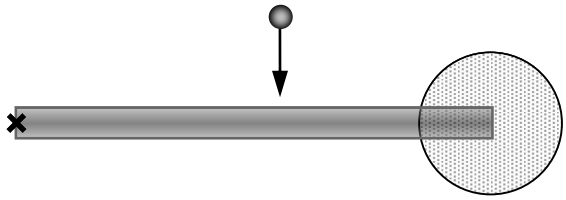
10/1. Az 1,2 m hosszú, 0,8 kg tömegű rúd végéhez egy 10 cm sugarú, 0,2 kg tömegű korongot erősítettünk az ábrán látható módon. A rúd + korong rendszer a rúd másik végén átmenő, a rúdra merőleges tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat vízszintes síkban.



a) Milyen távol van a forgástengelytől a rúd + korong rendszer tömegközéppontja?
b) Mekkora a rúd + korong rendszer tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva?
c) Az ábra szerint egy 0,1 kg tömegű pici (tömegpontnak tekinthető) gyurmagolyót lökünk neki a rúd felezőpontjának. A rúdhoz érve a gyurmagolyó sebessége 8 m/s, és az ütközéskor a rúdra tapad.
Mekkora szögsebességgel kezd forogni a rúd + korong + gyurmagolyó rendszer?

Megoldás: $m_r = 0{,}8$ kg, $\ell = 1{,}2$ m, $m_k = 0{,}2$ kg, $R = 0{,}1$ m.
a) Legyen x=0 a forgástengelynél, így a kiszámolt x_s koordináta egyenlő lesz a tengelytől vett távolsággal.
A rúd tömegközéppontja $x_r = \ell/2 = 1{,}2/2 = 0{,}6$ m -nél van, a korongé $x_k = \ell = 1{,}2$ m-nél van.

$$x_s = (x_r\, m_r + x_k\, m_k) / (m_r + m_k) = (0{,}6\cdot 0{,}8 + 1{,}2\cdot 0{,}2) / (0{,}8 + 0{,}2) = 0{,}72 \text{ m.}$$

b) A rúd a végpontja körül forog, tehát

$$\Theta_r = \frac{1}{3} m_r\, \ell^2 = \frac{1}{3}\cdot 0{,}8\cdot 1{,}2^2 = 0{,}384 \text{ kg m}^2.$$

Vagy: a rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő tengelyre $\Theta_r = \frac{1}{12} m_r\, \ell^2$,
és a tömegközéppontja x_r távolságra van a tengelytől, tehát $d_r = x_r = 0{,}6$ m; Steiner-tétellel

$$\Theta_r = \frac{1}{12} m_r\, \ell^2 + m_r\, d_r^2 = \frac{1}{12}\cdot 0{,}8\cdot 1{,}2^2 + 0{,}8\cdot 0{,}6^2 = 0{,}096 + 0{,}288 = 0{,}384 \text{ kg m}^2.$$

A korong tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő tengelyre $\Theta_{k,S} = \frac{1}{2} m_k\, R^2$,
és a tömegközéppontja x_k távolságra van a tengelytől, tehát $d_k = x_k = 1{,}2$ m; Steiner-tétellel

$$\Theta_k = \frac{1}{2} m_k\, R^2 + m_k\, d_k^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1^2 + 0{,}2\cdot 1{,}2^2 = 0{,}001 + 0{,}288 = 0{,}289 \text{ kg m}^2.$$

A rúd + korong rendszer tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{r+k} = \Theta_r + \Theta_k = 0{,}384 + 0{,}289 = 0{,}673 \text{ kg m}^2.$$

c) Impulzusmomentum-megmaradással számolhatunk.
Ütközés előtt a

rúd + korong rendszer nyugalomban van, impulzusmomentuma zérus;
az $m = 0{,}1$ kg tömegű golyó $v = 8$ m/s sebességgel mozog, úgy, hogy a sebességén átmenő egyenes távolsága a forgástengelytől $k = \ell/2 = 0{,}6$ m, tehát az impulzusmomentuma
$L = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}| = mvk = 0{,}1\cdot 8\cdot 0{,}6 = 0{,}48 \text{ kg m}^2/\text{s}$;
ennyi az össz-impulzusmomentum az ütközés előtt, $L_{előtt} = 0{,}48 \text{ kg m}^2/\text{s}$.

Ütközés után a rúd + korong + gyurmagolyó rendszer forgó mozgást végez,

$$L_{után} = \Theta_{r+k+g}\, \omega.$$

A **b)**-ben kiszámolt Θ_{r+k} tehetetlenségi nyomatékhoz hozzá kell adni a gyurmagolyó tehetetlenségi nyomatékát.
Az $m_g = 0{,}1$ kg tömegű golyó (tömegpont) távosága a tengelytől $d_g = \ell/2 = 0{,}6$ m.

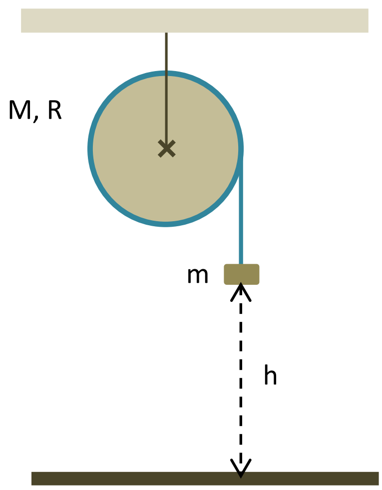
$$\Theta_{r+k+g} = \Theta_{r+k} + \Theta_g = \Theta_{r+k} + m_g\, d_g^2 = 0{,}673 + 0{,}1\cdot 0{,}6^2 = 0{,}673 + 0{,}036 = 0{,}709 \text{ kg m}^2/\text{s}.$$

Tehát

$$L_{előtt} = L_{után}: \quad mvk = \Theta_{r+k+g}\, \omega$$

$$0{,}48 = 0{,}709\, \omega \quad \rightarrow \quad \omega = 0{,}6770 \text{ s}^{-1}.$$

10/2. M tömegű, R sugarú csigára feltekert fonálon m tömegű teher függ a földtől h magasságban. Elengedve milyen végsebességgel érkezik le? A kötél nem csúszik meg a csigán, a csiga súrlódása elhanyagolható.



Megoldás

A súrlódás elhanyagolható, ezért a csiga + teher rendszerre érvényes az energia-megmaradás. A csiga + teher rendszer mechanikai energiája tartalmazza a teher helyzeti és kinetikus energiáját, és a csiga forgási kinetikus energiáját:

$$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin,tr} + E_{kin,forg} = mgz + ½mv^2 + ½\Theta\omega^2 = \text{konst.}$$

Kezdetben

a kinetikus energia zérus, $E_{kin,tr,0} = E_{kin,forg,0} = 0$;

a potenciális energia zérus pontját a földre felvéve $E_{pot,0} = mgh$.

A földre érkezve

$E_{pot,1} = 0$;

az m tömegnek v sebessége van: $E_{kin,tr,1} = ½mv^2$,

a csigának ω szögsebessége van: $E_{kin,forg,1} = ½\Theta\omega^2$;

tehát az energia-megmaradás:

$$mgh + 0 + 0 = 0 + ½mv^2 + ½\Theta\omega^2.$$

Ha a kötél nem csúszik meg a csigán, akkor a csiga szögsebessége és az m tömeg, azaz a kötél sebessége között érvényes, hogy $\omega = v/R$.

A csiga egy korong (henger), aminek a tehetetlenségi nyomatéka a közepén átmenő tengelyre $\Theta = ½MR^2$.

Ezeket behelyettesítve a forgási kinetikus energiába

$$E_{kin,forg,1} = ½\Theta\omega^2 = ½\,(½\,MR^2)\,(v/R)^2 = \ldots = ½\,(M/2)\,v^2 .$$

Tehát $\quad mgh = ½\,mv^2 + ½\,(M/2)\,v^2 = ½\,(m + M/2)\,v^2$

$$\rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{m}{m+M/2}\,2gh}\,.$$

10/3.

a) Mekkora gyorsulással gördül le egy α hajlásszögű és s hosszúságú lejtőn egy R sugarú

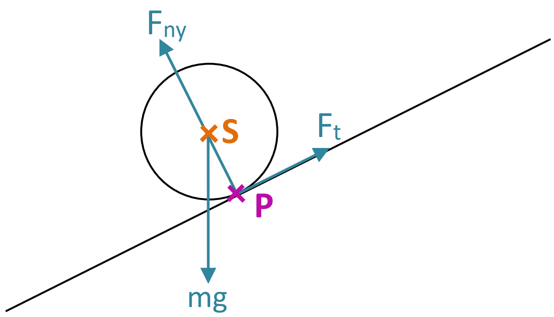
[A] henger;

[B] golyó;

[C] hengerpalást?

b) Mekkora lesz a sebességük a lejtő alján, ha a lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indulnak?

c) Miért térnek el ezek a sebességek a súrlódásmentesen lecsúszó test sebességétől?



Megoldás

a) A lejtőn legördülő testre hat

az m**g** gravitációs erő,

a lejtő $\mathbf{F}_{ny}$ nyomóereje,

és egy $\mathbf{F}_t$ tapadási súrlódási erő a lejtőn felfelé

a test és a lejtő érintkezésénél.

Felírhatjuk

– egyrészt a tömegközéppont-tételt:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F}_t$$

$\rightarrow$ a lejtő síkjával párhuzamosan $\quad ma = mg\sin\alpha - F_t \quad (1)$;

– másrészt az impulzusmomentum-tételt:

$$M = \Theta\beta.$$

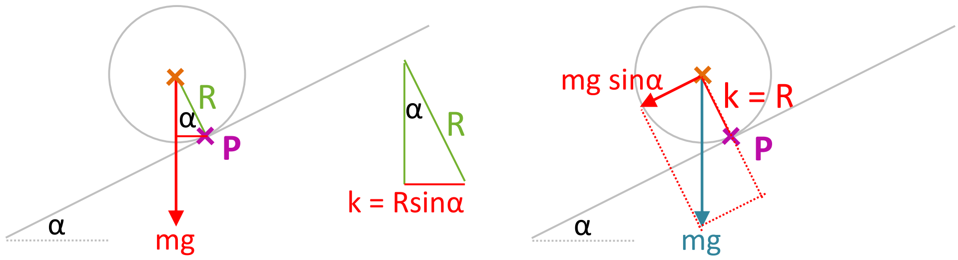
Utóbbit felírhatjuk

vagy az S tömegközépponton átmenő tengelyre; ekkor mivel **mg** és $\mathbf{F_{ny}}$ átmennek a tömegközépponton, arra a pontra forgatónyomatéka csak $\mathbf{F_t}$-nek van:

$\Theta_S\,\beta = F_t R$ (2A), itt Θ_S a test tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka;

vagy a test és a lejtő P érintkezési pontján átmenő tengelyre; ekkor mivel $\mathbf{F_{ny}}$ és $\mathbf{F_t}$ átmennek azon a ponton, forgatónyomatéka csak m**g**-nek van, mégpedig M = mg R sinα, tehát

$\Theta_P\,\beta = mg R \sin\alpha$ (2B), itt Θ_P a Steiner-tétel szerint $\Theta_P = \Theta_S + mR^2$.



Ha a test tisztán gördül (nem csúszik meg), akkor $a = R\beta$ (3).

A legördülő test tömegközéppontjának gyorsulását kifejezhetjük a (2B)+(3), vagy az (1)+(2A)+(3) egyenletekből:

(3): $a = R\beta \rightarrow \beta = a/R$;

(2B): $\Theta_P\,\beta = (\Theta_S + mR^2)\,a/R = mg R \sin\alpha \quad\rightarrow\quad a = \dfrac{mR^2\, g \sin\alpha}{\Theta_S + m R^2} = \dfrac{g \sin\alpha}{\frac{\Theta_S}{m R^2} + 1}$;

vagy

(2A): $\Theta_S\beta = F_t R \rightarrow F_t = \Theta_S\, a/R^2$;

(1): $ma = mg\sin\alpha - F_t = mg\sin\alpha - \Theta_S\, a/R^2 \quad\rightarrow\quad a = \dfrac{g\sin\alpha}{1 + \frac{\Theta_S}{m R^2}}$.

A tömegközépponton átmenő tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok (ld. a bevezetőben):

[A] hengerre $\Theta_{henger} = 1/2\, mR^2 \quad\rightarrow\quad a_{henger} = 2/3\, g \sin\alpha$;

[B] gömbre $\Theta_{gömb} = 2/5\, mR^2 \quad\rightarrow\quad a_{gömb} = 5/7\, g \sin\alpha$;

[C] hengerpalástra $\Theta_{hengerpalást} = mR^2 \quad\rightarrow\quad a_{hengerpalást} = 1/2\, g \sin\alpha$.

(Minél nagyobb a test tehetetlenségi nyomatéka, annál kisebb lesz a gyorsulása.)

b) A lejtő hossza s: $s = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow t = \sqrt{2s/a}$ és $v = at = a\sqrt{2s/a} = \sqrt{2as}$, vagyis

[A] hengerre $v_{henger} = \sqrt{\frac{4}{3} g\, s \sin\alpha}$, [B] gömbre $v_{gömb} = \sqrt{\frac{10}{7} g\, s \sin\alpha}$,

[C] hengerpalástra $v_{hengerpalást} = \sqrt{g\, s \sin\alpha}$;

illetve a lejtő h magasságával kifejezve ($h = s \sin\alpha$)

[A] hengerre $v_{henger} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$, [B] gömbre $v_{gömb} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$,

[C] hengerpalástra $v_{hengerpalást} = \sqrt{gh}$.

c) A súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége a lejtő alján $v = \sqrt{2g\, s \sin\alpha} = \sqrt{2gh}$, a gördülő testek végsebessége ennél kisebb lesz. Az energia-megmaradás viszont teljesül, mert a gördülő testeknek forgási kinetikus energiájuk is van: $E_{kin,forg} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$.

Ekkor tehát $E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} + E_{kin,forg}$ = konst., amit felírhatunk úgy is, hogy $\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} + \Delta E_{kin,forg} = 0$:

$-mg\, s \sin\alpha + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = 0$.

Ellenőrizhetjük pl. a henger esetében:

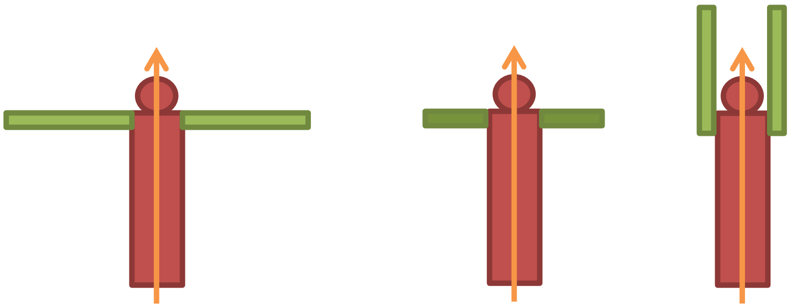
$\Delta E_{pot} = -mg\, s \sin\alpha$;

$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\,(\frac{4}{3} g\, s \sin\alpha) = \frac{2}{3} mg\, s \sin\alpha$;

$\Delta E_{kin,forg} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$; mivel a testek tisztán gördülnek, ezért $\omega = v/R \rightarrow$

$\Delta E_{kin,forg} = \frac{1}{2}\Theta(v/R)^2 = \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2} mR^2)\,\dfrac{\frac{4}{3} g\, s \sin\alpha}{R^2} = \frac{1}{3} mg\, s \sin\alpha$.

10/4. A Mikulás vízszintesen kitárt karral piruettezni kezdett a jégen.
Mennyire változik meg a forgásának a szögsebessége, ha
a) a karjait továbbra is vízszintesen tartva könyökben vízszintesen visszahajtja?
b) a karjait függőlegesbe fordítja (a válla körül, a törzs-hengerének szélénél)?
A Mikulás homogén sűrűségű, a tömege 150 kg.
Törzsét + lábait + nagykabátját tekintsük 16 cm sugarú, 150 cm magas hengernek,
fejét egy ezen levő 12 cm sugarú gömbnek,
karjait a henger tetejénél, annak szélétől kiinduló 5 cm sugarú, 60 cm hosszú hengereknek.
A Mikulás könyöke a karja közepénél van.
Kinyújtott vízszintes karral a szögsebessége 12,0 s^{-1}.



Megoldás:
Ha piruettezés közben a Mikulás a karját behajlítja vagy függőlegesbe fordítja, a Mikulás összes impulzusmomentuma nem változik meg, mivel a karok mozgatása belső erő hatására történik, közben a külső erők forgatónyomatéka zérus, tehát $L = \text{konst.}$, azaz $\Theta\,\omega = \text{konst.}$
Mivel megváltozik a Mikulás alakja, a karjának félbehajlításával ill. függőlegesbe fordításával azok összességében közelebb kerülnek a forgástengelyhez, ezért a tehetetlenségi nyomatéka lecsökken, és így a szögsebessége megnő.
Először ki kell számolni a tehetetlenségi nyomatékot a kiinduló és a két megváltozott alakra.

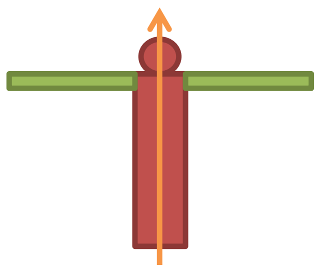
A Mikulás térfogata
$$V = V_{törzs} + V_{fej} + 2V_{kar} = 0{,}16^2\pi\cdot1{,}50 + (4/3)\cdot0{,}12^3\pi + 2\cdot(0{,}05^2\pi\cdot0{,}60) = 0{,}1206+0{,}0072+2\cdot0{,}0047 = 0{,}1373\ m^3,$$
a sűrűsége
$$\rho = m / V = 150 / 0{,}1373 = 1092{,}5\ kg/m^3,$$
az egyes részeinek a tömege:
törzs $m_{törzs} = \rho\cdot V_{törzs} = 1092{,}5\cdot0{,}1206 = 131{,}8$ kg,
fej $m_{fej} = \rho\cdot V_{fej} = 1092{,}5\cdot0{,}0072 = 7{,}908$ kg,
egy-egy kar $m_{kar} = \rho\cdot V_{kar} = 1092{,}5\cdot0{,}0047 = 5{,}148$ kg.

A Mikulás törzsének és fejének helyzete nem változik, ezek tehetetlenségi nyomatéka mindhárom esetben ugyanannyi.

- Mikulás törzse egy henger, ami a szimmetriatengelye körül forog;
  henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére $\Theta_{henger} = \frac{1}{2}mR^2$;
  $m_{törzs} = 131{,}8$ kg, $R_{törzs} = 16$ cm $= 0{,}16$ m,
  tehát $\Theta_{törzs} = 0{,}5\cdot131{,}8\cdot0{,}16^2 = 1{,}687\ kgm^2$.

- Mikulás feje egy gömb,
  gömb tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére $\Theta_{gömb} = \frac{2}{5}mR^2$;
  $m_{fej} = 7{,}908$ kg, $R_{fej} = 5$ cm $= 0{,}05$ m,
  tehát $\Theta_{fej} = 0{,}4\cdot7{,}908\cdot0{,}05^2 = 0{,}0455\ kgm^2$.

Ha a Mikulás karja vízszintesen ki van nyújtva, akkor egy-egy karja egy-egy hosszú vékony henger, ami a henger szimmetriatengelyére merőleges tengely körül forog, ezért a henger ilyenkor rúdnak tekintendő!

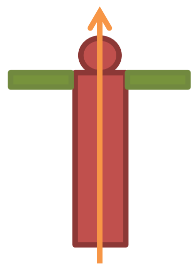


A rúd felezőpontján átmenő tengelyre $\Theta_s = \frac{1}{12} ML^2$, és mivel a forgástengely nem a rúd felezőpontján megy keresztül, ehhez hozzá kell adni egy Steiner-tagot.
A Steiner-tagba a rúd tömegközéppontja és a forgástengely közötti d távolságot kell beírni. Itt most ez a rúd hosszának a fele ($\frac{1}{2}L_{kar}$ = 30 cm) és még az a távolság, amilyen távol a karok végpontjai vannak a forgástengelytől, ami éppen a törzs sugara ($R_{törzs}$ = 16 cm), vagyis az eltolás
$d = R_{törzs} + \frac{1}{2}L_{kar}$ = 30+16 = 46 cm = 0,46 m,
tehát $\Theta_{kar,\,vizsz} = \frac{1}{12} m_{kar} L_{kar}^2 + m_{kar} d^2 = 5{,}148 \cdot 0{,}6^2/12 + 5{,}148 \cdot 0{,}46^2 = 1{,}244 \text{ kgm}^2$.

Kinyújtott vízszintes karral Mikulás tehetetlenségi nyomatéka összesen

$\Theta_1 = \Theta_{törzs} + \Theta_{fej} + 2\,\Theta_{kar,\,vizsz} = 1{,}687 + 0{,}0455 + 2 \cdot 1{,}244 = 4{,}220 \text{ kgm}^2$.

a) Ha a Mikulás karja vissza van hajtva, akkor egy-egy kar két-két olyan hengernek tekinthető, aminek a tömege $\frac{1}{2}m_{kar}$ = 2,574 kg és a hossza $\frac{1}{2}L_{kar}$ = 30 cm = 0,30 m.



Mindkét rész úgy forog, hogy a vége a forgástengelytől 16 cm-re van, vagyis a részek tömegközéppontjának a távolsága a forgástengelytől
$d' = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}L_{kar}) + R_{törzs}$ = 15+16 = 31 cm = 0,31 m,
tehát egy fél kar tehetetlenségi nyomatéka

$\Theta_{fél\ kar} = 2{,}574 \cdot 0{,}3^2/12 + 2{,}574 \cdot 0{,}31^2 = 0{,}2475 \text{ kg m}^2$.

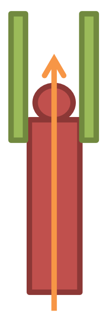
Félbehajtott vízszintes karral a Mikulás tehetetlenségi nyomatéka összesen

$\Theta_2 = \Theta_{törzs} + \Theta_{fej} + 4\,\Theta_{fél\ kar} = 1{,}687 + 0{,}0455 + 4 \cdot 0{,}2475 = 2{,}722 \text{ kgm}^2$.

Kinyújtott karral Mikulás szögsebessége $\omega_1 = 12{,}0 \text{ s}^{-1}$ volt.
A félbehajtott karral forgó Mikulás ω_2 szögsebessége kiszámolható az impulzusmomentum-megmaradást felírva:

$\Theta_1\,\omega_1 = \Theta_2\,\omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \Theta_1 / \Theta_2 \cdot \omega_1 = 4{,}220/2{,}722 \cdot 12{,}0 = 18{,}6 \text{ s}^{-1}$.

b) Ha a Mikulás karja függőleges, akkor a karok tehetetlenségi nyomatéka hengerként számolandó, mivel a karoknak megfelelő hengerek szimmetriatengelye párhuzamos a Mikulás forgástengelyével. Viszont a két tengely el van tolva akkora távolsággal, ami Mikulás forgástengelye (azaz a törzsnek megfelelő henger szimmetriatengelye) és a kar szimmetriatengelye közötti távolság:



$d'' = R_{törzs} + R_{kar}$ = 21 cm = 0,21 m;

$\Theta_{henger} = \frac{1}{2}mR^2$; m_{kar} = 5,148 kg, R_{kar} = 5 cm = 0,05 m,

tehát egy kar tehetetlenségi nyomatéka

$\Theta_{kar,függ} = 0{,}5 \cdot 5{,}148 \cdot 0{,}05^2 + 5{,}148 \cdot 0{,}21^2 = 0{,}2335 \text{ kgm}^2$.

Kinyújtott függőleges karral a Mikulás tehetetlenségi nyomatéka összesen

$\Theta_3 = \Theta_{törzs} + \Theta_{fej} + 2\,\Theta_{kar,függ} = 1{,}687 + 0{,}0455 + 2 \cdot 0{,}2335 = 2{,}200 \text{ kgm}^2$.

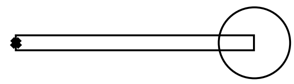
A függőleges karral forgó Mikulás ω_3 szögsebessége kiszámolható az impulzusmomentum-megmaradást felírva:

$\Theta_1\,\omega_1 = \Theta_3\,\omega_3 \quad \rightarrow \quad \omega_3 = \Theta_1 / \Theta_3 \cdot \omega_1 = 4{,}220/2{,}200 \cdot 12{,}0 = 23{,}0 \text{ s}^{-1}$.

Látható, hogy ahogy egyre kisebb lett a Mikulás tehetetlenségi nyomatéka, úgy nőtt a szögsebessége.

Gyakorló feladatok a zh-ra

10/5. A 0,8 m hosszú, 0,6 kg tömegű rúd végéhez egy 10 cm sugarú, 0,2 kg tömegű korongot erősítettünk az ábrán látható módon. A rúd+korong a másik végén átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat.



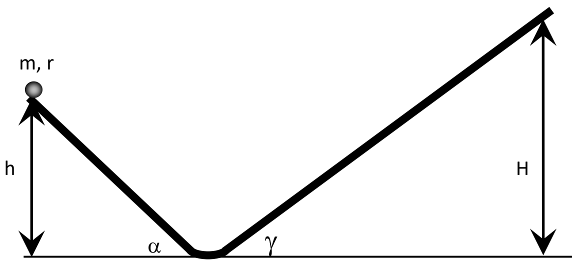
a) Hol van a rúd+korong tömegközéppontja?
b) Mekkora a rúd+korong tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva?
A tehetetlenségi nyomatékok: rúd felezőpontjára $\Theta_{rúd} = 1/12\ m\ell^2$, a korong középpontjára $\Theta_{korong} = ½\ Mr^2$.
c) Mekkora szöggyorsulással indul a rúd+korong, ha vízszintes helyzetből elengedjük?
d) Mekkora lesz a rúd+korong szögsebessége a függőleges helyzeten való áthaladáskor?

Megoldás
a) A forgástengelytől mérve $x_s = (½\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 + 0{,}8\cdot 0{,}2) / (0{,}6+0{,}2) = 0{,}5$ m.
b) $\Theta = (1/12\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8^2 + 0{,}6\cdot 0{,}4^2) + (1/2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1^2 + 0{,}2\cdot 0{,}8^2) = 0{,}257$ kgm^2.
c) $M = \Sigma(mgk) = 0{,}6\cdot 10\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 10\cdot 0{,}8 = 4$ Nm; $M = \Theta\beta \quad\rightarrow\quad \beta = M / \Theta = 15{,}56\ s^{-2}$.
d) Energia-megmaradással
$(m+M)g\ x_s + 0 = 0 + ½\Theta\omega^2 \quad\rightarrow\quad \omega = 5{,}58\ s^{-1}$.

10/6. M = 5 kg tömegű, ℓ = 2,4 m hosszúságú vízszintes helyzetű vékony homogén rúd a végétől ℓ/6 távolságra átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A rúd tengelytől távolabbi végpontjához alulról hozzádobunk egy m = 1 kg tömegű golyót függőleges v = 15 m/s sebességgel. A golyó hozzáragad a rúdhoz; az ütközés tökéletesen rugalmatlannak tekinthető.
a) Adjuk meg az összeragadt golyó + rúd tömegközéppontjának távolságát a forgástengelytől!
b) Számoljuk ki az összeragadt golyó + rúd tehetetlenségi nyomatékát a megadott forgástengelyre vonatkoztatva!
c) Mekkora a golyó + rúd impulzusmomentuma az ütközés után?
d) Átfordul-e a rúd a hozzáragadt golyóval a függőleges helyzeten?

Megoldás
a) A homogén rúd tömegközéppontja a felezőpontjában van, ami a forgástengelytől $\ell/2 - \ell/6 = \ell/3$ távolságra van, a golyó pedig $5\ell/6$ távolságban van a forgástengelytől, így a tömegközéppont
$d_{tk} = [M\ (\ell/3)+m\ (5\ell/6)] / (M+m) = (5\cdot 0{,}8+1\cdot 2) / (5+1) = 1$ m távolságra van a forgástengelytől.
b) A forgástengely ℓ/3-mal van eltolva a tömegközépponttól, ezért a rúd tehetetlenségi nyomatéka erre a tengelyre (a Steiner-tétellel számolva) $\Theta_{rúd} = \Theta_s + M\ (\ell/3)^2 = (7/36)\ M\ell^2 = 5{,}6$ kgm^2,
a rúd végpontjához ragadt golyóé pedig $\Theta_{golyó} = m\ (5\ell/6)^2 = 4$ kgm^2,
tehát $\Theta = \Theta_{rúd} + \Theta_{golyó} = 9{,}6$ kgm^2.
c) Az ütközés pillanatában a külső erők forgatónyomatéka zérus, felírhatjuk az impulzusmomentum-megmaradást. Ütközés előtt a rúd nem mozog, a rúdhoz közeledő golyó impulzusának a momentuma az adott tengelyre vonatkoztatva pedig
$L = (5\ell/6)\ mv = 30$ kgm^2/s , ennyi lesz tehát az impulzusmomentum az ütközés után is.
d) Az impulzusmomentumból kiszámolhatjuk a rúd+golyó kezdeti szögsebességét:
$L = \Theta\omega \quad\rightarrow\quad \omega = L / \Theta = 30 / 9{,}6 = 3{,}125\ s^{-1}$.
Számoljuk ki azt, mekkora minimális kezdeti szögsebesség kell ahhoz, hogy a rúd függőleges helyzetbe forduljon. Mivel a rúd súrlódásmentesen foroghat a tengely körül, felírhatjuk az energia-megmaradást:
$½\ \Theta\omega_0^2 = E_{pot}$, ahol E_{pot} a rúd+golyó helyzeti energiája a függőleges helyzetben, ami a tömegközéppont emelkedéséből számolható, tehát
$½\ \Theta\omega_0^2 = (M+m)g\ d_{tk}$. Ebből $\omega_0 = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}53\ s^{-1}$, vagyis a rúd nem jut el a függőleges helyzetbe.

10/7. Az ábrán látható gördeszka gyakorlópálya egy $\alpha = 44°$ hajlásszögű, $h = 7$ m magas és egy $H = 10$ m magas, γ hajlásszögű ellenlejtőből áll, amelyek alul ívesen csatlakoznak. A pálya tetejétől elindítunk (ahol a gömb tömegközéppontja h = 7 m-rel van magasabban, mint a gödör legalsó pontja) kezdősebesség nélkül egy $m = 1$ kg tömegű, $r = 10$ cm sugarú gömböt, amely csúszásmentesen gördül a lejtőn.



A gömb tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára vonatkoztatva $2/5\ mr^2$.

a) Mekkora a gömb tömegközéppontjának gyorsulása az induláskor?
b) Mekkora a gömb tömegközéppontjának sebessége a pálya alsó pontján való áthaladásakor?
c) Milyen magasra jut a szemközti oldalon?
d) Adjuk meg γ függvényében a gömb szögsebességét az ellenlejtőn ½h = 3,5 m magasan!

Megoldás

a) A gömb haladó mozgására: $ma = mg \sin\alpha - F_t$,

ill. a forgására, forgástengelynek a tömegközéppontot tekintve: $\Theta\beta = F_t r$,

és mivel a gömb tisztán gördül, $a = r\beta$.

Ezekből $a = g \sin\alpha / (1+\Theta/mr^2) = 5/7\ g \sin\alpha = 4{,}96\ \mathrm{m/s^2}$.

b) Energia-megmaradást alkalmazva

$mgh = ½\ mv^2 + ½\ \Theta\omega^2$.

Mivel a gömb tisztán gördül, $v = r\omega \rightarrow$

$mgh = ½\ mv^2 + ½\ \Theta(v/r)^2 = ½\ mv^2 + ½\ 2/5mr^2\ (v/r)^2 = 7/10\ mv^2$

$\rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 10$ m/s.

c) Energia-megmaradást alkalmazva $mgh = mgH$, azaz ugyanolyan magasra.

d) A szögsebesség független lesz a β hajlásszögtől. Energia-megmaradást alkalmazva

$mgh = mgh' + ½\ mv^2 + ½\ \Theta\omega^2$

$mgh = mgh' + ½\ m(\omega r)^2 + ½\ 2/5mr^2\ \omega^2 = mgh' + 7/10\ m\ (\omega r)^2$

$\rightarrow\quad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{7}g\,(h-h')} = 50\sqrt{2} = 70{,}7\ \mathrm{s^{-1}}$.