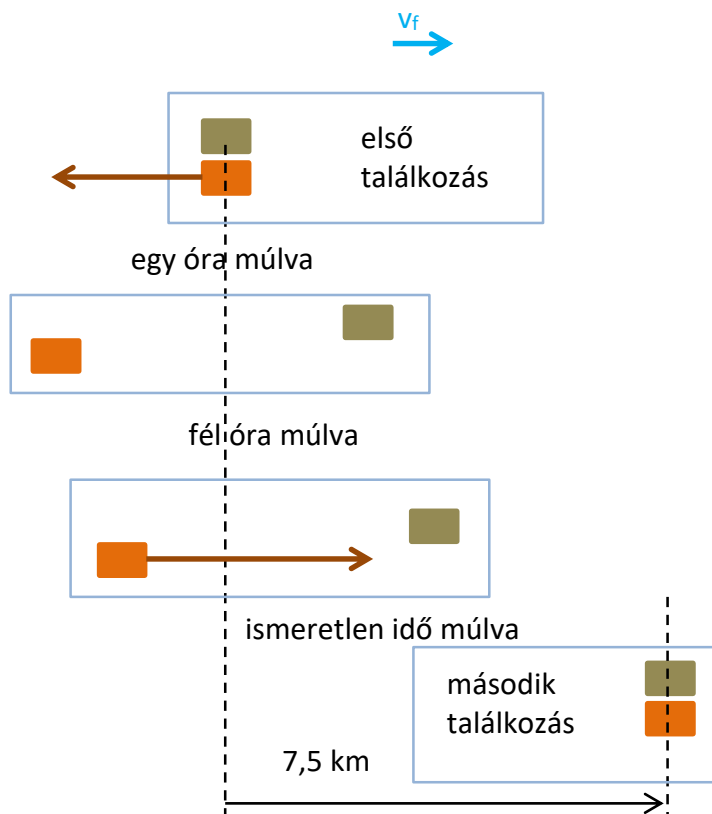


## Kinematika

**1/1.** Egy **motorcsónak** a folyón felfelé halad. Szembetalálkozik egy **tutajjal**, majd a találkozás után egy órával elromlik a motor. A motort kikötés nélkül, a folyóval együtt sodródva fél óra alatt megjavítják. Ezután a motorcsónak a folyón – bekapcsolt motorral – lefelé megy, majd az első találkozás helyétől 7,5 km-re utoléri a tutajt.

A folyó sebessége  $v_f$ ; a tutaj a folyóval együtt mozog  $v_f$  sebességgel; a motorcsónak a folyóhoz képest tetszőleges irányba tud haladni állandó  $v_{cs}$  sebességgel.

Mennyi a folyó sebessége? Mennyi a csónak sebessége?



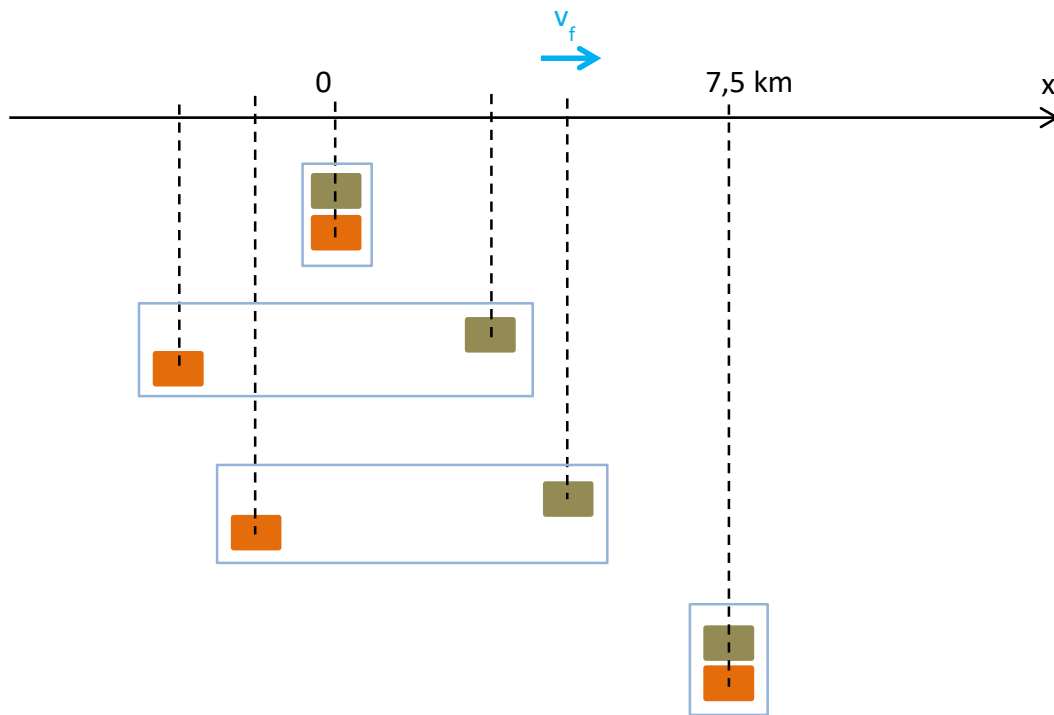
## Megoldás

A feladat azt demonstrálja, hogy a **vonatkoztatási rendszer** megfelelő választásával a megoldás menete egyszerűbb is lehet. Oldjuk meg a feladatot **(1)** a parthoz rögzített, **(2)** a tutajhoz rögzített koordinátarendszerben felírva a mozgást.

A testek állandó sebességgel haladnak, az egyes szakaszon egyenletes a mozgás:  $s = v t$

**Az  $s$  út helyett az  $x$  helykoordinátát fogjuk használni, ami a test helyét adja meg.**

**(1)** A koordinátarendszerünk  $x$  tengelyét helyezük el a parttal párhuzamosan; origója legyen ott, ahol a motorcsónak és a tutaj először találkoznak; az  $x$  tengely mutasson arra, amerre a folyó folyik.



A folyó sebessége a parthoz képest  $v_f$ .

A tutaj sebessége megegyezik a folyó sebességével, tehát a parthoz képest  $v_f$ .

A motorcsónak sebességének nagysága a folyóhoz képest  $v_{cs}$ , ezért

amikor a folyón felfelé megy, akkor a parthoz képest  $v_{cs} - v_f$  (ld. a 2. megjegyzést);

amikor a folyón lefelé megy, akkor a parthoz képest  $v_{cs} + v_f$ ;

és amikor javítják, akkor olyan, mint a tutaj, tehát sebessége a parthoz képest  $v_f$ .

Ezekkel a sebességekkel kiszámolhatjuk a megtett utakat. Az  $x$  koordináta felírásakor figyelembe kell venni azt is, hogy milyen irányba mozgott a test. Amikor a motorcsónak lefelé megy, akkor az  $x$  koordinátája nő, és ezért pozitív lesz az elmozdulása, de amikor felfelé megy, akkor az  $x$  tengely negatív irányába mozog, ezért negatív lesz az elmozdulása. Az elmozdulás előjeles mennyiség, az út mindig pozitív (egydimenziós mozgásnál az elmozdulás nagysága).

Írjuk fel a motorcsónak és a tutaj helyének  $x$  koordinátáját a második találkozásig:

Motorcsónak:

Az első órában a sebességének nagysága a parthoz képest  $v_{cs} - v_f$  (km/h),

$t_1 = 1$  óra alatt  $s_1 = (v_{cs} - v_f) \cdot t_1 = (v_{cs} - v_f) \cdot 1$  (km) utat tesz meg;

az  $x$  tengely negatív irányába halad,  $\Delta x_1 = -s_1$ ;

az origóból indulva az  $x_1 = 0 + \Delta x_1 = -(v_{cs} - v_f) \cdot 1$  (km) koordinátához érkezik.

A következő fél órában a sebességének nagysága a parthoz képest  $v_f$  (km/h),

$t_2 = 0,5$  óra alatt  $s_2 = v_f \cdot t_2 = v_f \cdot 0,5$  (km) utat tesz meg;

az  $x$  tengely pozitív irányába halad,  $\Delta x_2 = s_2$ ;

tehát az  $x$  koordinátája ennyivel nő,  $x_2 = x_1 + \Delta x_2 = -(v_{cs} - v_f) \cdot 1 + v_f \cdot 0,5$  (km).

Az utolsó szakaszban a sebességének nagysága a parthoz képest  $v_{cs} + v_f$  (km/h),

$t_3 = t^*$  óra alatt  $s_3 = (v_{cs} + v_f) \cdot t^*$  (km) utat tesz meg;

az  $x$  tengely pozitív irányába halad,  $\Delta x_3 = s_3$ ;

tehát az  $x$  koordinátája ennyivel nő,  $x_3 = x_2 + \Delta x_3 = -(v_{cs} - v_f) \cdot 1 + v_f \cdot 0,5 + (v_{cs} + v_f) \cdot t^*$  (km).

A végén 7,5 km-rel lejjebb van a part mentén folyásirányban, tehát  $x_3 = 7,5$  (km).

A motorcsónakra felírható egyenlet tehát

$$(I.) \quad -(v_{cs} - v_f) \cdot 1 + v_f \cdot 0,5 + (v_{cs} + v_f) \cdot t^* = 7,5 \text{ (km)}.$$

Tutaj:

$t_1 + t_2 + t_3 = 1 + 0,5 + t^*$  óráig halad  $v_f$  sebességgel az  $x$  tengely pozitív irányába, így jut el 7,5 km távolságra, a tutajra felírható egyenlet tehát

$$(II.) \quad v_f \cdot (1 + 0,5 + t^*) = 7,5 \text{ (km)}.$$

A 3 ismeretlenre csak 2 egyenletünk van.

Az (I.) egyenletben beszorozva, majd  $v_f$ -et és  $v_{cs}$ -t kiemelve:

$$v_f \cdot (1 + 0,5 + t^*) + v_{cs} \cdot (t^* - 1) = 7,5.$$

Ebből kivonhatjuk a (II.) egyenletet, és marad

$$v_{cs} \cdot (t^* - 1) = 0.$$

$v_{cs} = 0$  azt jelentené, hogy a csónak végig a tutaj mellett utazik.

$t^* - 1 = 0 \rightarrow t^* = 1 \text{ h}$ , ennyi ideig volt lefelé bekapcsolva a csónak motorja.

Ezt visszahelyettesítve a tutajra felírt egyenletbe

$$v_f \cdot (1 + 0,5 + 1) = 7,5 \rightarrow v_f = 3 \text{ km/h}.$$

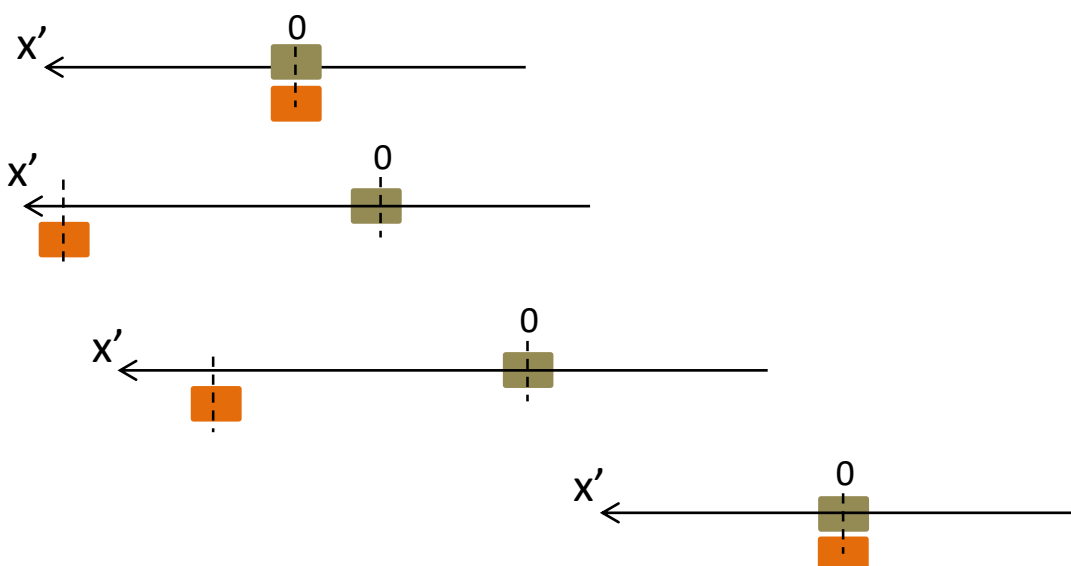
$t^* = 1 \text{ h}$  -t és  $v_f = 3 \text{ km/h}$  -t visszahelyettesítve a csónak egyenletébe

$$3 \cdot (1 + 0,5 + 1) + v_{cs} \cdot 0 = 7,5$$

$$v_{cs} \cdot 0 = 0$$

$\rightarrow v_{cs}$ , a csónak sebessége tetszőleges lehet.

**(2)** Vegyünk fel egy folyóval/tutajjal együtt mozgó koordinátarendszert. Az origója legyen a tutajra rögzítve, az  $x'$  tengely mutasson arra, amerre az első órában távolodik a csónak a tutajtól.



Ebben a vonatkoztatási rendszerben a tutaj  $x'$  koordinátája természetesen végig zérus, és a motorcsónak  $x'$  koordinátáját írjuk fel a második találkozásig:

Az első órában a csónak sebességének nagysága a tutajhoz képest  $v_{cs}$  (km/h),  
 $t_1 = 1$  óra alatt  $s_1' = v_{cs} \cdot 1$  (km) utat tesz meg,  
 az  $x'$  tengely pozitív irányába mozog,  $\Delta x_1' = s_1'$ ,  
 az  $x_1' = 0 + \Delta x_1' = v_{cs} \cdot 1$  (km) koordinátához érkezik.

A következő fél órában a sebességének nagysága a tutajhoz képest 0,  
 tehát nem változik az  $x'$  koordinátája,  $\Delta x_2' = 0$ ;  $x_2' = x_1'$ .

Az utolsó szakaszban a sebességének nagysága a tutajhoz képest  $v_{cs}$  (km/h),  
 $t_3 = t^*$  óra alatt  $s_3' = v_{cs} \cdot t^*$  utat tesz meg,  
 az  $x'$  tengely negatív irányába mozog,  $\Delta x_3' = -s_3'$ ,  
 az  $x_3' = x_2' + \Delta x_3' = v_{cs} \cdot 1 - v_{cs} \cdot t^*$  (km) koordinátához érkezik.

A motorcsónak a végén az  $x_3' = 0$  km-nél van, hiszen az  $x' = 0$  a tutajra van rögzítve, tehát  
 $v_{cs} \cdot 1 + 0 - v_{cs} \cdot t^* = 0$ .

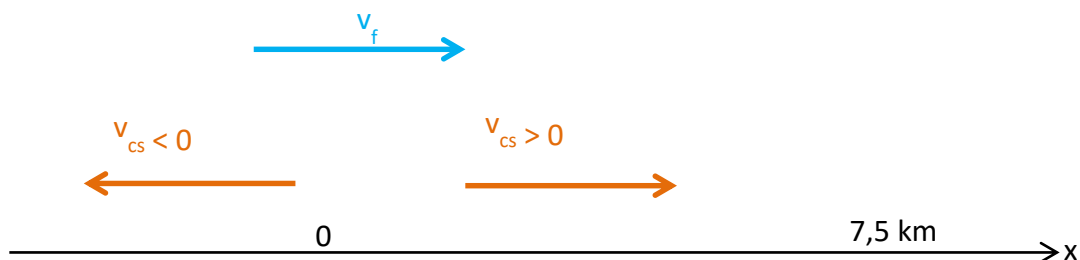
Ebből azonnal látható, hogy egyrészt mivel a csónak először 1 órán át távolodik a tutajtól  $v_{cs}$  sebességgel, és utána ugyancsak  $v_{cs}$  sebességgel közeledik hozzá, így a közeledés ideje is 1 óra; másrészt, hogy a csónak sebessége a vízhez képest tetszőleges.

#### Megjegyzések:

**1.)** Az előjeleken nem kell gondolkoznunk, ha azt a szabályt követjük, hogy minden sebességnek a felvett koordinátatengely szerint adunk előjelet. Jelen esetben  $v_f$  mindig pozitív (mert az  $x$  tengely irányát ehhez igazítottuk), a csónak sebessége pedig attól függően pozitív ill. negatív, hogy a csónak az  $x$  tengely pozitív vagy negatív irányába mozog. Az elmozdulást  $\Delta x = (v_f \pm v_{cs}) \cdot t$  alakban írhatjuk fel, a megtett út az elmozdulás nagysága, tehát  $s = |v_f \pm v_{cs}| \cdot t$ .

A feladatban a csónak sebessége az első órában negatív, az utolsó szakaszban pozitív:

$$(v_f - v_{cs}) \cdot 1 + v_f \cdot 0,5 + (v_f + v_{cs}) \cdot t^* = 7,5 \text{ (km)}.$$



**2.)** A motorcsónak sebessége elvileg lehet kisebb is a folyó sebességénél. Ebben az esetben az első szakaszban a parthoz képest sodródik lefelé, a parthoz képesti sebessége pozitív, a  $\Delta x_1 = (v_f - v_{cs}) \cdot t_1$  elmozdulása pozitív. Ilyenkor viszont nem teljesül az, hogy a feladat szövege szerint a „motorcsónak a folyón felfelé halad” (ami negatív elmozdulást jelent a felvett koordinátarendszerben).

**3.)** A motorcsónak által megtett út nagyobb, mint az elmozdulása a parthoz képest (ami  $7,5 \text{ km}$ ). A megtett út  $s = s_1 + s_2 + s_3$ , az elmozdulás  $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$ .

A  $t^* = 1 \text{ h}$  és  $v_f = 3 \text{ km/h}$  eredményeket felhasználva jelen esetben

$$s = |v_f - v_{cs}| \cdot 1 + v_f \cdot 0,5 + (v_f + v_{cs}) \cdot t^* = |v_f - v_{cs}| \cdot 1 + 1,5 + (v_f + v_{cs}) \cdot 1 \text{ (km)}.$$

$$v_{cs} > v_f \text{ esetén } s = -(v_f - v_{cs}) \cdot 1 + 1,5 + (v_f + v_{cs}) \cdot 1 = 2 v_{cs} + 1,5 \text{ (km)},$$

$$v_{cs} < v_f \text{ esetén } s = (v_f - v_{cs}) \cdot 1 + 1,5 + (v_f + v_{cs}) \cdot 1 = 2 v_f + 1,5 \text{ (km)}.$$

**1/2.** A és B város vízparton helyezkednek el egymástól  $d$  távolságra. Egy motorcsónakkal, ami a vízhez képest  $v_{cs}$  sebességgel tud menni, elmegyünk a part mentén először A-ból B-be, majd vissza B-ből A-ba. Megegyezik-e az oda-vissza út összes ideje, ha a víz egy folyó, ill. egy tó?

### Megoldás

Ha a víz egy folyó és A-tól B felé folyik  $v_f$  sebességgel, akkor

A-ból B-be

$v_{cs} + v_f$  sebességgel halad a motorcsónak a parthoz képest, és a  $d$  távolságot

$$t_{AB} = d / (v_{cs} + v_f) \text{ idő alatt teszi meg;}$$

B-ből A-ba

$v_{cs} - v_f$  sebességgel halad a motorcsónak a parthoz képest ( $v_{cs} > v_f$  kell legyen!), a  $d$  távolságot

$$t_{BA} = d / (v_{cs} - v_f) \text{ idő alatt teszi meg;}$$

tehát az összes idő

$$t_{folyó} = d / (v_{cs} + v_f) + d / (v_{cs} - v_f).$$

Ha a víz egy tó, akkor az oda- ill. visszaút ideje is  $t = d/v_{cs}$ , tehát

$$t_{tó} = 2d/v_{cs}.$$

A két idő hányadosa

$$\frac{t_{folyó}}{t_{tó}} = \frac{\frac{d}{v_{cs} + v_f} + \frac{d}{v_{cs} - v_f}}{\frac{2d}{v_{cs}}} = \frac{v_{cs} - v_f + v_{cs} + v_f}{v_{cs}^2 - v_f^2} = \frac{v_{cs}^2}{v_{cs}^2 - v_f^2} > 1,$$

tehát folyóban hosszabb idő kell, mint tóban.

Miért? Mert a folyó kevesebb ideig segíti a csónakot, mint akadályozza.

Az átlagsebesség csak abban az esetben egyenlő a sebességek átlagával, ha az egyes szakaszok azonos ideig tartottak.

Általános esetben ha

$t_1$  ideig  $v_1$  sebességgel haladva  $s_1$  utat, majd  $t_2$  ideig  $v_2$  sebességgel haladva  $s_2$  utat tett meg a test,

akkor sebességek nagyságának átlaga  $v_{átl} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$ .

Abban az esetben, ha azonos ideig tartott a két szakasz, azaz ha  $t_1 = t_2 = t$ ,

akkor  $v_{átl} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t + v_2 t}{t + t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$  (számtani/aritmetikai közép).

Abban az esetben, ha azonos utat tett meg a két szakaszban, azaz ha  $s_1 = s_2 = s$ ,

akkor  $v_{átl} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s + s}{s/v_1 + s/v_2} = \frac{2}{1/v_1 + 1/v_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$  (harmonikus közép).

Figyelembe véve a mozgás irányát, az átlagsebesség egyenes vonalú mozgás esetén:

$$v_{átl} = \Delta x / \Delta t, \text{ ahol } \Delta x = x_{vég} - x_{kezdő}.$$

Előjeles mennyiség. Pozitív, ha a végpont  $x$  koordinátája nagyobb a kezdőpont  $x$  koordinátájánál, vagyis növekvő  $x$  értékek irányába mozdult el a test; ill. negatív, ha csökkenő  $x$  értékek irányába mozdul el. Ha a mozgás végpontjaként a test visszaérkezik a kiindulópontba, akkor  $v_{átl} = 0$ .

(A fenti feladatban tehát a motorcsónak átlagsebessége 0.)

Térbeli mozgás esetén az átlagsebesség vektormennyiség:

$$v_{átl} = \Delta r / \Delta t, \text{ ahol } r \text{ a test helyvektora, } \Delta r = r_{vég} - r_{kezdő} \text{ az elmozdulásvektor.}$$

**1/3.** Egy katica mászkál a teraszon, ami az x–y síkban fekszik. A katica helyvektorának x és y komponense:

$$x(t) = 3A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$y(t) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

ahol  $A = 1$  m,  $T = 8$  perc.

a) Írjuk fel a katica helyvektorát az idő függvényében!

b) Adjuk meg, hol van a katica 2 perc; 4 perc; 6 perc; 8 perc; 10 perc; 15 perc; ... múlva!

c) Rajzoljuk meg a katica pályáját!

### Megoldás

**Vektorok jelölése:** Többféleképpen jelölhetjük, hogy egy mennyiség vektor, pl.  $\vec{a}$ ,  $\underline{a}$ ,  $\mathbf{a}$ .

A számolási gyakorlat anyagaiban a vektorokat félkövér betűk jelölik.

A helyvektor szokásos jelölése  $\mathbf{r}$  (előadáson  $\vec{r}$ ).

a) A két függvény,  $x(t)$  és  $y(t)$  kétdimenziós Descartes-féle koordinátarendszerben az időfüggő  $\mathbf{r}(t)$  helyvektor x és y komponensét adja meg. Ezeket a komponenseket a megfelelő egységvektorokkal kell megszorozni.

Descartes-féle koordinátarendszer egységvektorai:

az x tengely irányában  $\mathbf{i}$ , az y tengely irányában  $\mathbf{j}$ , a z tengely irányában  $\mathbf{k}$  (előadáson  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ).

$$\mathbf{r}(t) = 3A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathbf{i} + 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$$

(ill. az előadáson használt jelöléssel:  $\vec{r}(t) = 3A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\vec{e}_x + 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_y$ )

A és T értékét behelyettesítve

$$\mathbf{r}(t) = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{8}t\right)\mathbf{i} + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{8}t + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j} \text{ [m], ha a } t \text{ időt percben mérjük, ill.}$$

$$\mathbf{r}(t) = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{480}t\right)\mathbf{i} + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{480}t + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j} \text{ [m], ha a } t \text{ időt másodpercben mérjük.}$$

b) Az  $\mathbf{r}(t)$  függvénybe behelyettesítjük megadott időpontokat. Figyeljünk arra, hogy a sin ill. cos függvény argumentuma dimenziómentes, tehát **radiánban kell számolni!**

$$\mathbf{r}(2) = 3 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} \text{ (m);}$$

$$\mathbf{r}(4) = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} \text{ (m);}$$

$$\mathbf{r}(6) = -3 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} \text{ (m);}$$

$$\mathbf{r}(8) = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} \text{ (m);}$$

$$\mathbf{r}(10) = 3 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} \text{ (m);}$$

$$\mathbf{r}(15) = -2,121 \mathbf{i} + 1,414 \mathbf{j} \text{ (m).}$$

c) A pálya azoknak a pontoknak az összessége, amelyeket a katica a mozgása során érint. A katica helyét az  $\mathbf{r}(t)$  függvény az idő függvényében adja meg, de a pálya nem tartalmazza azt az információt, hogy az adott pontban a test mikor tartózkodik.

Az időfüggő  $x(t)$  és  $y(t)$  komponensekből az idő kiküszöbölésével állítjuk elő a pályát megadó függvényt.

Jelen esetben nem magát  $t$ -t, hanem  $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ -t érdemes kifejezni:

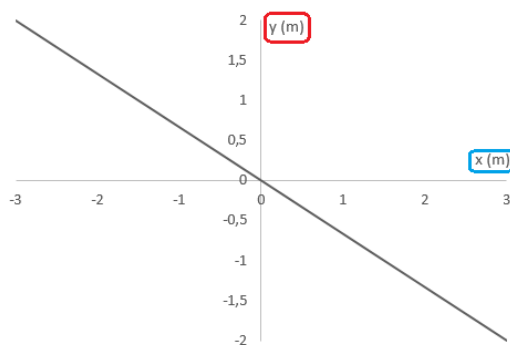
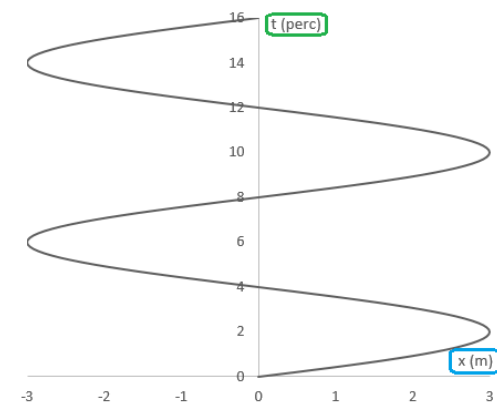
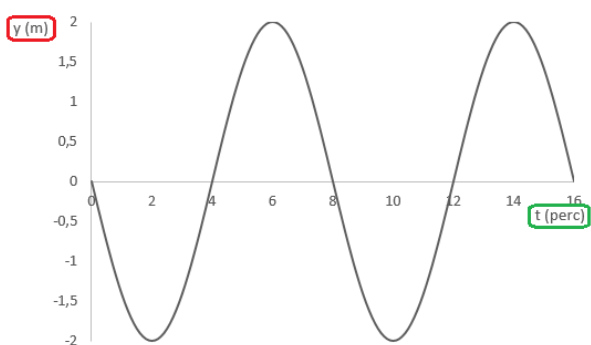
$$x(t)\text{-ből } \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{x}{3A}.$$

$$y(t)\text{-t először átalakítjuk: } y = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) = -2A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

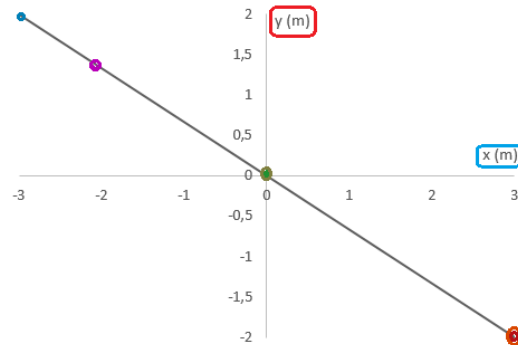
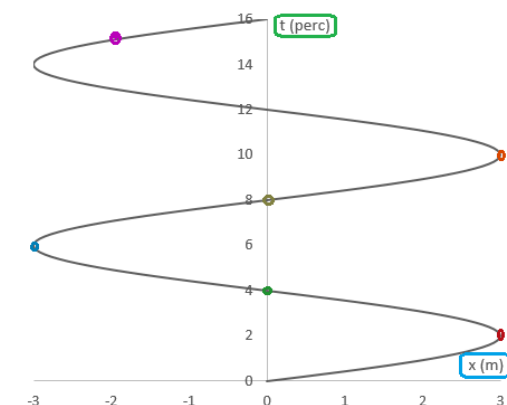
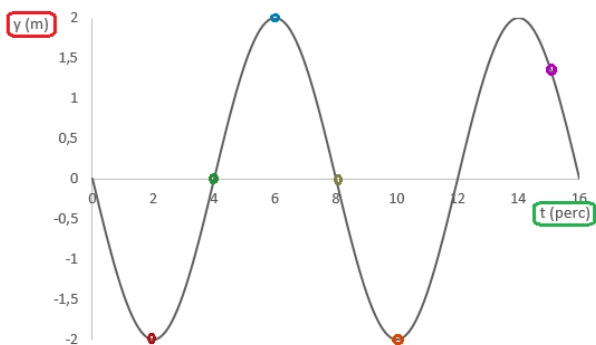
majd ebbe behelyettesítjük  $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ -t  $x$ -szel kifejezve:

$$y = -2A \cdot \frac{x}{3A} = -\frac{2}{3}x.$$

A pálya tehát egy egyenes, de mivel  $x$  és  $y$  nem vehet fel tetszőleges értéket, ezért az  $y = -2x/3$  egyenesnek csak a  $P_1(-3A, 2A)$  és  $P_2(3A, -2A)$  pontok közötti szakasza.



Grafikusan vázolhatjuk a pályát úgy, hogy az egyes időpontokra kiszámolt  $x$  és  $y$  koordinátákat ábrázoljuk az  $x$ - $y$  síkon, pl. itt ábrázoltuk a **b)** feladatban kiszámolt színnel azonosítható pontokat.



**VEKTOROK** (mely fizikai mennyiségek vektorok, melyek skalárok?)

### Műveletek vektorokkal

– általában: szorzás skalárral; összeadás; skaláris szorzás; vektoriális szorzat.

– 3D Descartes-koordináta-rendszerben

Pl. legyen  $\mathbf{a} = 1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

szorzás skalárral: pl.  $\lambda = 4$ :  $\lambda\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

összeadás:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

→  $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$ : lineáris kombináció; sík egyenlete.

kivonás:  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\cdot\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} - \mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ ; „megváltozás”: későbbi–korábbi!

skaláris szorzat (2 vektorhoz egy skalárt rendel)

általánosan:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$

– merőleges két vektor  $\Leftrightarrow$  a skalárszorzatuk zérus

– önmagával vett skaláris szorzat → abszolút érték → egységvektor

– két vektor által bezárt szög számítása

– egyik vektor előjeles vetülete a másik irányára (fizikában: pl. munka számolásánál)

– vektor felbontása egy másik vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre

**Descartes-koordináta-rendszerben:**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 + 10 - 18 = -4$$

$$\text{abszolút érték: } |\mathbf{a}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \approx 3,74$$

$$\rightarrow \mathbf{a} \text{ irányú egységvektor: } \mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$$

$$\text{közbezárt szög: } \cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}} \approx -0,122 \rightarrow \alpha \approx 97^\circ$$

$$\text{vetület: pl. } \mathbf{b} \text{ vetülete } \mathbf{a} \text{ irányára: } b_a = |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-4}{\sqrt{14}}$$

$\mathbf{b}$ -nek  $\mathbf{a}$ -val párhuzamos vektorkomponense (azaz  $\mathbf{b}$  vetülete  $\mathbf{e}_a$ -ra):

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b} \parallel = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a} = -\frac{4}{\sqrt{14}^2} \cdot (1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{4}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

$$\text{és } \mathbf{b} \text{-nek } \mathbf{a} \text{-ra merőleges komponense pedig } \mathbf{b}_\perp = \mathbf{b} - \mathbf{b}_a = \frac{30}{7}\mathbf{i} - \frac{39}{7}\mathbf{j} - \frac{36}{7}\mathbf{k}$$

(skalárszorzattal belátható, hogy  $\mathbf{b}_\perp$  és  $\mathbf{a}$  tényleg merőlegesek!)

vektoriális szorzat (2 vektorhoz egy vektort rendel)

általánosan: nagysága  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha$ ,

iránya merőleges a két vektor által kifeszített síkra, és abba az irányba mutat, ahogy jobb kezünk középső ujjja mutat, ha a hüvelykujjunk mutat  $\mathbf{a}$  irányába és a mutatóujjunk  $\mathbf{b}$  irányába

(fizikában: pl. forgatónyomaték-vektor)

párhuzamos két vektor  $\Leftrightarrow$  a vektoriális szorzatuk zérus

**Descartes-koordináta-rendszerben:**

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \dots$  (determináns kifejtésével)  $\dots =$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} = 27\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

[belátható, hogy ez merőleges az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok síkjára, azaz  $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$ -re:

$$(\lambda_1 + 4\lambda_2) \cdot 27 + (-2\lambda_1 - 5\lambda_2) \cdot 18 + (3\lambda_1 - 6\lambda_2) \cdot 3 = (27 - 36 + 9)\lambda_1 + (108 - 90 - 18)\lambda_2 = 0]$$

2D polár – majd...

### FÜGGVÉNYEK

A függvény független / függő változója skalár / vektor : PÉLDÁK!

$S \rightarrow S$ : azaz skalártól függő skalár: pl.  $s(t)$

$S \rightarrow V$ : azaz skalártól függő vektor: pl. helyvektor  $\mathbf{r}(t)$  – térgörbe paraméteres alakban  $\rightarrow$  pálya

$V \rightarrow S$ : azaz vektortól függő skalár: pl. helyzeti energia  $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$  – szintfelületek

$V \rightarrow V$ : azaz vektortól függő vektor: pl. áramlási tér  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  – vektorvonalak

homogén/inhomogén; stacionárius, statikus