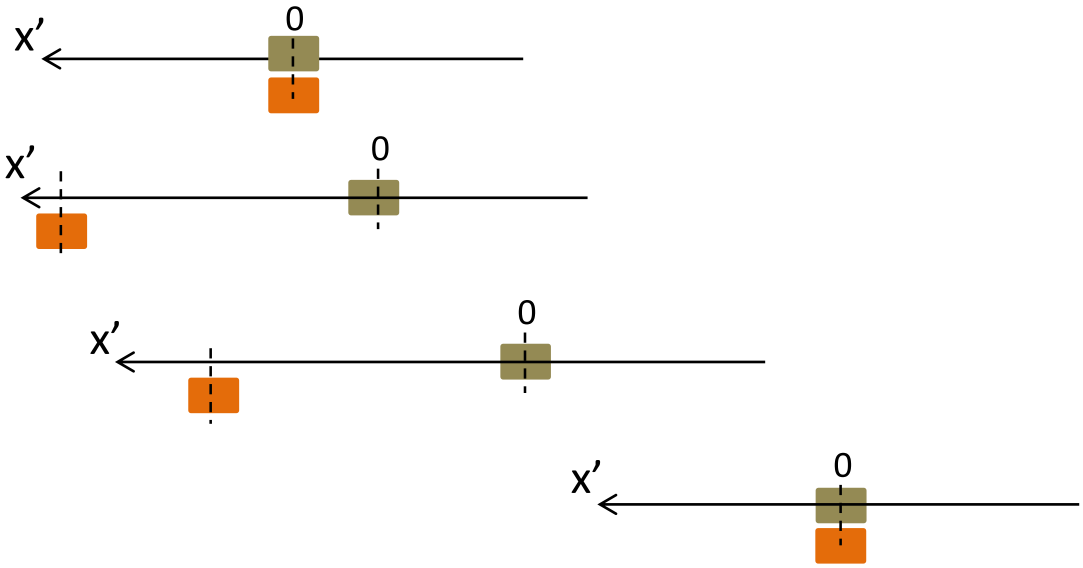
$t^* = 1$ h -t és $v_f = 3$ km/h -t visszahelyettesítve a csónak egyenletébe

$$3 \cdot (1 + 0{,}5 + 1) + v_{cs} \cdot 0 = 7{,}5$$

$$v_{cs} \cdot 0 = 0$$

$\rightarrow \quad v_{cs}$, a csónak sebessége tetszőleges lehet.

(2) Vegyünk fel egy folyóval/tutajjal együtt mozgó koordinátarendszert. Az origója legyen a tutajra rögzítve, az x’ tengely mutasson arra, amerre az első órában távolodik a csónak a tutajtól.



Ebben a vonatkoztatási rendszerben a tutaj x’ koordinátája természetesen végig zérus, és a motorcsónak x’ koordinátáját írjuk fel a második találkozásig:

Az első órában a csónak sebességének nagysága a tutajhoz képest v_{cs} (km/h),
$t_1 = 1$ óra alatt $s_1' = v_{cs} \cdot 1$ (km) utat tesz meg,
az x' tengely pozitív irányába mozog, $\Delta x_1' = s_1'$,
az $x_1' = 0 + \Delta x_1' = v_{cs} \cdot 1$ (km) koordinátához érkezik.

A következő fél órában a sebességének nagysága a tutajhoz képest 0,
tehát nem változik az x' koordinátája, $\Delta x_2' = 0$; $x_2' = x_1'$.

Az utolsó szakaszban a sebességének nagysága a tutajhoz képest v_{cs} (km/h),
$t_3 = t^*$ óra alatt $s_3' = v_{cs} \cdot t^*$ utat tesz meg,
az x' tengely negatív irányába mozog, $\Delta x_3' = -s_3'$,
az $x_3' = x_2' + \Delta x_3' = v_{cs} \cdot 1 - v_{cs} \cdot t^*$ (km) koordinátához érkezik.

A motorcsónak a végén az $x_3' = 0$ km-nél van, hiszen az $x' = 0$ a tutajra van rögzítve, tehát

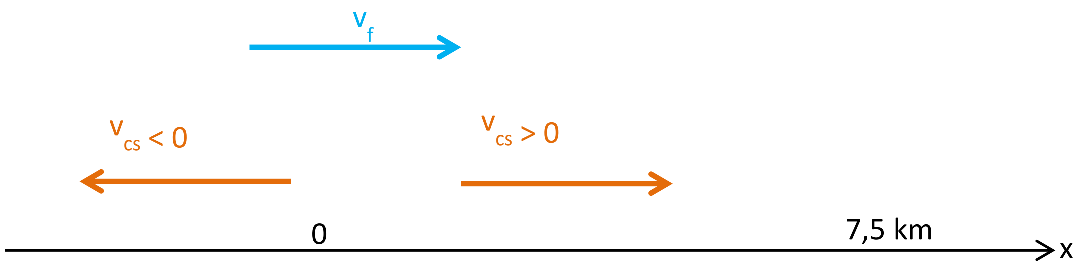
$$v_{cs} \cdot 1 + 0 - v_{cs} \cdot t^* = 0.$$

Ebből azonnal látható, hogy egyrészt mivel a csónak először 1 órán át távolodik a tutajtól v_{cs} sebességgel, és utána ugyancsak v_{cs} sebességgel közeledik hozzá, így a közeledés ideje is 1 óra; másrészt, hogy a csónak sebessége a vízhez képest tetszőleges.

Megjegyzések:

1.) Az előjeleken nem kell gondolkoznunk, ha azt a szabályt követjük, hogy minden sebességnek a felvett koordinátatengely szerint adunk előjelet. Jelen esetben v_f mindig pozitív (mert az x tengely irányát ehhez igazítottuk), a csónak sebessége pedig attól függően pozitív ill. negatív, hogy a csónak az x tengely pozitív vagy negatív irányába mozog. Az elmozdulást $\Delta x = (v_f \pm v_{cs}) \cdot t$ alakban írhatjuk fel, a megtett út az elmozdulás nagysága, tehát $s = |v_f \pm v_{cs}| \cdot t$.
A feladatban a csónak sebessége az első órában negatív, az utolsó szakaszban pozitív:

$$(v_f - v_{cs}) \cdot 1 + v_f \cdot 0{,}5 + (v_f + v_{cs}) \cdot t^* = 7{,}5 \text{ (km)}.$$



2.) A motorcsónak sebessége elvileg lehet kisebb is a folyó sebességénél. Ebben az esetben az első szakaszban a parthoz képest sodródik lefelé, a parthoz képesti sebessége pozitív, a $\Delta x_1 = (v_f - v_{cs}) \cdot t_1$ elmozdulása pozitív. Ilyenkor viszont nem teljesül az, hogy a feladat szövege szerint a „motorcsónak a folyón felfelé halad” (ami negatív elmozdulást jelent a felvett koordinátarendszerben).

3.) A motorcsónak által megtett út nagyobb, mint az elmozdulása a parthoz képest (ami 7,5 km). A megtett út $s = s_1 + s_2 + s_3$, az elmozdulás $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$.
A $t^* = 1$ h és $v_f = 3$ km/h eredményeket felhasználva jelen esetben
$s = |v_f - v_{cs}| \cdot 1 + v_f \cdot 0{,}5 + (v_f + v_{cs}) \cdot t^* = |v_f - v_{cs}| \cdot 1 + 1{,}5 + (v_f + v_{cs}) \cdot 1$ (km).
$v_{cs} > v_f$ esetén $s = -(v_f - v_{cs}) \cdot 1 + 1{,}5 + (v_f + v_{cs}) \cdot 1 = 2\, v_{cs} + 1{,}5$ (km),
$v_{cs} < v_f$ esetén $s = (v_f - v_{cs}) \cdot 1 + 1{,}5 + (v_f + v_{cs}) \cdot 1 = 2\, v_f + 1{,}5$ (km).

1/2. A és B város vízparton helyezkednek el egymástól d távolságra. Egy motorcsónakkal, ami a vízhez képest v_{cs} sebességgel tud menni, elmegyünk a part mentén először A-ból B-be, majd vissza B-ből A-ba. Megegyezik-e az oda-vissza út összes ideje, ha a víz egy folyó, ill. egy tó?

Megoldás

Ha a víz egy folyó és A-tól B felé folyik v_f sebességgel, akkor

A-ból B-be

$v_{cs} + v_f$ sebességgel halad a motorcsónak a parthoz képest, és a d távolságot

$t_{AB} = d / (v_{cs} + v_f)$ idő alatt teszi meg;

B-ből A-ba

$v_{cs} - v_f$ sebességgel halad a motorcsónak a parthoz képest ($v_{cs} > v_f$ kell legyen!), a d távolságot

$t_{BA} = d / (v_{cs} - v_f)$ idő alatt teszi meg;

tehát az összes idő

$t_{folyó} = d / (v_{cs} + v_f) + d / (v_{cs} - v_f)$.

Ha a víz egy tó, akkor az oda- ill. visszaút ideje is $t = d/v_{cs}$, tehát

$t_{tó} = 2d/v_{cs}$.

A két idő hányadosa

$$\frac{t_{folyó}}{t_{tó}} = \frac{\frac{d}{v_{cs}+v_f} + \frac{d}{v_{cs}-v_f}}{\frac{2d}{v_{cs}}} = \frac{\frac{v_{cs}-v_f+v_{cs}+v_f}{v_{cs}^2 - v_f^2}}{\frac{2}{v_{cs}}} = \frac{v_{cs}^2}{v_{cs}^2 - v_f^2} > 1,$$

tehát folyóban hosszabb idő kell, mint tóban.

Miért? Mert a folyó kevesebb <u>ideig</u> segíti a csónakot, mint akadályozza.

Az átlagsebesség csak abban az esetben egyenlő a sebességek átlagával, ha az egyes szakaszok azonos ideig tartottak.

Általános esetben ha

t_1 ideig v_1 sebességgel haladva s_1 utat, majd t_2 ideig v_2 sebességgel haladva s_2 utat tett meg a test,

akkor sebességek nagyságának átlaga $v_{átl} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2}$.

Abban az esetben, ha azonos ideig tartott a két szakasz, azaz ha $t_1 = t_2 = t$,

akkor $v_{átl} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{v_1 t+v_2 t}{t+t} = \frac{v_1+v_2}{2}$ (számtani/aritmetikai közép).

Abban az esetben, ha azonos utat tett meg a két szakaszban, azaz ha $s_1 = s_2 = s$,

akkor $v_{átl} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{s+s}{s/v_1+s/v_2} = \frac{2}{1/v_1+1/v_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}$ (harmonikus közép).

Figyelembe véve a mozgás irányát, az átlagsebesség egyenes vonalú mozgás esetén:

$v_{átl} = \Delta x / \Delta t$, ahol $\Delta x = x_{vég} - x_{kezdő}$.

Előjeles mennyiség. Pozitív, ha a végpont x koordinátája nagyobb a kezdőpont x koordinátájánál, vagyis növekvő x értékek irányába mozdult el a test; ill. negatív, ha csökkenő x értékek irányába mozdul el. Ha a mozgás végpontjaként a test visszaérkezik a kiindulópontba, akkor $v_{átl} = 0$.

(A fenti feladatban tehát a motorcsónak átlagsebessége 0.)

Térbeli mozgás esetén az átlagsebesség vektormennyiség:

$\mathbf{v}_{átl} = \Delta\mathbf{r} / \Delta t$, ahol $\mathbf{r}$ a test helyvektora, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{vég} - \mathbf{r}_{kezdő}$ az elmozdulásvektor.

1/3. Egy katica mászkál a teraszon, ami az x–y síkban fekszik. A katica helyvektorának x és y komponense:

$$x(t) = 3A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$
$$y(t) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

ahol $A = 1$ m, $T = 8$ perc.

a) Írjuk fel a katica helyvektorát az idő függvényében!
b) Adjuk meg, hol van a katica 2 perc; 4 perc; 6 perc; 8 perc; 10 perc; 15 perc; … múlva!
c) Rajzoljuk meg a katica pályáját!

Megoldás

Vektorok jelölése: Többféleképpen jelölhetjük, hogy egy mennyiség vektor, pl. $\vec{a}$, a, **a**.
A számolási gyakorlat anyagaiban a vektorokat félkövér betűk jelölik.
A helyvektor szokásos jelölése **r** (előadáson $\vec{r}$).

a) A két függvény, x(t) és y(t) kétdimenziós Descartes-féle koordinátarendszerben az időfüggő **r**(t) helyvektor x és y komponensét adja meg. Ezeket a komponenseket a megfelelő egységvektorokkal kell megszorozni.
Descartes-féle koordinátarendszer egységvektorai:
az x tengely irányában **i**, az y tengely irányában **j**, a z tengely irányában **k** (előadáson $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$).

$$\mathbf{r}(t) = 3A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathbf{i} + 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$$

(ill. az előadáson használt jelöléssel: $\vec{r}(t) = 3A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\overrightarrow{e_x} + 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_y}$)

A és T értékét behelyettesítve

$\mathbf{r}(t) = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{8}t\right)\mathbf{i} + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$ [m], ha a t időt percben mérjük, ill.

$\mathbf{r}(t) = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{480}t\right)\mathbf{i} + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{480}t+\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$ [m], ha a t időt másodpercben mérjük.

b) Az **r**(t) függvénybe behelyettesítjük megadott időpontokat. Figyeljünk arra, hogy a sin ill. cos függvény argumentuma dimenziómentes, tehát radiánban kell számolni!

r(2) = 3 **i** – 2 **j** (m);
r(4) = 0 **i** + 0 **j** (m);
r(6) = –3 **i** + 2 **j** (m);
r(8) = 0 **i** + 0 **j** (m);
r(10) = 3 **i** – 2 **j** (m);
r(15) = –2,121 **i** + 1,414 **j** (m).

c) A pálya azoknak a pontoknak az összessége, amelyeket a katica a mozgása során érint. A katica helyét az **r**(t) függvény az idő függvényében adja meg, de a pálya nem tartalmazza azt az információt, hogy az adott pontban a test mikor tartózkodik.
Az időfüggő x(t) és y(t) komponensekből az idő kiküszöbölésével állítjuk elő a pályát megadó függvényt.
Jelen esetben nem magát t-t, hanem $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$-t érdemes kifejezni:

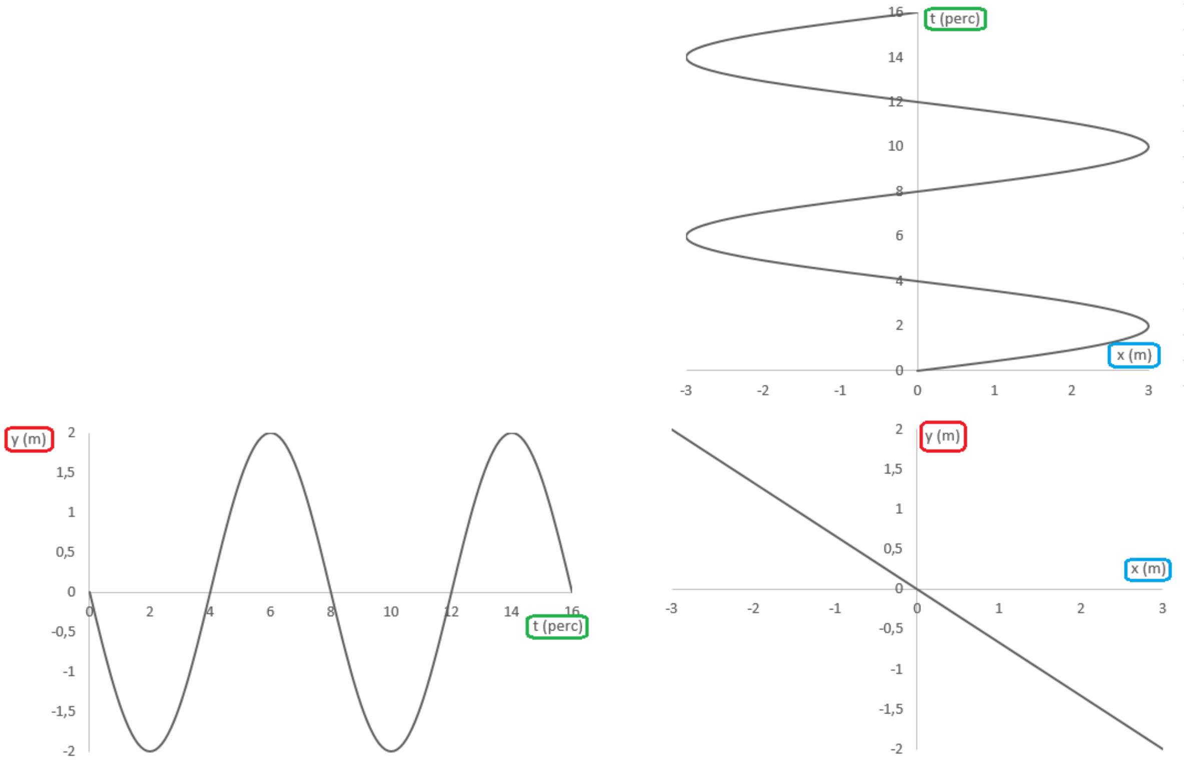
x(t)-ből $\quad \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{x}{3A}$.

y(t)-t először átalakítjuk: $y = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right) = -2A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$,

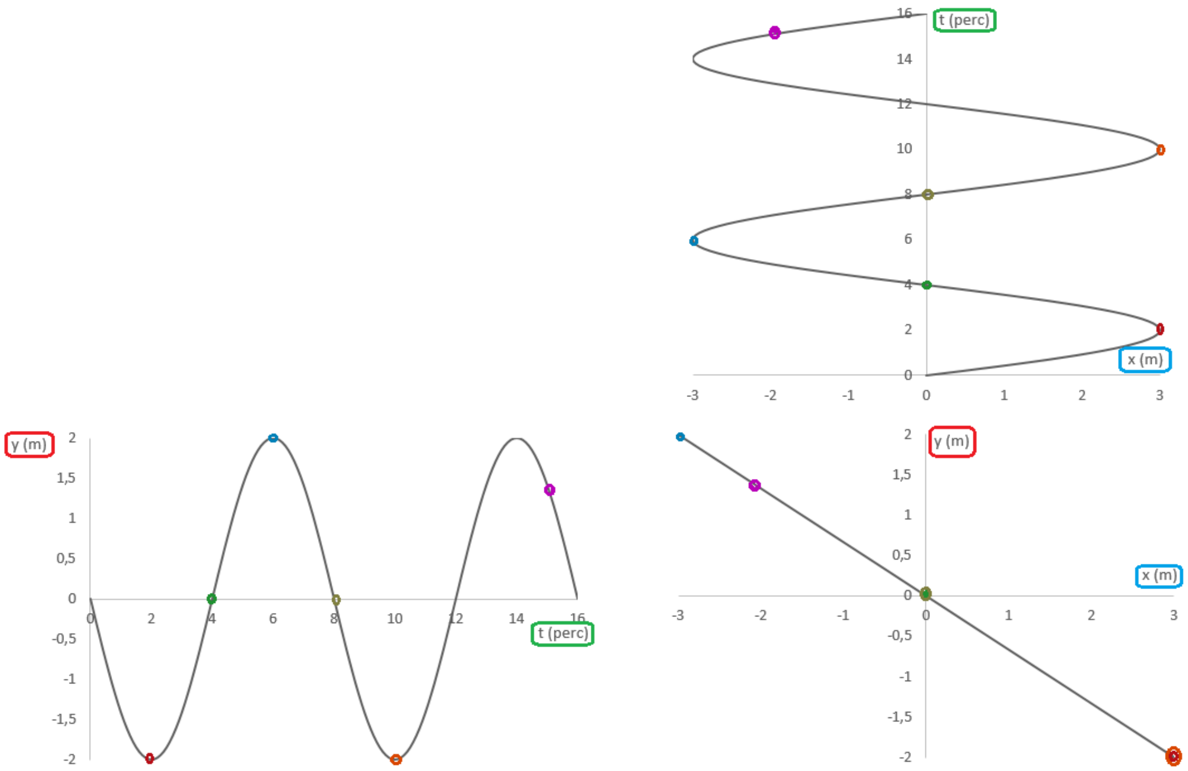
majd ebbe behelyettesítjük $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ -t x-szel kifejezve:

$y = -2A \cdot \frac{x}{3A} = -\frac{2}{3}x.$

A pálya tehát egy egyenes, de mivel x és y nem vehet fel tetszőleges értéket, ezért az $y = -2x/3$ egyenesnek csak a P_1 (–3A,2A) és P_2 (3A,–2A) pontok közötti szakasza.



Grafikusan vázolhatjuk a pályát úgy, hogy az egyes időpontokra kiszámolt x és y koordinátákat ábrázoljuk az x–y síkon, pl. itt ábrázoltuk a **b)** feladatban kiszámolt színnel azonosítható pontokat.



VEKTOROK (mely fizikai mennyiségek vektorok, melyek skalárok?)
Műveletek vektorokkal
Általánosan: szorzás skalárral; összeadás; skaláris szorzás; vektoriális szorzat.
3D Descartes-koordinátarendszerben: pl. legyen $\mathbf{a} = 1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$:

<u>**Szorzás skalárral**</u>: pl. $\lambda = 4$: $\lambda\mathbf{a} = 4\cdot(1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$.
<u>**Összeadás**</u>: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (1+4)\mathbf{i} + (-2-5)\mathbf{j} + (3-6)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
$\rightarrow$ $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$: <u>lineáris kombináció</u>; sík egyenlete.
Kivonás: $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\cdot\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, ill. $\mathbf{b}-\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$; „megváltozás”: későbbi–korábbi!

<u>**Skaláris szorzat**</u> (2 vektorhoz egy skalárt rendel)
Általánosan: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha$
– <u>merőleges</u> két vektor $\Leftrightarrow$ a skalárszorzatuk zérus;
– önmagával vett skaláris szorzat $\rightarrow$ abszolút érték $\rightarrow$ egységvektor;
– két vektor által <u>bezárt szög</u> számítása;
– egyik vektor előjeles <u>vetülete</u> a másik irányára (fizikában: pl. munka számolásánál);
– vektor <u>felbontása</u> egy másik vektorral párhuzamos és arra merőleges <u>komponensekre.</u>
Descartes-koordinátarendszerben:
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot4 + (-2)\cdot(-5) + 3\cdot(-6) = 4 + 10 - 18 = -4$;
Abszolút értékek: $|\mathbf{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \approx 3{,}742$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{16+25+36} = \sqrt{77} \approx 8{,}775$;
$\rightarrow$ <u>egységvektorok</u>: $\mathbf{e_a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{-2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$, ill. $\mathbf{e_b} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{4}{\sqrt{77}}\mathbf{i} + \frac{-5}{\sqrt{77}}\mathbf{j} + \frac{-6}{\sqrt{77}}\mathbf{k}$.
a és **b** által közbezárt szög: $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}} \approx -0{,}1218$ $\rightarrow$ $\alpha \approx 97{,}00°$.
Vetület: pl. **b** vetülete **a** irányára: $b_a = |\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-4}{\sqrt{14}}$.
b-nek **a**-val <u>párhuzamos</u> vektorkomponense (azaz **b** vetülete $\mathbf{e_a}$-ra):
$\mathbf{b_a} = \mathbf{b}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\cdot\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\cdot\mathbf{a} = -\frac{4}{\sqrt{14}^2}\cdot(1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{4}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$
és **b**-nek **a**-ra <u>merőleges</u> komponense pedig $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{b} - \mathbf{b}_\parallel = \frac{30}{7}\mathbf{i} - \frac{39}{7}\mathbf{j} - \frac{36}{7}\mathbf{k}$
(skalárszorzattal belátható, hogy $\mathbf{b}_\perp$ és **a** tényleg merőlegesek)

<u>**Vektoriális szorzat**</u> (2 vektorhoz egy vektort rendel)
Általánosan: nagysága $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha$,
iránya merőleges a két vektor által kifeszített síkra, és abba az irányba mutat, amerre jobb kezünk középső ujja mutat, ha a hüvelykujjunk mutat **a** irányába és a mutatóujjunk **b** irányába (fizikában: pl. forgatónyomaték-vektor).
<u>Párhuzamos</u> két vektor $\Leftrightarrow$ a vektoriális szorzatuk zérus.
Descartes-koordinátarendszerben:
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ = …(determináns kifejtésével)… =
$= (a_yb_z - a_zb_y)\,\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\mathbf{k} = 27\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
[belátható, hogy ez merőleges az **a** és **b** vektorok síkjára, azaz $\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_2\mathbf{b}$ -re:
$(\lambda_1+4\lambda_2)\cdot27+(-2\lambda_1-5\lambda_2)\cdot18+(3\lambda_1-6\lambda_2)\cdot3=(27-36+9)\lambda_1+(108-90-18)\lambda_2 = 0$]

2D polár – majd…

FÜGGVÉNYEK
A függvény független / függő változója skalár / vektor : PÉLDÁK!
S $\rightarrow$ S: azaz skalártól függő skalár: pl. s(t);
S $\rightarrow$ V: azaz skalártól függő vektor: pl. helyvektor **r**(t) – térgörbe paraméteres alakban $\rightarrow$ pálya;
V $\rightarrow$ S: azaz vektortól függő skalár: pl. helyzeti energia $E_{pot}(\mathbf{r})$ – szintfelületek;
V $\rightarrow$ V: azaz vektortól függő vektor: pl. áramlási tér $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ – vektorvonalak.
Homogén/inhomogén; stacionárius, statikus.